

**КУРС
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
КАГАНОВА И. Л., КАСАТКИНА А. С.
И ПЕРЕКАЛИНА М. А.

ОНТИ ★ НКТП ★ СССР ★ 1937

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Баскаков Ю. Н., Каганов И. Л., Касаткин А. С., Левин М. И.,
Ломоносов В. Ю., Маркович И. М., Перекалин М. А., Поливанов К. М.,
Рейм Ф. О. и Соловьев С. М.

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
КАГАНОВА И. Л., КАСАТКИНА А. С.
и ПЕРЕКАЛИНА М. А.

*Утверждено Комитетом по высшей школе
при СНК СССР в качестве учебного по-
собия для энергетических вузов*

Цена 11 руб., пер. 2 руб.



ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА

1937

ЛЕНИНГРАД

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
Обложка	4 сверху	Соловьев С. М.	Соловьев С. Д.	ред.
31	14 сверху	dt	dV	авт.
278	2 снизу	$k - b + 1 - y$	$k = b + 1 - y$	авт.
407		фиг. 10,35 повернуть на 90°		редакт.
449	6 снизу	$m = I_1 \cos \varphi_1$	$Ia = I_1 \cos \varphi_1$	авт.
510	5 сверху	e^t	e^{t^2}	гипогр.

Зак. 2120. Каганов и др. Курс теоретической электротехники.

Рецензент проф. П. Л. Калантаров
 Редактор инж. К. М. Поливанов
 Технич. редактор В. Н. Шипов

Сдано в производство 14/IV 1937 г.

Подписано к печати 23/IX 1937 г.

Формат бумаги $72 \times 1(5\frac{1}{16})$

Колич. печ. листов 35,25

Колич. бум. листов 17,38

Учетно-авторских листов 57,87

Колич. печ. знаков в 1 бум. листе 140.000

Авторских листов 51,15

Энергоредакция 29

Заказ № 2120

Учетный номер 7013

Ленгорлит № 4298

Тираж 8000

ПРЕДИСЛОВИЕ

При составлении книги авторы поставили своей целью дать такое изложение основных теоретических вопросов электротехники, при котором физическая сторона рассматриваемых процессов не заслонялась бы сложными математическими выводами и которое в то же время оставалось бы строго научным.

Книга рассчитана, главным образом, на студентов электротехнических вузов, но может быть использована как пособие и в электротехнических техникумах.

В некоторых высших электротехнических школах нашего Союза в последние годы преподавание теоретической электротехники велось на основе практической системы единиц. Этой системой пользовались и авторы настоящего труда в течение ряда лет своей педагогической деятельности и последовательно провели ее при изложении материала своей книги.

Часто встречающимся недостатком коллективно созданных книг является их неоднородность. Хотя настоящая книга и написана десятью авторами, однако их продолжительная совместная педагогическая работа может до известной степени служить гарантией того, что если и есть какая-нибудь неоднородность в изложении различных глав книг, то она все же не выходит из пределов допустимого. Во всяком случае редакционная коллегия стремилась сгладить все шероховатости в этом отношении.

Между отдельными авторами работа распределялась следующим образом:

Ю. Н. Баскаков и С. Д. Соловьев — Простая цепь переменного тока.

И. Л. Каганов — Цепи переменного тока, содержащие железо. Вращающееся магнитное поле (в главе „Многофазные токи“).

А. С. Касаткин — Переходные процессы в цепях с сосредоточенными и распределенными постоянными.

М. И. Левин — Постоянный ток. Всеобщая цепь переменного тока и круговая диаграмма.

В. Ю. Ломоносов — Электрическое поле.

И. М. Маркович — Многофазные токи.

М. А. Перекалин — Символический метод и графические методы и исследование сложных цепей переменного тока. Цепи с распределенными постоянными и частично электрическое поле и постоянный ток.

К. М. Поливанов — Магнитное поле.

Ф. О. Рейм — Несинусоидальные токи.

Серьезную помощь редколлегии оказал К. М. Поливанов, который по поручению Энергоредакции ОНТИ провел большой труд по окончательной обработке текста и согласованию различных глав, за что редколлегия выражает ему свою благодарность.

Редколлегия благодарит также проф. П. Л. Калантарова за целый ряд подробных указаний, которые были сделаны им при просмотре рукописи и учтены при редактировании ее.

Авторы обращаются с просьбой ко всем читателям сообщить ей (через издательство или непосредственно) о недостатках книги и желательных изменениях в ней. Все эти замечания будут приняты во внимание при повторном издании книги если, конечно, оно будет осуществлено.

И. КАГАНОВ, А. КАСАТКИН, М. ПЕРЕКАЛИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие	3
Введение.	
Строение атома. Проводники и диэлектрики	9
Глава 1. Постоянный ток	
1,1. Ток и напряжение	13
1,2. Электрическое поле	15
1,3. Плотность тока	19
1,4. Закон Ома	21
1,5. Удельная электропроводность и удельное сопротивление	23
1,6. Зависимость сопротивления от температуры	24
1,7. Электрическое поле и ток между концентрическими шаровыми электродами	25
1,8. Шаровой электрод в неограниченной среде	26
1,9. Два шаровых электрода на большом расстоянии	27
1,10. Энергия и мощность тока	28
1,11. Нагревание проводов	31
1,12. Закон Ома для замкнутой цепи	33
1,13. Внешняя характеристика и коэффициент полезного действия источника тока	35
1,14. Последовательное соединение проводников	37
1,15. Графическое изображение изменения потенциала вдоль цепи	38
1,16. Разветвленная цепь. Законы Кирхгофа	40
1,17. Определение токов и напряжений в разветвленной цепи	42
1,18. Цепь с двумя узлами	44
1,19. Параллельное соединение проводников	46
1,20. Смешанное соединение проводников	48
1,21. Измерение токов и напряжений	49
1,22. Метод наложения	51
1,23. Метод холостого хода и короткого замыкания	53
1,24. Метод трансфигурации (Кеннелли)	56
1,25. Передача энергии постоянным током	60
1,26. Трехпроводная система	62
Глава 2. Электрическое поле	
2,1. Поле точечного заряда	64
2,2. Потенциал электростатического поля	66
2,3. Теорема Гаусса	70
2,4. Геометрия электростатического поля	73
2,5. Однородное электростатическое поле	79
2,6. Проводники в электростатическом поле	80
2,7. Диэлектрики в электростатическом поле	83
2,8. Многослойная изоляция	86
2,9. Емкость	88
2,10. Энергия электрического поля	90
2,11. Соединение конденсаторов	92
2,12. Неоднородные поля	94
2,13. Цилиндрический конденсатор	95
2,14. Сферический конденсатор	96
2,15. Двухпроводная линия	97
2,16. Распределение зарядов и потенциалов в системе проводов	99
2,17. Частичные емкости	104
2,18. Краевой эффект	—

Глава 3. Магнитное поле	Стр.
3, 1. Электрический ток и магнитное поле	107
3, 2. Магнитная индукция	—
3, 3. Магнитный поток	110
3, 4. Знак магнитного потока	115
3, 5. Магнитный поток через контур	116
3, 6. Правило Максвелла о взаимодействии магнитного поля и тока	117
3, 7. Магнитный поток через замкнутую поверхность	118
3, 8. Индукционные линии и индукционные трубки	—
3, 9. Закон Био и Савара	121
3, 10. Магнитная проницаемость	124
3, 11. Механическое взаимодействие параллельных проводов	126
3, 12. Напряженность магнитного поля	128
3, 13. Закон полного тока	130
3, 14. Индуктированная э. д. с.	137
3, 15. Потокосцепление	142
3, 16. Самоиндукция	144
3, 17. Энергия магнитного поля	147
3, 18. Взаимоиндукция	150
3, 19. Коэффициент связи и коэффициент рассеяния	156
3, 20. Энергия двух магнитносвязанных контуров тока	157
3, 21. Вычисление индуктивностей	159
3, 22. Баланс энергии при движении контура с неизменяющимся током в магнитном поле	165
3, 23. Ферромагнитные вещества	167
3, 24. Намагниченность	168
3, 25. Кривая первоначального намагничивания	—
3, 26. Петля гистерезиса	170
3, 27. Магнитное поле в неоднородной среде	171
3, 28. Расчет неразветвленной магнитной цепи	177
3, 29. Расчет разветвленной магнитной цепи	181
3, 30. Индуктивность катушки с железом	185
3, 31. Потери на гистерезисе	187
3, 32. Подъемная сила магнитов	189
3, 33. Системы единиц измерения, применяемые в электротехнике и в учении об электромагнетизме	190
Глава 4. Простая цепь переменного тока	
4, 1. Переменный ток	197
4, 2. Получение переменного тока. Понятие об устройстве генераторов переменного тока	198
4, 3. Синусоидально изменяющиеся величины и их графическое изображение	199
4, 4. Сложение синусоидальных величин	201
4, 5. Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами	202
4, 6. Сложение векторов	204
4, 7. Векторные диаграммы	205
4, 8. Осциллограф	206
4, 9. Эффективные значения тока и напряжения	207
4, 10. Средние значения тока и напряжения	208
4, 11. Особенности цепи переменного тока	209
4, 12. Цепь переменного тока, содержащая только сопротивление R	210
4, 13. Индуктивность и сопротивление в цепи переменного тока	213
4, 14. Емкость в цепи переменного тока	222
4, 15. Цепь переменного тока, содержащая емкость и сопротивление, соединенные последовательно	224
4, 16. Параллельное соединение емкости и сопротивления	228
4, 17. Последовательное соединение омического сопротивления R , индуктивности L и емкости C . Резонанс напряжений	230
4, 18. Общий случай параллельного соединения. Резонанс токов	235
Глава 5. Символический метод	
5, 1. Символическое выражение векторов тока и напряжения в прямоугольной системе координат	239
5, 2. Символическое изображение векторов тока и напряжения в полярной системе координат	242
5, 3. Сложение и вычитание векторов	244

	<i>Стр.</i>
5, 4. Геометрический смысл умножения и деления комплексных величин	245
5, 5. Вычисление мощности по комплексным выражениям тока и напряжения	247
5, 6. Закон Ома. Символическое выражение кажущегося сопротивления	248
5, 7. Символическое выражение кажущейся проводимости	250
5, 8. Законы Кирхгофа	—
5, 9. Сопротивление и проводимость при последовательном и параллельном соединениях	255
Глава 6. Графические методы	
6, 1. Графическое определение общего сопротивления или проводимости сложной цепи	257
6, 2. Круговая диаграмма цепи с переменным реактивным и постоянным активным сопротивлениями	259
6, 3. Круговая диаграмма цепи с переменным активным и постоянным реактивным сопротивлениями	262
6, 4. Круговая диаграмма цепи с переменной нагрузкой при постоянном $\cos \varphi$ потребителя	264
6, 5. Определение вторичного напряжения и вторичной мощности по круговой диаграмме	267
6, 6. Регулирование напряжения с помощью реактивного тока	269
Глава 7. Исследование сложных цепей переменного тока	
7, 1. Принцип наложения	271
7, 2. Выключение одного из участков цепи	273
7, 3. Включение в цепь нового участка	274
7, 4. Изменение сопротивления одного из участков цепи	277
7, 5. Контурные токи	278
7, 6. Закон взаимности	280
7, 7. Графический способ преобразования звезды в треугольник и обратно (метод Кеннелли)	281
7, 8. Индуктивно связанные цепи	283
Глава 8. Многофазные токи	
8, 1. Многофазные и трехфазные системы	289
8, 2. Соединение звездой	292
8, 3. Соединение треугольником	295
8, 4. Преобразование треугольника в звезду при равномерной нагрузке фаз	297
8, 5. Мгновенная мощность трехфазного тока	298
8, 6. Активная мощность трехфазного тока	299
8, 7. Реактивная и кажущаяся мощность трехфазного тока	300
8, 8. Измерение мощности трехфазной системы	301
8, 9. Передача энергии трехфазным током	303
8, 10. Топографическая диаграмма	306
8, 11. Неравномерная нагрузка фаз при соединении звездой	—
8, 12. Неравномерная нагрузка фаз при соединении треугольником	314
8, 13. Классификации многофазных систем	321
8, 14. Сравнение многофазных систем по экономичности	323
8, 15. Разложение системы трех несимметричных векторов на симметричные системы	325
8, 16. Применение метода симметричных составляющих к расчету несимметричных коротких замыканий	331
8, 17. Двухфазное вращающееся поле	335
8, 18. Синусоидально распределенное поле	338
8, 19. Разложение пульсирующего поля на два вращающихся	340
8, 20. Многофазное вращающееся поле	341
8, 21. Эллиптическое вращающееся поле	342
Глава 9. Несинусоидальные токи	
9, 1. Цепи с несинусоидальными э. д. с. и токами	345
9, 2. Разложение периодических функций в ряд Фурье	346
9, 3. Формулы для определения амплитуд и фаз	347
9, 4. Ряд Фурье для симметричных функций	350
9, 5. Разложение в ряд Фурье трапеции, прямоугольника, треугольника и выпрямленной синусоиды	354

Стр.

9, 6. Приближенные методы разложения в ряд Фурье	358
9, 7. Метод Перри	360
9, 8. Метод Рунге	363
9, 9. Метод Роте	365
9, 10. Кривые тока в цепи с несинусоидальной электродвижущей силой	368
9, 11. Влияние индуктивности и емкости цепи на форму кривой тока	371
9, 12. Резонанс высших гармоник	372
9, 13. Эффективные значения несинусоидальных токов и напряжений	—
9, 14. Мощность при несинусоидальном токе	376
9, 15. Измерение активного сопротивления, индуктивности и емкости	378
9, 16. Коэффициент формы кривой	379
9, 17. Высшие гармоники в трехфазной системе	382
Глава 10. Цепи переменного тока, содержащие железо	
10, 1. Отличительные особенности цепей с железом	387
10, 2. Кривая тока возбуждения	391
10, 3. Практические методы определения намагничивающего тока	394
10, 4. Потери в железе	395
10, 5. Векторная диаграмма реактивной катушки	399
10, 6. Схема замещения реактивной катушки	402
10, 7. Реактивная катушка при последовательном включении в цепь	404
10, 8. Резонанс напряжений в цепях с железом	405
10, 9. Резонанс токов в цепях с железом	407
10, 10. Холостой ход трансформатора	408
10, 11. Нагрузочный режим трансформатора	410
10, 12. Приведенная векторная диаграмма	414
10, 13. Схема замещения трансформатора	416
10, 14. Потеря напряжения в трансформаторе и его к. п. д.	417
10, 15. Трехфазные трансформаторы	419
10, 16. Автотрансформаторы	424
10, 17. Поверхностный эффект в проводниках с током	426
10, 18. Поверхностный эффект в железных листах	432
Глава 11. Всеобщая цепь переменного тока и круговая диаграмма	
11, 1. Всеобщая цепь переменного тока	435
11, 2. Режим нагрузки	436
11, 3. П-образная схема замещения	437
11, 4. Холостой ход и короткое замыкание	439
11, 5. Построение векторов \dot{U} и \dot{I}_1 по данным опытов холостого хода и короткого замыкания при симметричной схеме	441
11, 6. Построение векторов \dot{U}_1 и \dot{I}_1 по данным опытов холостого хода и короткого замыкания при несимметричной схеме	442
11, 7. Круговая диаграмма	444
11, 8. Построение круговой диаграммы	447
11, 9. Вторичный ток и вторичное напряжение	448
11, 10. Первичная мощность и первичный коэффициент мощности	449
11, 11. Вторичная мощность	—
11, 12. Кажущееся сопротивление нагрузки	451
11, 13. Построение круговой диаграммы по опытам холостого хода и короткого замыкания	—
Глава 12. Цепи с распределенными постоянными	
12, 1. Основные уравнения	453
12, 2. Холостой ход и короткое замыкание	457
12, 3. Индуктивность и емкость трехфазной линии	460
12, 4. Прямая и отраженная волна	467
12, 5. Бесконечно длинная линия	470
12, 6. Линия без искажения	—
12, 7. Приближенные уравнения	472
12, 8. Схемы замещения	473
Глава 13. Переходные явления в цепях с сосредоточенными постоянными	
13, 1. Общие понятия	478
13, 2. Переходные процессы в цепях с сосредоточенными и в цепях с распределенными постоянными	—

	<i>Стр.</i>
13, 3. Вынужденный и свободный процессы при переходных явлениях	479
13, 4. Разряд конденсатора на сопротивление	480
13, 5. Постоянная времени цепи, содержащей R и C	481
13, 6. Включение конденсатора на постоянное напряжение	483
13, 7. Включение конденсатора на переменное напряжение	485
13, 8. Изменение сопротивления в цепи, содержащей R и C	488
13, 9. Замыкание накоротко цепи, содержащей L и R	491
13, 10. Включение на постоянное напряжение цепи, содержащей L и R	493
13, 11. Включение на переменное напряжение цепи, содержащей L и R	495
13, 12. Изменение сопротивления в цепи, содержащей L и R	496
13, 13. Колебательный контур без потерь	498
13, 14. Колебательный контур с потерями	501
13, 15. Векторное изображение напряжений и тока в колебательном контуре	506
13, 16. Декремент затухания	507
13, 17. Аперриодический разряд конденсатора	508
13, 18. Включение колебательного контура на постоянное напряжение	512
13, 19. Включение колебательного контура на переменное напряжение	514
13, 20. Включение на переменное напряжение цепи, содержащей железо	519
13, 21. Алгебраизация дифференциальных уравнений	525
13, 22. Цепи со взаимной индукцией	529
13, 23. Теоремы разложения	532
 Глава 14. Переходные процессы в цепях с распределенными постоянными	
14, 1. Распространение переходных процессов в форме электромагнитных волн	537
14, 2. Разряд линии без потерь	538
14, 3. Включение разомкнутой на конце линии без потерь на постоянное напряжение	542
14, 4. Падающие и отраженные волны	545
14, 5. Включение короткозамкнутой линии	547
14, 6. Включение линии, замкнутой на сопротивление	550
14, 7. Включение линии, замкнутой на сопротивление и индуктивность	553
14, 8. Схема замещения цепей с распределенными постоянными. Правило Петерсена и Пфифнера	555
14, 9. Включение линии, замкнутой на емкость	556
14, 10. Отражение и преломление волн в месте соединения линий с различными волновыми сопротивлениями	557
14, 11. Применение правила Петерсена-Пфифнера к отражению волн в точках соединения различных линий	559
Алфавитный указатель	560

ВВЕДЕНИЕ

Строение атома. Проводники и диэлектрики

В состав атомов всех 92 элементов входят более или менее сложные системы электрических зарядов. Количество и расположение этих электрических зарядов определяют свойства атомов.

То обстоятельство, что материя в своем обычном состоянии не обнаруживает наличия в ней электрического заряда, объясняется существованием двоякого рода электричества. Разнородные заряды, связанные между собой в равном числе, создают нейтральную в электрическом отношении систему; происходит как бы взаимное уравновешивание противоположных электрических свойств. Однако в определенных условиях в материи может преобладать та или другая группа однородных зарядов, такая группа уже будет действовать на внешнюю среду и на другие группы зарядов. В первую очередь это взаимодействие сказывается в появлении механических сил притяжения и отталкивания между зарядами: притяжения между зарядами различного рода и отталкивания между зарядами одинакового рода. Чтобы различать действия зарядов одной и другой группы, одни заряды были названы положительными, а другие отрицательными. Выбор знака, вообще говоря, совершенно условен. Еще во времена первых опытов с электричеством, когда заряды получали в результате трения стекла о кожу, условились считать положительным заряд, получавшийся на стекле, и отрицательным — остающийся на коже.

Имеющийся экспериментальный материал показывает, что существуют некоторые минимальные электрические заряды, дальнейшее дробление которых уже невозможно¹. При этом элементарный положительный заряд, так называемый протон, отличается от элементарного отрицательного заряда — электрона не только своим знаком, но также и своей массой. При равенстве абсолютных значений электрических зарядов протон обладает массой, превосходящей массу электрона в 1840 раз². Число протонов в нейтральном атоме равно числу электронов.

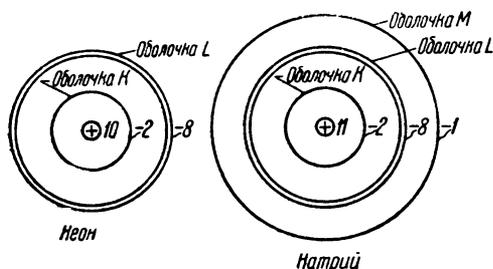
В применении к физике атома теряет смысл целый ряд привычных, наглядных представлений. Однако грубо структура атома может быть представлена моделью, напоминающей солнечную систему.

¹ Эти минимальные заряды следовало бы назвать атомами электричества („атом“ значит неделимый). Однако этот термин прочно монополизирован химией для обозначения наименьшего количества химических элементов, которое входит в состав молекул, поэтому во избежание путаницы мы будем называть атомы электричества элементарными зарядами.

² Новейшие открытия показали, что существуют элементарные положительные заряды (позитоны или позитроны), обладающие такой же малой массой, как и электроны. Их существование, однако, всегда неустойчиво. Возможно, что протоны являются комбинацией нейтральной в электрическом отношении частицы — нейтрона и элементарной положительной частицы — позитона.

В центре атома группируются все протоны и часть электронов — от половины до двух третей общего их количества¹, образуя весьма прочную систему, называемую ядром атома. Таким образом в ядре оказывается избыток положительных зарядов. Недостающие для электрического равновесия электроны располагаются вне ядра, вращаясь вокруг него по определенным эллиптическим орбитам, образуя ряд электронных оболочек.

Место, занимаемое тем или иным химическим элементом в периодической системе элементов, обусловлено строением его атома, т. е. числом и расположением электрических зарядов. Число протонов равно при этом атомному весу данного вещества. Число избыточных положительных зарядов в ядре, т. е. разность между числом протонов и числом ядерных или внутренних электронов равно порядковому номеру вещества.



Фиг. 0,1.

С порядковым номером вещества совпадает также число внешних электронов нейтрального атома.

Общее число электронных оболочек равно периоду данного вещества. Внутренние оболочки обладают большей прочностью, и число электронов на них остается строго постоянным: два электрона — на первой, восемь — на второй и т. д. Химические и физические свойства вещества определяются строением наружной

(периферической), наименее устойчивой оболочки.

На первый взгляд изложенному здесь представлению о структуре атомов противоречат дробные значения большинства атомных весов. Однако атомные веса, фигурирующие в периодической системе элементов, представляют собой средние значения атомных весов различных элементов (изотопов) с одинаковым строением внешней электронной оболочки (тождество химических свойств), с одинаковым числом внешних электронов (тождество порядковых номеров), но с различным числом протонов, а следовательно, и внутренних электронов (различные атомные веса). Атомный вес отдельного изотопа всегда равен целому числу.

Для иллюстрации рассмотрим модели двух атомов: неона и натрия (фиг. 0,1). Неоном заканчивается второй период периодической системы элементов; его атомный вес равен 20,2, что соответствует двум изотопам с атомными весами 20 и 22, смешанным в отношении 9:1. Порядковый номер неона 10. Таким образом ядро неона должно состоять из 20 или 22 протонов и 10 или 12 электронов. Десять внешних электронов образуют две электронных оболочки: внутреннюю с двумя электронами и внешнюю с восемью электронами. Внешняя оболочка неона имеет вполне законченное строение; присоединение к ней новых электронов невозможно, и отщепление существующих затруднено. Подобная устойчивость внешней электронной оболочки характерна для всех инертных газов, замыкающих собой периоды менделеевской таблицы.

Натрий в периодической системе идет вслед за неоном: его порядковый номер 11 и атомный вес 23. Следовательно, ядро натрия состоит из 23 протонов и 12 электронов. Одиннадцать внешних электронов образуют уже не две, а три оболочки, причем обе внутренние оболочки тождественны с оболочками неона, а внешняя состоит из единственного электрона, весьма слабо связанного с ядром.

¹ Единственное исключение составляет атом водорода.

Нарушение нейтрального состояния атома происходит в результате отщепления внешних электронов или присоединения избыточных. Явление это называется ионизацией атома, причем отщепление электрона дает положительную ионизацию, а присоединение — отрицательную. При электризации тел наблюдается ионизация его атомов. Тело становится наэлектризованным, когда в нем имеется избыток зарядов какого-нибудь одного знака. Очевидно, что положительная электризация тела возможна лишь при одновременной отрицательной электризации другого тела и обратно.

О геометрических размерах атома может дать понятие модель атома водорода, обладающего наиболее простым строением (фиг. 0,2) Электронная оболочка водорода состоит из единственного электрона (порядковый номер 1). Радиус орбиты электрона равен около $5,3 \cdot 10^{-9}$ см, радиус самого электрона — порядка 10^{-13} см, радиус протона — порядка 10^{-16} см. Число оборотов электрона вокруг ядра составляет $6,58 \cdot 10^{16}$ в секунду¹.

Одним из важнейших для электротехники свойств вещества является его электропроводность. Этим термином мы будем обозначать способность электронов или ионов перемещаться внутри вещества по всему его объему. Электропроводность вещества обусловлена, главным образом, прочностью связи между внешней электронной оболочкой и ядром атома.

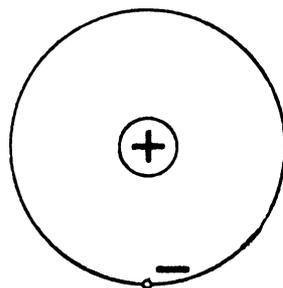
При наличии жесткой связи, препятствующей отрыву электронов, вещество не обладает электропроводностью.

Не обладают электропроводностью и такие вещества, ионы которых не могут перемещаться по всему объему тела и лишь совершают колебания вокруг некоторого среднего положения.

Все такие вещества носят название непроводников, диэлектриков или изоляторов. К диэлектрикам относятся и такие вещества, где образование ионов, хотя и возможно, но затруднено, или где ионы и свободные электроны обладают небольшой подвижностью. Диэлектриками являются все без исключения газообразные тела², часть жидкостей и за исключением металлов и угля почти все твердые тела.

В зависимости от того, что является носителем перемещающегося электричества — ионы или электроны, мы различаем ионную и электронную электропроводность. К телам с ионной электропроводностью относятся, главным образом, диссоциированные растворы кислот, щелочей и солей. В этих веществах электричество переносится ионами того и другого знака. При этом вместе с зарядами перемещается и само вещество. Тела, обладающие ионной электропроводностью, носят название проводников второго класса.

Металлы обладают другим видом электропроводности. В них электроны могут отделяться от нейтральных атомов и свободно перемещаться в том или ином направлении. Здесь мы имеем дело с электронной электропроводностью. Детали движения электронов внутри металлов еще не вполне выяснены. Можно предполагать, что орбиты внешней оболочки атомов металла весьма вытянуты, напоминая орбиты комет. Когда эле-



Фиг. 0,2.

¹ Как читателю должно быть известно из курса физики, все эти размеры носят несколько условный характер. Так, например, радиусы электрона и протона подсчитаны из предположения, что эти частицы представляют собой сферические тела и что их инерция обусловлена их электрическим полем.

² В нормальном состоянии (при очень высокой температуре и в сильном электрическом поле газы становятся проводящими).

ктрон, двигаясь по вытянутой орбите, удаляется от ядра, связь его с ядром ослабевает, и при достаточном приближении к другому атому он может быть „захвачен“ этим последним. Сделав вокруг ядра „захватчика“ один или несколько оборотов, блуждающий электрон переходит к следующему близлежащему атому. Эти блуждающие или свободные электроны и обуславливают электропроводность металла. При переходе металла в газообразное состояние расстояние между его атомами увеличивается настолько, что переход электрона от атома к атому становится уже невозможным. Поэтому пары металлов являются непроводниками. В отличие от веществ с ионной электропроводностью металлы называются проводниками первого класса.

Деление на проводники и диэлектрики несколько искусственно. Не существует ни абсолютных проводников, ни абсолютных диэлектриков. Если для суждения об электропроводности воспользоваться величиной работы, необходимой для перемещения определенного количества электронов на 1 см/sec, то все существующие материалы можно расположить в определенной последовательности в порядке убывания их электропроводности.

ГЛАВА I

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

1.1. Ток и напряжение

Если в ванну с раствором медного купороса (CuSO_4) погрузить две параллельно расположенные медные пластинки (электроды) и соединить их проволокой с зажимами аккумуляторной батареи, то можно наблюдать следующие явления: 1) через некоторое время пластинка, соединенная с положительным зажимом батареи, становится тоньше, а соединенная с отрицательным зажимом — толще; 2) раствор медного купороса нагревается; 3) магнитная стрелка, подвешенная над ванной, стремится стать параллельно пластинкам; наконец, 4) пластинки притягиваются друг к другу. Последнее из этих явлений происходит и в том случае, если ванну оставить пустой.

Все эти явления объясняются следующим образом:

Часть молекул медного купороса в растворе распадается на положительно заряженные ионы Cu и отрицательно заряженные ионы SO_4 . Те и другие находятся в состоянии беспорядочного движения. При соединении электродов с зажимами аккумуляторной батареи отрицательные ионы SO_4 начинают перемещаться в сторону положительного электрода и, достигнув его, соединяются с атомами меди, отдавая электроду свой заряд и образуя новые молекулы CuSO_4 , переходящие в раствор. Таким образом медная пластинка, служащая положительным электродом, постепенно растворяется и становится все тоньше и тоньше.

Одновременно положительные ионы Cu начинают перемещаться к отрицательному электроду и осаждаются на нем, отдавая ему свой заряд. Благодаря этому отрицательный электрод постепенно утолщается, покрываясь все новыми и новыми слоями меди.

Происходящее в ванне движение зарядов от одного электрода к другому называется электрическим током. За направление тока условно было принято направление движения положительных зарядов.

При своем движении к электродам ионы то и дело сталкиваются как между собой, так и с нейтральными молекулами электролита, усиливая их беспорядочное движение, т. е. повышая температуру раствора. Необходимое для этого количество энергии в конечном счете заимствуется от аккумуляторной батареи.

Из самого механизма переноса зарядов вытекает, что количество меди, которое в каждую секунду осаждается на поверхности отрицательного электрода, должно быть строго пропорционально тому количеству электричества, которое за это время было доставлено на электроды движущимися ионами. При установившемся электрическом токе количество ионов, проходящих в секунду через любое поперечное сечение ванны,

одинаково и равно количеству ионов, осаждающихся на электродах¹. Количество электричества, переносимое движущимися зарядами за 1 сек., может быть принято за меру электрического тока.

При удалении с нейтрального тела отрицательных зарядов начинает сказываться его положительный заряд. Поэтому удаление отрицательных зарядов равносильно, в электрическом отношении, появлению положительных зарядов.

Точно так же удаление положительных зарядов равносильно появлению отрицательных. Поэтому при определении величины электрического тока движение отрицательных зарядов заменяется эквивалентным ему движением равного количества положительных зарядов в обратную сторону.

В формулах неизменяющийся ток обозначается буквой I , а изменяющийся — i .

За единицу тока естественно было бы принять протон в секунду. Но это весьма неудобная единица. Во-первых, она настолько мала, что обычные в практике токи всегда выражались бы весьма большим числом таких единиц (миллиарды миллиардов и более). Во-вторых, ее воспроизведение связано со значительными экспериментальными трудностями. Поэтому за единицу тока принят значительно больший ток, а именно такой, который, проходя через водный раствор азотнокислого серебра (AgNO_3), отлагает в секунду 1,118 mg серебра. Эта единица называется международным ампером² (А). Тысячная доля ампера называется миллиампером (mA), а миллионная — микроампером (μA).

В соответствии с этим за единицу количества электричества (заряда) принята амперсекунда — кулон³ (С), т. е. такое количество электричества, которое проходит в секунду через поперечное сечение проводника при токе в 1 А. В некоторых случаях применяется и более крупная единица заряда — амперчас (Ah), равная 3600 С. Для количества электричества установлено обозначение Q или q .

Мы уже видели, что электрический ток в проводнике (раствор медного купороса) сопровождается столкновениями движущихся ионов и молекул, вызывающими необходимость в непрерывной затрате энергии для поддержания тока. Та работа, которую нужно затратить на перемещение заряда в 1 С от одного электрода до другого, называется напряжением между электродами. Иначе говоря, напряжение между электродами представляет собой отношение работы, затраченной на поддержание тока к количеству электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника.

Неизменяющееся напряжение обозначается буквой U , а изменяющееся — u .

Если сравнить электрический ток в проводнике с движением воды по трубе, то сила тока окажется аналогичной „секундному расходу“ воды, т. е. количеству воды (в cm^3 или m^3), которое в секунду проходит через любое поперечное сечение трубы. Ежесекундная затрата работы на преодоление трения в трубе равна произведению разности давления на концах трубы (в kG/cm^2) на секунднй расход (в cm^3/sec). Таким образом напряжение между концами проводника оказывается аналогичным разности давлений между концами трубы, которая представляет собой отношение работы, затраченной на поддержание движения, к секундному расходу воды.

¹ Необходимо отметить, что ионы различных веществ обладают разным зарядом, в зависимости от того, скольких электронов недостает в их электронной оболочке или сколько имеется лишних электронов.

² См. также 3,33.

³ Заряд протона или электрона составляет $1,6 \cdot 10^{-19}$ С.

Если работу электрического тока измерять в джоулях ($1 \text{ J} = 10^7 \text{ эрг}$), то единицей напряжения будет $1 \frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}}$. Эта единица носит название вольт (V)¹. Тысяча вольт называется киловольт (kV), а тысячная доля вольта — милливольт (mV).

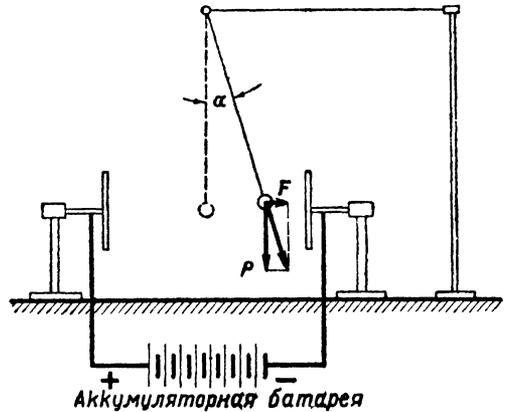
Подобно разности давлений между концами трубы, отделенными друг от друга запертым краном, напряжение может существовать и при отсутствии тока, если электроды разделены непроводящей средой (например, воздухом). Признаком, указывающим в этом случае на наличие напряжения, является то взаимное притяжение электродов, которое было упомянуто в начале этого параграфа и более подробно будет разобрано в следующей главе. Что касается также лишь упомянутого действия тока на магнитную стрелку, мы вернемся к нему в гл. 3.

Если концы металлического проводника присоединить к зажимам аккумуляторной батареи или другого источника тока, по нему также пойдет ток. Но в металлическом проводнике ток обусловлен не встречным движением положительных и отрицательных ионов, а односторонним движением электронов, несущих отрицательный заряд. Однако и в этом случае в силу исторических обстоятельств принято в качестве положительного направления тока то направление, в котором должны были бы двигаться положительные заряды для осуществления такого же перенесения электричества. Положительные заряды (протоны) в металлических проводниках не участвуют в создании электрического тока, образуя жесткую кристаллическую решетку твердого проводника.

1,2. Электрическое поле

В предыдущем параграфе было установлено, что положительные и отрицательные заряды, находящиеся в пространстве между двумя электродами, приходят в движение, после того как электроды соединяются с зажимами аккумуляторной батареи. Из этого факта сейчас же надо сделать вывод, что разделяющая электроды среда приходит при этом в какое-то особое состояние, благодаря которому на помещенные в эту среду электрические заряды начинают действовать силы того или иного направления в зависимости от знака зарядов. Область пространства, находящаяся в указанном состоянии, называется электрическим полем.

С помощью простых опытов нетрудно установить, что если в одно и то же электрическое поле помещать различные по величине заряды, то действующая на них сила оказывается пропорциональной величине заряда. Можно, например, в пространстве между электродами, заполненном просто воздухом, подвесить на непроводящей нити легкий металлический шарик и тем или иным способом² сообщить ему положительный



Фиг. 1, 1.

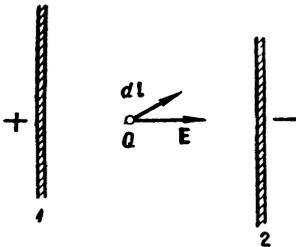
¹ См. также 3,33.

² Например, прикоснувшись им на короткое время к электроду, соединенному с положительным зажимом батареи.

заряд. Как только электроды будут соединены с зажимами батареи, нить с шариком отклонится от вертикального положения по направлению к отрицательному электроду (фиг. 1,1). Зная вес шарика P и угол отклонения α , легко вычислить действующую на шарик силу F . Если снять с шарика половину заряда, коснувшись его на мгновение другим таким же шариком, то отклонение нити уменьшается, и вычисление показывает, что сила F становится в два раза меньше. Продолжая уменьшать заряд шарика, можно убедиться в том, что сила F изменяется пропорционально заряду Q , так что их отношение для данной области электрического поля является постоянной величиной и может служить характеристикой интенсивности поля (его напряженности). Это отношение

$$E = \frac{F}{Q} \quad (1,1)$$

выражает величину напряженности электрического поля. Напряженность электрического поля есть вектор и характеризуется не только величиной, но и направлением. За направление вектора напряженности электрического поля в данной точке принимается направление силы, действующей на помещенный в этой точке положительный заряд. Таким образом напряженность поля



Фиг. 1, 2.

$$E = \frac{F}{Q}. \quad (1,2)$$

Так как работа A равна скалярному произведению силы F на путь l , то, измеряя работу в J , а путь в cm , мы должны будем измерять силу в J/cm . Единицей напряженности электрического поля будет тогда

$$[E] = \frac{[F]}{[Q]} = J/cm^1 \cdot C = V/cm. \quad (1,3)$$

Нетрудно установить простое соотношение между напряженностью электрического поля и напряжением на электродах. Если заряд Q перемещается по произвольному пути от электрода 1 к электроду 2 (фиг. 1,2), то совершенная на этом пути работа

$$A = \int_1^2 F dl = \int_1^2 QE dl = Q \int_1^2 E dl,$$

где заряд Q , как постоянная величина, вынесен за знак интеграла. С другой стороны, согласно самому определению понятия напряжение, данному в предыдущем параграфе,

$$A = Q \cdot U_{12},$$

где U_{12} — напряжение между электродами 1 и 2. Сравнивая эти два выражения одной и той же работы, находим

$$Q \cdot U_{12} = Q \int_1^2 E dl,$$

или, сокращая Q ,

$$U_{12} = \int_1^2 E dl. \quad (1,4)$$

¹ $1 J/cm = 10^7 \text{ эрг/cm} = 10^7 \text{ дин} = 1 \text{ децистен} \approx 10,2 \text{ kG}; 1 J/m = 100 J/cm.$

Электрическое поле, напряженность которого во всех точках одинакова, называется однородным. Такое поле создается, например, между двумя параллельно расположенными плоскими электродами, если расстояние между ними значительно меньше поперечных размеров электродов. Такое же поле получается в металлическом проводнике, соединяющем зажимы источника тока, если этот проводник имеет по всей длине одинаковое поперечное сечение и если квадрат его длины велик по сравнению с его сечением (такие проводники называются линейными).

Для однородного поля соотношение (1,4) принимает более простой вид. Если элемент пути dl взять по направлению напряженности поля E , то, пользуясь тем, что в однородном поле $E = \text{const}$ и, следовательно, может быть вынесено за знак интеграла, получим

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E \cdot dl = E \int_1^2 dl = E \cdot l_{12},$$

где l_{12} — расстояние между электродами. Определяя отсюда E и опуская индекс 12, найдем

$$E = \frac{U}{l}, \quad (1,5)$$

т. е. в однородном поле напряженность поля равна отношению напряжения между двумя точками к расстоянию между ними, если эти точки лежат на прямой, совпадающей по направлению с напряженностью поля. Из этого соотношения еще с большей ясностью вытекает полученная нами единица (размерность) E .

Пример 1,1. Найти силу, действующую на электрон, находящийся внутри провода постоянного сечения длиной 2 м, если напряжение между концами провода равно 40 В.

Напряженность поля в проводе

$$E = \frac{U}{l} = \frac{40 \text{ В}}{200 \text{ см}} = 0,2 \text{ В/см.}$$

Так как заряд электрона $Q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ С}$, то

$$F = Q \cdot E = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ С} \cdot 0,2 \text{ В/см} = -3,2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж/см.}$$

Разность потенциалов и потенциал точек электрического поля. На стр. 16 мы определили напряжение между двумя точками поля как линейный интеграл от напряженности поля, взятый вдоль любой линии, соединяющей эти точки. Это определение, однако, дает однозначный результат только тогда, когда значение интеграла $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ не зависит от пути, а определяется (для рассматриваемого поля) только положением начальной и конечной точек. Это условие всегда выполняется, когда электрическое поле создается неподвижными электрическими зарядами (электростатическое поле). В остальных случаях почти всегда можно выделить из всего пространства, занятого электрическим полем, ограниченную область, внутри которой рассматриваемый интеграл не зависит от пути.

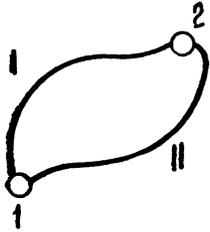
Условие однозначности рассматриваемого интеграла (независимость $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ от пути) может быть выражена тем, что линейный интеграл напря-

женности поля по любому замкнутому контуру равен нулю: $\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0$. Чтобы доказать эквивалентность этих условий, рассмотрим какие-либо две точки электрического поля 1 и 2 (фиг. 1,3) и соединим их двумя произвольно выбранными линиями.

Для каждого из этих двух путей $\int_1^2 \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$ дает одно и то же значение.

Кроме того, очевидно, что $\int_1^2 \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\int_2^1 \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$, т. е. интеграл, взятый при перемещении от точки 1 к точке 2, равен по абсолютной величине и противоположен по знаку интегралу, взятому при перемещении от точки 2 к точке 1. Это очевидно из того, что для каждого отдельного элемента линии направление $d\mathbf{l}$ теперь меняется на прямо противоположное.

Интеграл по замкнутому контуру мы можем представить как сумму интеграла $\int_1^2 \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$, взятого по первому пути, и интеграла $\int_2^1 \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$, взятого по второму пути. Из вышесказанного следует, что эта сумма должна быть равна нулю. Итак,



Фиг. 1,3.

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \int_2^1 \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0. \quad (1,6)$$

В тех областях электрического поля, где при любом пути интеграции $\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0$, работа, производимая электрическим полем при перемещении заряда Q из одной точки поля в другую, полностью определяется положением начальной и конечной точек пути. Это позволяет ввести чрезвычайно важное понятие потенциала электрического поля.

Разностью потенциалов двух точек электрического поля называют линейный интеграл от напряженности поля, взятый по любой линии, соединяющей эти точки.

Обозначая через U_1 и U_2 потенциалы первой и второй точки, мы можем так формулировать только что данное определение разности потенциалов:

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \, d\mathbf{l}. \quad (1,7)$$

Как видно из самого определения, работа, совершаемая силами поля при перенесении заряда Q из точки 1 в точку 2, может быть выражена как произведение заряда на разность потенциалов

$$A = Q \int_1^2 \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = Q \cdot (U_1 - U_2). \quad (1,8)$$

В тех случаях, когда $\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0$, понятие разности потенциалов полностью совпадает с понятием напряжения. Однако о напряжении можно говорить и тогда, когда условие, необходимое для введения понятия

потенциала, не выполняется, т. е. когда $\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} \neq 0$ ¹. Разности потенциалов (и потенциалы) измеряются в тех же единицах, что и напряжения.

Разность потенциалов двух точек является совершенно точно определенной величиной, которая может быть измерена (хотя бы по работе, совершаемой силами поля при перенесении заряда). Напротив того, потенциал любой из точек поля не может быть ни измерен, ни определен каким бы то ни было способом: потенциалу любой точки поля можно всегда приписать произвольное значение. Правда, как только это будет сделано, т. е. выбрано определенное значение потенциала одной из точек (например, U_2), потенциалы всех остальных точек поля однозначно определяются по разности потенциалов [см. (1,7)]. Иначе говоря, начало отсчета потенциалов всегда может быть выбрано произвольно. Практически, как правило, полагают равным нулю потенциал земли, принимая его за начало отсчета.

Неопределенность значения потенциала, однако, не вносит никаких затруднений, так как во всех физических и технических задачах существенна только разность потенциалов.

Для более строгого понимания того, что представляет собой потенциал, очень важно проанализировать его связь с напряженностью поля.

Возьмем две точки, лежащие одна от другой на бесконечно малом расстоянии $d\mathbf{l}$.

Пусть потенциал первой точки $U_1 = U$, потенциал второй точки $U_2 = U + dU$, тогда по уравнению (1,7) мы получаем, что

$$U_1 - U_2 = -dU = \mathbf{E} \, d\mathbf{l},$$

или

$$-dU = \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = E \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) \, dl. \quad (1,9)$$

Из полученного выражения непосредственно следует, что

$$-\frac{dU}{dl} = E \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}), \quad (1,10)$$

т. е. что производная от потенциала по направлению \mathbf{l} , взятая со знаком минус, равна проекции вектора напряженности поля на это направление.

Мы еще вернемся к анализу полученных здесь соотношений в гл. 2, там же будет показано, какое значение они имеют для изучения электрического поля. Здесь существенно отметить только то, что из уравнения (1,10), могущего служить определением понятия потенциала, наглядно видно, что произвольная постоянная, которая может быть прибавлена к значению потенциала, не играет роли при определении напряженности поля, так как

$$\frac{d(U + \text{const})}{dl} = \frac{dU}{dl}.$$

1,3. Плотность тока

Плотностью тока j называется количество электричества, проходящее в 1 сек. через единицу площади поперечного сечения проводника².

В длинных проводах с постоянным по всей длине сечением S ток I распределяется равномерно по всему сечению проводника. В этом случае

$$j = \frac{I}{S}. \quad (1,11)$$

¹ В частности, значение $\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$ может быть названо напряжением обхода.

² Поперечным называется сечение проводника, перпендикулярное направлению движения зарядов.

Если сечение проводника выражено в см^2 , то $j = \text{А}/\text{см}^2$.

В технических расчетах принято, однако, выражать сечение проводов в мм^2 . Поэтому плотность тока обычно выражается в $\text{А}/\text{мм}^2$.

Пример 1, 2. Через провод сечением $2,5 \text{ мм}^2$ проходит в течение минуты заряд в 120 С . Определить плотность тока.

В данном случае

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{120 \text{ С}}{60 \text{ сек.}} = 2 \text{ А};$$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{2 \text{ А}}{2,5 \text{ мм}^2} = 0,8 \text{ А}/\text{мм}^2.$$

Если проводник неоднороден, а составлен, например, из медных и стальных проволок, скрученных между собой, или представляет собой ванну с электролитом, в который опущены произвольной формы электроды, то ток распределяется по сечению проводника неравномерно. В этом случае плотностью тока в какой-нибудь точке мы будем называть предел отношения тока ΔI , проходящего через площадку ΔS , к величине этой площадки при ΔS , стремящемся к нулю. Площадка ΔS предполагается при этом проходящей через данную точку перпендикулярно вектору напряженности поля в этой точке. Итак,

$$j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS},$$

откуда

$$dI = j \cdot dS. \quad (1, 12)$$

Чтобы плотность тока выражала не только интенсивность движения зарядов в данной точке, но и направление этого движения, понятию „плотность тока“ придается векторный характер. Вектор плотности тока j равен по величине $\frac{dI}{dS}$ и совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля в данной точке. (Это же направление является направлением движения положительных зарядов; отрицательные заряды движутся в противоположном направлении.)

Если площадка dS не перпендикулярна к направлению поля в данной точке, то проходящий через нее ток dI может быть выражен как скалярное произведение

$$dI = j dS, \quad (1, 13)$$

где dS — вектор, численно равный по величине площадке dS и направленный по нормали к ней.

Чтобы вычислить ток, проходящий через площадку конечных размеров (или часть криволинейной поверхности) S , надо просуммировать элементарные токи dI по всей этой площадке, т. е.

$$I = \int_S j dS, \quad (1, 14)$$

где \int_S обозначает определенный интеграл, распространяющийся на всю площадь (или поверхность) S . Стоящий в правой части уравнения (1, 14) „поверхностный интеграл“ вектора называется потоком этого вектора. Таким образом ток I всегда можно рассматривать как поток вектора плотности тока j через соответствующую поверхность S . Название поток в данном случае вполне понятно, так как этим понятием выражается количество электричества, протекающее в секунду через поверхность S . Однако этот термин по аналогии применяется к поверхностному интегралу и таких векторов, которые никакого движения собой не выражают.

В дальнейшем мы встретимся, например, с потоком вектора напряженности поля $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. Следует заметить, что поток всякого вектора является скалярной величиной.

1,4. Закон Ома

Как мы уже видели, причиной тока во всяком проводнике является электрическое поле, которое приводит в упорядоченное движение ионы или электроны. (В дальнейшем мы будем и те и другие называть просто зарядами.)

При неизменном поле действующая на заряд сила будет постоянна. Под действием этой силы заряд начинает двигаться равномерно ускоренно и постепенно приобретает некоторый запас кинетической энергии. Однако длина свободного пробега заряда очень невелика (порядка 10^{-7} см).

Он сталкивается с находящимися на его пути молекулами, ионами или электронами и отдает при столкновении приобретенную им кинетическую энергию. В результате таких столкновений кинетическая энергия молекулярного движения увеличивается, проводник нагревается.

Когда какое-нибудь тело под действием постоянной силы двигается с трением в той или иной среде, то с увеличением его скорости увеличивается и сила трения. Скорость движения будет поэтому увеличиваться лишь до тех пор, пока сила трения не сделается равной силе, действующей на тело.

В дальнейшем установится равномерное движение, скорость которого зависит от величины действующей силы. Если сила трения пропорциональна скорости тела (как это можно принять при малых скоростях), то скорость установившегося движения пропорциональна действующей силе. Нечто подобное имеет место и при прохождении тока по проводнику. Число столкновений движущегося заряда с молекулами и ионами проводника можно считать пропорциональным средней скорости заряда. Поэтому среднее движение ионов или электронов, которое устанавливается в проводнике под действием постоянного электрического поля, оказывается не равномерно ускоренным, а равномерным, а его средняя скорость — пропорциональной напряженности электрического поля.

(Величина этой средней скорости очень невелика, она не превышает 0,5 mm/sec.)

С другой стороны, чем больше средняя скорость ионов или электронов, тем большее количество электричества пройдет за 1 сек. через одну и ту же площадку, следовательно, тем больше будет плотность тока. Но по предыдущему скорость электронов пропорциональна напряженности поля, следовательно, и плотность тока в какой-либо точке проводника оказывается пропорциональной напряженности электрического поля, с которой она совпадает и по направлению, т. е.

$$j = \gamma \cdot E, \quad (1,15)$$

где γ — коэффициент пропорциональности, имеющий одно и то же значение для всех точек проводника и зависящий от его материала; этот коэффициент называется удельной электропроводностью материала.

Уравнение (1,15) называется законом Ома в дифференциальной форме, так как входящая в него плотность тока по своей абсолютной величине может быть заменена производной $\frac{dI}{dS}$. Это уравнение представляет собой наиболее общее выражение зависимости между током и электрическим полем в проводнике. Подставляя это выражение плотности тока

в уравнение (1, 14), получим

$$I = \int_S \gamma \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad \text{или} \quad I = \gamma \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad (1, 16)$$

т. е. ток через поверхность S равен произведению удельной электропроводности на поток вектора напряженности поля через эту поверхность.

Для линейных проводников, поле в которых однородно, это соотношение может быть упрощено. Так как согласно (1, 11) во всех точках проводника

$$E = \frac{U}{l}$$

и направлено параллельно его оси, то для перпендикулярного этой оси сечения S

$$I = \gamma \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \gamma E \int_S d\mathbf{S} = \gamma \frac{U}{l} \cdot S,$$

а напряжение, которое надо приложить между концами проводника, чтобы создать в нем ток I ,

$$U = I \cdot \frac{l}{\gamma S}.$$

Выражение $\frac{l}{\gamma S}$ является для данного проводника постоянной величиной. Оно называется сопротивлением проводника и обозначается буквой R .

Таким образом

$$U = IR,$$

или

$$I = \frac{U}{R} \quad (1, 17)$$

Это — наиболее обычная форма закона Ома. Для линейных проводников (проводов)

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S}. \quad (1, 18)$$

Обратная величина сопротивления

$$g = \frac{1}{R} \quad (1, 19)$$

называется проводимостью проводника. С помощью ее уравнению (1, 11) можно придать вид

$$I = U \cdot g. \quad (1, 20)$$

Для линейных проводников согласно (1, 18) и (1, 19)

$$g = \frac{\gamma \cdot S}{l}. \quad (1, 21)$$

Сопротивление проводника, в котором напряжение $U = 1 \text{ В}$ вызывает ток $I = 1 \text{ А}$, принято за единицу сопротивления и называется омом (Ω).

Сопротивлением в 1Ω обладает столбик ртути при $t = 0^\circ \text{ С}$, если его длина $106,3 \text{ см}$ и масса $14,4521 \text{ г}$ (это соответствует сечению 1 мм^2)¹.

Проводник с сопротивлением $R = 1 \Omega$ имеет и проводимость, равную единице. Единица проводимости — сименс (С), очевидно,

$$1 \text{ С} = \frac{1}{1 \Omega} = 1 \Omega^{-1}.$$

¹ См. также 3,33.

1.5. Удельная электропроводность и удельное сопротивление

В предыдущем параграфе мы выразили сопротивление линейного проводника формулой

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S}.$$

Введя обозначение $\rho = \frac{1}{\gamma}$, получим

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (1, 22)$$

Чтобы выявить физический смысл коэффициента ρ , положим в уравнении (1, 22) $l = 1$ см и $S = 1$ см².

Получим

$$R = \rho \frac{1}{\text{см}}.$$

Следовательно, ρ численно равно сопротивлению провода длиной 1 см и сечением 1 см²; эта величина характеризует электрические свойства вещества, из которого состоит провод, и называется его удельным сопротивлением.

Единица удельного сопротивления

$$[\rho] = \frac{[R] \cdot [S]}{[l]} = \frac{\Omega \cdot \text{см}^2}{\text{см}} = \Omega \cdot \text{см},$$

а размерность удельной электропроводности

$$[\gamma] = \frac{1}{[\rho]} = \frac{1}{\Omega \cdot \text{см}} = \text{S}/\text{см}.$$

Для технических расчетов удобнее при определении удельного сопротивления и удельной электропроводности брать в качестве единицы длины не сантиметр, а метр, в качестве единицы площади — не квадратный сантиметр, а квадратный миллиметр. Тогда

$$R = \rho_1 \frac{l_m}{S_{\text{мм}^2}} = \frac{l_m}{\gamma_1 \cdot S_{\text{мм}^2}}, \quad (1, 23)$$

где ρ_1 численно равно сопротивлению провода длиной 1 м и сечением 1 мм², а γ_1 — проводимости такого же провода.

Вычислим ρ_1 по формуле (1, 22), полагая в ней $l = 100$ см и $S = 0,01$ см²:

$$\rho_1 = \rho \frac{100}{0,01} = \rho \cdot 10^4,$$

откуда

$$\gamma_1 = \gamma \cdot 10^{-4}.$$

Из уравнений (1, 23) находим размерность этих новых величин:

$$[\rho_1] = \Omega \cdot \text{мм}^2/\text{м}$$

и

$$[\gamma_1] = \text{S} \cdot \text{м}/\text{мм}^2.$$

Значения удельных сопротивлений и электропроводностей для ряда веществ приведены в табл. 1.

Как видно из этой таблицы, наибольшей удельной проводимостью и, следовательно, наименьшим сопротивлением обладают серебро, медь, золото и алюминий. Так как серебро и золото слишком дороги, то для изготовления электрических проводов применяются почти исключительно медь и алюминий. Значительно реже употребляются железные провода,

ТАБЛИЦА 1

Вещество	Плотность (удельный вес)	Удельная электро- проводность при 20° С в S · м/мм ²	Удельное сопро- тивление при 20° С в Ω · мм ² /м ¹
Алюминий	2,7	34	0,0294
Вольфрам	19,1	20	0,05
Железо	7,8	10	0,1
Золото	19,3	45	0,0222
Медь	8,9	57	0,0175
Молибден	10,2	23	0,0435
Олово	7,3	8	0,125
Платина	21,4	10	0,1
Ртуть	13,6	1,05	0,95
Свинец	11,4	5	0,2
Серебро	10,5	61	0,0164
Уголь ретортный	1,9	0,01—0,08	100—12,5

Пример 1,3. Найти сопротивление алюминиевого провода длиной 5 км и сечением 25 мм².

По формуле (1,17) находим, подставляя $l = 5000$ м,

$$R = \frac{5000}{34 \cdot 25} = 5,88 \text{ Ω.}$$

1,6. Зависимость сопротивления от температуры

С увеличением температуры металлического проводника усиливается тепловое (беспорядочное) движение его молекул, ионов и свободных электронов. В силу этого электроны, перемещающиеся под действием приложенного к концам проводника напряжения, начинают чаще сталкиваться с молекулами и ионами металла, средняя длина свободного пробега электрона уменьшается, и в результате средняя скорость перемещения электронов, а следовательно, и ток в проводнике уменьшаются. Уменьшение тока при неизменном напряжении обозначает увеличение сопротивления проводника.

В первом приближении для сравнительно небольших изменений температуры можно считать приращение сопротивления пропорциональным приращению температуры, т. е.

$$R_{t_1} = R_t [1 + \alpha (t_1 - t)], \quad (1, 24)$$

где R_t — сопротивление проводника при температуре t ;

R_{t_1} — сопротивление того же проводника при температуре t_1 ;

α — температурный коэффициент, т. е. величина, показывающая, на какую долю увеличивается сопротивление проводника при увеличении температуры его на 1° С.

Температурный коэффициент металлов положителен. Уголь и электролиты имеют отрицательный температурный коэффициент, т. е. сопро-

¹ Если нужно перейти к выражению удельного сопротивления (удельной проводимости) в Ω · см (в S/см), достаточно выразить мм и м, входящие в выражение единицы, через см. Так, имея в виду, что 1 мм = 0,1 см и 1 м = 100 см, непосредственно получаем, например, для меди

$$\rho = 0,0175 \frac{\Omega \cdot \text{мм}^2}{\text{м}} = 0,0175 \frac{\Omega (0,1 \text{ см})^2}{100 \text{ см}} = 0,0175 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{см.}$$

тивление угля и электролитов уменьшается с увеличением температуры. Для всех металлов (химически свободных от примесей) температурный коэффициент составляет от 0,0036 до 0,0043. Для меди $\alpha = 0,004$. Сплавы обычно обладают более высоким сопротивлением, чем чистые металлы, но имеют более низкий температурный коэффициент.

Так, для никелина, представляющего собой сплав меди, никеля и цинка (54Cu, 26Ni, 20Zn) $\alpha = 0,0002$; для нейзильбера (60Cu, 21Ni, 19Zn) $\alpha = 0,00037$; для манганина (84Cu, 4Ni, 12Mn) $\alpha = 0,00002$; для константана (58Cu, 41Ni, 1Mn) $\alpha = 0,00003$.

Сплавы с очень малым α обычно служат для изготовления образцовых сопротивлений.

При необходимости более точного подсчета сопротивления при различных температурах следует пользоваться формулой

$$R_t = R_t [1 + \alpha (t_1 - t) + \beta (t_1 - t)^2],$$

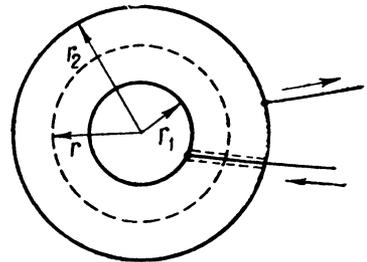
где α и β — коэффициенты, определяемые для каждого вещества опытным путем.

Но и эта формула применима только для ограниченного интервала температур и пользоваться ею для очень высоких или очень низких температур нельзя.

Сопротивление проводников помимо температуры зависит иногда и от других физических условий. Так, для некоторых веществ оно зависит от освещения (селен), от давления, от влияния магнитного поля и других факторов.

1,7. Электрическое поле и ток между concentрическими шаровыми электродами

Рассмотрим случай, когда электрический ток проходит по проводящей среде, разделяющей два электрода, расположенных один внутри другого в виде concentрических шаров с радиусами r_1 и r_2 (фиг. 1,4). Источник тока поддерживает между электродами напряжение U и в цепи устанавливается ток I . Если внутри проводящей среды выделить шаровую поверхность, расположенную concentрично электродам и имеющую произвольный радиус r , то по соображениям симметрии можно не сомневаться в том, что во всех точках этой поверхности плотность тока, а следовательно, и напряженность электрического поля, будут: 1) иметь одинаковую величину и 2) совпадать по направлению с радиусом, проходящим через эту точку. В силу этого



Фиг. 1,4.

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_S j dS = j \int_S dS = j4\pi r^2,$$

а так как

$$j = \gamma E,$$

то

$$I = \gamma E \cdot 4\pi r^2,$$

откуда

$$E = \frac{I}{\gamma 4\pi r^2}. \tag{1,25}$$

Таким образом напряженность поля оказывается обратно пропорциональной квадрату радиуса сферической поверхности, проходящей через данную точку, или, иначе говоря, обратно пропорциональной величине этой поверхности. Наибольшую величину напряженность поля имеет вблизи внутреннего электрода.

Так как, далее, согласно (1,4) напряжение между электродами

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr,$$

то, подставляя вместо E выражение (1,25), получим

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I \cdot dr}{\gamma \cdot 4\pi r^2} = \frac{I}{4\pi\gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1,26)$$

Таким образом и в этом случае ток оказывается пропорциональным приложенному напряжению и по закону Ома нетрудно найти сопротивление проводника

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1,27)$$

Пример 1,4. Пространство между двумя концентрическими медными шариками диаметром 1 и 50 мм заполнено спрессованным угольным порошком с удельной электропроводностью $\gamma = 0,02 \frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{мм}^2}$. Определить сопротивление угольного порошка.

Подставляя наши данные в (1,27), получаем, что

$$R = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi \cdot 0,02 \text{ S} \cdot \text{m}/\text{мм}^2} \left(\frac{1}{0,5 \text{ мм}} - \frac{1}{25 \text{ мм}} \right) = 7,8 \text{ }\Omega \text{ мм}/\text{м}.$$

Имея в виду, что 1 мм = 0,001 м, находим

$$R = 7,8 \text{ }\Omega \frac{0,001 \text{ м}}{\text{м}} = 0,0078 \text{ }\Omega.$$

1,8. Шаровой электрод в неограниченной среде

При безграничном увеличении радиуса внешнего электрода сопротивление разделяющей электроды среды не растет до бесконечности, а стремится к определенному пределу, который легко найти, подставляя в формуле (1,27) $r_2 = \infty$. Это дает для шарового электрода в неограниченной проводящей среде

$$R_1 = \frac{1}{4\pi\gamma r_1}. \quad (1,28)$$

Этой формулой можно пользоваться, как приближенной и в том случае, когда r_2 , хотя и не бесконечно, но все же весьма велико по сравнению с r_1 .

Рассмотрим еще случай, когда полушаровой электрод погружен в проводящую среду (например, землю), так что его плоская поверхность совпадает с поверхностью среды. Электрод как бы вдавлен в поверхность этой среды. Так как в этом случае на любом расстоянии от электрода ток проходит через вдвое меньшую поверхность, чем в предыдущем случае, то при одинаковом токе плотность тока, а с нею и напряженность электрического поля будут вдвое больше. Поэтому для

напряжения между двумя сферами с радиусами r_1 и r_2 вместо (1, 26) мы получим новое выражение:

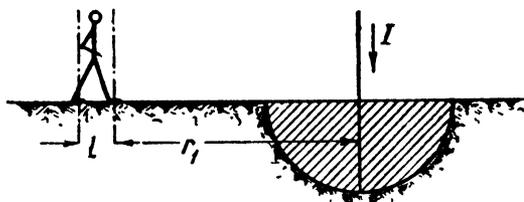
$$U = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}. \quad (1, 29)$$

Если к такому электроду подходит человек (фиг. 1,5), то напряжение между ступнями его ног, или так называемое напряжение шага, может быть определено по (1, 29), если в нем положить $r_2 = r_1 + l$, где l — длина шага.

Таким образом шаговое напряжение

$$U_{ш} = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{r_1}^{r_1+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+l} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \frac{l}{r_1(r_1+l)} \quad (1, 30)$$

будет тем больше, чем больше длина шага l и ток I и чем меньше электропроводность почвы γ и расстояние от электрода r_1 . Наибольшее значение напряжения шага имеет непосредственно около электрода. При достаточно сильном токе это напряжение может оказаться смертельным. Это показывает, насколько важно, чтобы заземления на установках высокого напряжения были правильно рассчитаны и устроены.



Фиг. 1,5.

В противном случае может оказаться опасным подходить, например, к опорам воздушных линий электропередачи, когда вследствие случайного соединения одного из проводов с самой мачтой по мачте будет проходить значительный ток.

Пример 1,5. Определить наибольшее напряжение шага при $I = 120$ А, $l = 80$ см, $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$ S/cm и при ширине фундамента опоры 200 см (принимая фундамент за полусферу с радиусом 100 см).

По формуле (1, 24) находим

$$U_{ш} = \frac{120 \text{ А} \cdot 80 \text{ см}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ S/cm} \cdot 100 \text{ см} (100 + 80) \text{ см}} = 423 \text{ В},$$

напряжение — безусловно опасное, и должны быть приняты меры по расширению заземления опоры.

1,9. Два шаровых электрода на большом расстоянии

Если два шаровых электрода с радиусами r_1 и r_2 находятся друг от друга на расстоянии $a > 200 (r_1 + r_2)$, то можно считать (с ошибкой, не превышающей 0,5%), что каждый из электродов как бы находится в безграничной среде¹. В этом предположении по (1, 29), беря интеграл напряженности поля от поверхности первого электрода до середины между центрами электродов, находим, что

$$U_1 = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{r_1}^{\frac{a}{2}} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{a} \right) \approx \frac{I}{4\pi\gamma r_1}.$$

¹ См. 1,8.

Эта величина выражает напряжение между поверхностью первого электрода и точкой земли, удаленной от обоих электродов.

Беря затем второй интеграл в пределах от точки, удаленной на $\frac{a}{2}$ от обоих электродов, до поверхности второго электрода (считая теперь расстояние r от центра второго электрода), находим, что

$$U_2 = \frac{-I}{2\pi\gamma} \int_{\frac{a}{2}}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{-I}{4\pi\gamma} \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{r^2} \right) \approx \frac{+I}{4\pi\gamma r_2}.$$

В этом выражении перед током стоит знак — (минус), так как мы предположили, что ток течет от первого электрода ко второму, а уравнение (1, 30) получено в предположении, что ток течет от рассматриваемого электрода.

Эта величина выражает напряжение между точкой земли, удаленной от обоих электродов, и поверхностью второго электрода. Чтобы получить общее напряжение между электродами, нужно сложить U_1 и U_2 . (Это равносильно тому, что наш интеграл $\int \mathbf{E} d\mathbf{l}$ взят по всему пути от поверхности первого до поверхности второго электрода.)

Очевидно, что

$$U = U_1 + U_2 = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

откуда их общее сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1, 31)$$

или при $r_2 = r_1$

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma r_1}.$$

Это сопротивление вдвое больше сопротивления одного шарового электрода в неограниченной среде и не зависит от расстояния между электродами (если это расстояние велико по сравнению с радиусами электродов).

1, 10. Энергия и мощность тока

По самому определению понятия напряжения (см. § 1, 1 и 1, 2) работа A , затрачиваемая на перенесение количества электричества Q из одной точки в другую,

$$A = QU, \quad (1, 32)$$

где U — напряжение между соответствующими точками.

С таким же перемещением электричества мы и имеем дело при протекании тока по проводнику.

Рассмотрим два сечения проводника (фиг. 1, 6), между которыми существует напряжение U . Когда по проводнику протекает ток I , это значит, что через любое поперечное сечение проводника проходит за время dt элементарное количество электричества $dQ = I dt$.

Такое же количество электричества входит внутрь отрезка проводника, заключенного между двумя рассматриваемыми сечениями, через одно из них и выходит — через другое. В энергетическом отношении этот процесс совершенно эквивалентен тому, что заряд dQ перенесен от первого

сечения ко второму. Следовательно, работа, произведенная электрическим полем, при этом должна быть равна

$$dA = U dQ = UI dt. \quad (1, 33)$$

Отношение произведенной работы dA и времени dt , в течение которого эта работа была произведена, равно мощности. Поэтому мощность электрического тока

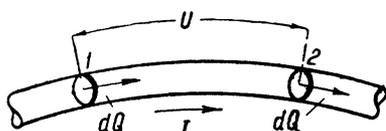
$$P = \frac{dA}{dt} = UI. \quad (1, 34)$$

В том случае, если ток и напряжение постоянны и проводник, по которому проходит ток, неподвижен, вся затраченная работа идет на нагревание проводника.

Заменяя в выражениях (1, 33) и (1, 34) напряжение произведением тока на сопротивление (закон Ома), мы получим, что

$$dA = IRI dt = I^2 R dt; \quad (1, 35)$$

$$P = IRI = I^2 R. \quad (1, 36)$$



Фиг. 1.6.

Последние два уравнения, выведенные чисто аналитическим путем из более общих законов, первоначально были получены как результат наблюдений Джоулем и независимо от него Ленцем. Поэтому эти уравнения обычно называют выражениями закона Джоуля-Ленца.

Как ясно из предыдущего изложения, величина энергии по выведенным формулам выражается в джоулях, если ток, напряжение и сопротивление и время выражать в А, В, Ω и сек.¹

Для того чтобы количество энергии было выражено в калориях (граммкалориях) при сохранении остальных единиц неизменными, правые части уравнений (1, 36) и (1, 35) должны быть умножены на 0,24 cal/J.

Что касается мощности, она по уравнениям (1, 34) и (1, 36) получается выраженной в J/сек. Эта единица мощности J/сек имеет свое собственное название — ватт (W).

Кроме ватта в электротехнике пользуются десятичными кратными этой единицы: гектоватт (1 hW = 100 W), киловатт (1 kW = 10³ W), мегаватт (1 MW = 10⁶ W).

Часто можно встретить в качестве единицы энергии вместо джоуля единицу, определяемую как произведение ватта (или hW, kW и MW) не на секунду, а на час:

так как

$$1 \text{ W} \cdot \text{sec} = 1 \text{ J},$$

$$1 \text{ Wh (ваттчас)} = 3600 \text{ J};$$

$$1 \text{ hWh (гектоваттчас)} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J и т. д.}$$

От приведенного выше выражения

$$P = I^2 R = IU$$

легко перейти к дифференциальной формулировке закона Джоуля, которой приходится пользоваться при неравномерной плотности тока, неоднородном удельном сопротивлении проводника и т. п.

¹ См. также 3,33.

Если проводник однороден и плотность тока во всех точках проводника одинакова, выделение тепла происходит равномерно по всему его объему.

Мощность, выделяющаяся на единицу объема проводника, может быть при этом определена как отношение

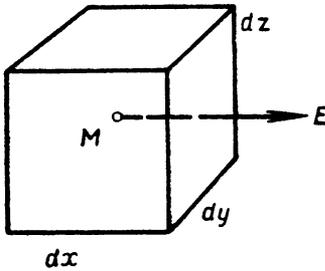
$$P_0 = \frac{P}{V}, \quad (1,37)$$

где V — объем проводника, в котором помещается (выделяется в форме тепла) мощность P . Мощность на единицу объема P_0 можно назвать удельной мощностью, или плотностью мощности.

Когда выделение тепла происходит неравномерно по объему проводника (вследствие неоднородности его или различной плотности тока в разных точках), значение P_0 для любой данной точки может быть определено как предел отношения $\frac{P}{V}$ при V , стремящемся к нулю, т. е.

$$P_0 = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{P}{V} = \frac{dP}{dV}. \quad (1,38)$$

Выделим мысленно около произвольной точки M внутри проводника кубик со сторонами dx , dy , dz (фиг. 1,7) так, чтобы сторона dx была параллельна вектору напряженности поля E в точке M , а грань $dS = dy dz$ перпендикулярна ему.



Фиг. 1,7.

Так как размеры кубика бесконечно малы, то можно считать кубик однородным, а напряженность поля и плотность тока одинаковыми для всех его точек.

Ток через грань $dS = dy dz$

$$dI = j dS = j dy dz,$$

так как плотность тока j , совпадающая по направлению с вектором напряженности поля, перпендикулярна dS .

Напряжение между гранями, перпендикулярными dx , равно $dU = E dx$.

Следовательно, мощность, выделяемая в элементарном объеме $dV = dx dy dz$, равна

$$dP = dU dI = E dx j dy dz = E j dV,$$

а плотность выделяемой мощности (в W/cm^3)

$$P_0 = \frac{dP}{dV} = \frac{E j dV}{dV} = E j. \quad (1,39)$$

Так как согласно (1,9)

$$j = \gamma E, \text{ или } E = \frac{1}{\gamma} j = \rho j,$$

то, подставляя это выражение для E в (1,39), получим

$$P_0 = j^2 \rho \quad (1,40)$$

или, имея в виду, что $1 W = 0,24 \text{ cal/sec}$,

$$Q_0 = 0,24 j^2 \rho t, \quad (1,41)$$

где Q_0 — количество тепла, выделяемое за одну секунду на единицу объема.

Это — наиболее общее выражение закона Джоуля-Ленца. Энергия, выделенная за время t в элементарном объеме dV ,

$$dA = t \cdot dP = A_0 dV = j^2 \rho t dV,$$

а эквивалентное количество тепла

$$dQ = 0,24 j^2 \rho t dV.$$

Чтобы получить энергию A , выделившуюся во всем проводнике, нужно просуммировать количества энергии, выделившейся во всех элементах объема проводника:

$$A = \int_V j^2 \rho t dV = t \int_V j^2 \rho dV \quad (1,42)$$

или

$$Q = 0,24 t \int_V j^2 \rho dV. \quad (1,43)$$

Так же точно может быть найдена и мощность P , выделяемая в объеме V :

$$P = \int_V j^2 \rho dt. \quad (1,44)$$

Индекс V указывает при этом, что интегрирование распространяется на весь объем проводника.

Если проводник однороден, т. е. $\rho = \text{const}$ для всех его точек и сечение проводника всюду одинаково, то и плотность тока будет во всех точках одинакова, т. е. $j = \text{const}$, и следовательно, $j^2 \rho$ можно вынести за знак интеграла. Тогда уравнение (1,41) примет вид

$$A = t j^2 \rho \int_V dV = t j^2 \rho V.$$

Но $V = S \cdot l$, где S — поперечное сечение проводника, а l — его длина.

Поэтому

$$A = j^2 \rho S l t = (jS)^2 \frac{\rho l}{S} t.$$

Так как

$$jS = I, \quad \text{а} \quad \frac{\rho l}{S} = R,$$

то

$$A = I^2 R t \quad (1,45)$$

или

$$Q = 0,24 I^2 R t. \quad (1,46)$$

Это — обычное выражение закона Джоуля-Ленца, выведенное в начале этого параграфа.

1,11. Нагревание проводов

Теплота, выделяемая в проводах электрическим током, вызывает повышение их температуры. На этом свойстве тока основано устройство ламп накаливания (тонкая проволока, обладающая большим сопротивлением, накаляется при протекании по ней тока), нагревательных приборов и печей и, наконец, плавких предохранителей (когда ток достигает опас-

ного для данной установки значения, цепь тока прерывается вследствие расплавления тонких проволок — плавких вставок, — которыми в определенных участках заменены нормальные провода). В то же время нагревание проводов, по которым подводится электрический ток, не должно быть слишком сильным: высокая температура может повести к порче изоляции проводов, ослаблению ее электрической прочности, повышению утечки тока через изоляцию и, наконец, к короткому замыканию. Для разных классов изолирующих материалов предельно допустимые температуры перегрева указываются соответствующими нормами и стандартами.

Рассмотрим здесь зависимость между плотностью тока в проводе и его температурой. Когда температура провода становится выше температуры окружающей среды, он начинает отдавать ей тепло. Количество тепла, отдаваемое единицей поверхности провода в единицу времени, можно при небольших разностях температур между проводом и окружающей средой считать пропорциональным этой разности температур. Повышение температуры провода прекращается, когда количество тепла, отдаваемое проводом в единицу времени, станет равным количеству тепла, выделяемого за тот же промежуток времени внутри провода.

Количество тепла Q , которое провод отдает окружающей среде за время t , если температура его на ϑ градусов выше температуры окружающей среды, выразится уравнением

$$Q = kS\vartheta t,$$

где S — поверхность охлаждения, а k — коэффициент теплоотдачи, равный количеству тепла, отдаваемого в 1 сек. единицей поверхности при разности температур в 1°C .

Количество тепла, выделяемое током за то же время, согласно закону Джоуля-Ленца

$$Q = 0,24 j^2 \rho V t,$$

где V — объем провода.

При установившейся температуре провода оба количества тепла должны быть равны, т. е.

$$0,24 j^2 \rho V t = kS\vartheta t,$$

откуда

$$j = \sqrt{\frac{k\vartheta}{0,24\rho} \cdot \frac{S}{V}}. \quad (1,47)$$

Если провод имеет круглое сечение с диаметром d и длина провода равна l , то

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l, \quad \text{а} \quad S = \pi d \cdot l.$$

Подставляя эти значения в (1,47), получим

$$j = \sqrt{\frac{k\vartheta}{0,24\rho} \cdot \frac{\pi d l}{\pi \frac{d^2 l}{4}}} = \sqrt{\frac{k\vartheta}{0,06\rho} \cdot \frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{k}{0,06\rho}} \cdot \frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{d}}. \quad (1,48)$$

Следовательно, допустимая плотность тока в проводе при заданном допустимом повышении его температуры обратно пропорциональна квадратному корню из диаметра провода. Поэтому в тонких проводах допускается большая плотность тока, чем в толстых: с увеличением сечения провода (при неизменной длине) объем его пропорционален квадрату диаметра, т. е. растет быстрее, чем боковая поверхность, пропорциональная первой степени диаметра. Важно отметить еще и то, что при данных размерах

проводника и допустимом повышении температуры допустимая плотность тока обратно пропорциональна удельному сопротивлению проводника.

Пример 1,6. В определенных условиях допускаемая нагрузка изолированного медного провода сечением 4 mm^2 равна 25 A . Найти допустимую нагрузку изолированного медного провода сечением 25 mm^2 , находящегося в тех же условиях. Допускаемая плотность тока в проводе сечением 4 mm^2

$$j_1 = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ A/mm}^2.$$

Так как согласно (1,42) допустимые плотности тока в проводах обратно пропорциональны квадратному корню из их диаметров, то

$$\frac{j_2}{j_1} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}},$$

откуда

$$j_2 = j_1 \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}.$$

При $S_1 = 4 \text{ mm}^2$ $d_1 = 2,26 \text{ mm}$, а при $S_2 = 25 \text{ mm}^2$ $d_2 = 5,66 \text{ mm}$. Подставляя эти значения, получим

$$j_2 = 6,25 \sqrt{\frac{2,26}{5,66}} = 6,25 \cdot 0,635 = 4 \text{ A/mm}^2.$$

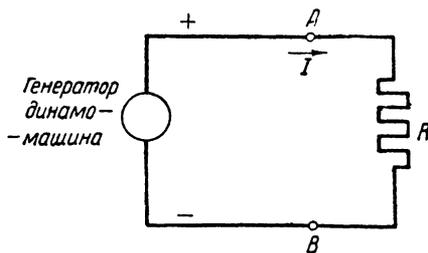
Допускаемая нагрузка провода сечением 25 mm^2

$$I_2 = j_2 S_2 = 4 \cdot 25 = 100 \text{ A}.$$

1,12. Закон Ома для замкнутой цепи

Рассмотрим какой-либо источник тока — генератор, к зажимам A и B которого (фиг. 1,8) присоединен проводник с сопротивлением R . Источник тока также обладает сопротивлением R_0 , которое называется его внутренним сопротивлением (в динамомашине — сопротивление ее проводов, в гальваническом элементе или аккумуляторе — сопротивление электролита). При установившемся движении электрических зарядов ток I во всех частях цепи должен быть одинаков. Действительно, если бы ток, проходящий через сечение цепи в точке A , был больше, чем ток, проходящий через сечение в точке B , то на участке AB при длительном токе происходило бы непрерывное накопление заряда, электрическое поле все время изменялось бы, и процесс нельзя было бы считать установившимся.

Энергия, поступающая в цепь от источника тока, превращается в ней в тепло. В самом источнике происходит преобразование того или иного вида энергии в энергию, передаваемую электрическим током. Так, в гальванических элементах или аккумуляторах в энергию, передаваемую током, превращается химическая энергия. В динамомашине¹ и термоэлементах энергия электрического тока получается за счет подводимой извне энергии: механической — в динамомашине и тепловой — в термоэлементах.



Фиг. 1,8.

¹ Принцип их устройства будет рассмотрен в гл. 3.

Напряжение, которое создается в генераторе (в источнике тока), называют его электродвижущей силой, понимая под этим причину, создающую ток (т. е. движение электричества) при наличии замкнутого контура. Ни о какой силе в физическом смысле этого слова здесь нет речи.

Величину электродвижущей силы (сокращенно — э. д. с.) генератора можно характеризовать напряжением на зажимах генератора, когда в цепи генератора нет тока (цепь разомкнута). Когда же генератор нагружен (цепь генератора замкнута и через генератор протекает ток), напряжение на его зажимах равно произведению IR , где I — установившийся постоянный ток, а R — сопротивление внешней цепи. Это напряжение составляет лишь ту часть э. д. с., которая расходуется на преодоление сопротивления внешней цепи. Другая часть э. д. с. тратится на преодоление внутреннего сопротивления генератора IR_0 .

Электродвижущая сила генератора равна сумме $IR + IR_0$.

Первый член суммы равен напряжению на зажимах генератора $U = IR$, и выражение для э. д. с. может быть написано так:

$$e = IR + IR_0 = U + IR_0. \quad (1, 49)$$

Буква e — принятое обозначение э. д. с. ¹.

Второй член этой суммы носит название внутренней потери напряжения. Смысл этого названия легко объясняется тем, что

$$U = e - IR_0. \quad (1, 50)$$

Как это видно из уравнения (1, 49), напряжение на зажимах генератора меньше его э. д. с. на величину внутренней потери напряжения.

Как видно из уравнений (1, 49) и (1, 50), напряжение на его зажимах U равно его э. д. с., так как при этом $I = 0$.

Из уравнения (1, 49) легко установить связь между током, полным сопротивлением цепи ($R + R_0$) и э. д. с.:

$$I = \frac{e}{R + R_0}. \quad (1, 51)$$

Это есть выражение закона Ома для замкнутой цепи.

Из анализа закона Ома в его дифференциальной и интегральной формулировке мы знаем, что при установившемся постоянном токе линейный интеграл напряженности поля, взятый между двумя сечениями проводника, $\int_1^2 \mathbf{E} ds$ равен произведению из тока, текущего по проводнику I , на сопротивление проводника R , т. е. что

$$\int_1^2 \mathbf{E} ds = IR. \quad (1, 52)$$

Беря интеграл от напряженности поля по замкнутому контуру, образованному источником тока, замкнутым на внешнюю цепь, мы должны получить

$$\oint \mathbf{E} ds = IR + IR_0,$$

¹ В тех случаях, когда э. д. с. и напряженность электрического поля не рассматриваются одновременно, э. д. с. можно обозначать буквой E .

иначе говоря, этот интеграл равен э. д. с., действующей в данном контуре:

$$\oint \mathbf{E} ds = e. \quad (1, 53)$$

Это выражение является наиболее общим определением понятия э. д. с.

Мы уже говорили, что в электрических полях, где $\oint \mathbf{E} ds \neq 0$, напряжение между двумя точками 1 и 2 не может быть однозначно определено как $\int_1^2 \mathbf{E} ds$, если не указан путь, по которому производится интеграция.

В самом деле, беря линейный интеграл от напряженности поля между зажимами генератора, мы получим значение

$$\int_1^2 \mathbf{E} ds = U = IR,$$

если изберем в качестве пути интеграции внешнюю цепь, и

$$\int_1^2 \mathbf{E} ds = -IR_0,$$

если в качестве пути интеграции изберем внутреннюю цепь генератора. Эти два значения, конечно, не будут равны друг другу. Это особенно наглядно выступает, если взять ненагруженный генератор. При этом первый интеграл нам даст значение э. д. с., второй же интеграл будет равен нулю: при разомкнутой внешней цепи внутри проводников напряженность поля должна быть равна нулю (так как ток равен нулю)¹.

Мы уже говорили, что напряжение на зажимах генератора $U = IR = e - IR_0$, поэтому, для того чтобы получить однозначный результат при определении напряжения, мы должны считать, что при прохождении через источник э. д. с. напряжение меняется на величину $e + \int_1^2 \mathbf{E} ds = e - IR_0$.

Условившись в этом, можно (условно) говорить, как и в случае электростатических полей, о потенциалах, хотя в данном случае не во всех областях поля $\oint \mathbf{E} ds = 0$.

Внутри источника (генератора) при этом происходит разрыв потенциала на величину его э. д. с.

1, 13. Внешняя характеристика и коэффициент полезного действия источника тока

Рассмотрим работу цепи (фиг. 1, 9) при меняющемся внешнем сопротивлении R и постоянном внутреннем сопротивлении R_0 . Как мы видели

$$I = \frac{e}{R + R_0} \quad \text{и} \quad U = e - IR_0.$$

Когда внешняя цепь разомкнута, т. е. $R = \infty$, ток в цепи равен нулю (холостой ход).

При этом напряжение на зажимах $U = e$.

¹ Между разомкнутыми концами цепи — в диэлектрике — поле может существовать и при отсутствии тока.

С уменьшением R ток увеличивается, а напряжение на зажимах падает, так как увеличивается потеря напряжения внутри источника. При $R=0$, т. е. при коротком замыкании ток будет иметь максимальное значение:

$$I_k = \frac{e}{R_0}.$$

При этом напряжение на зажимах источника тока равно нулю, а внутренняя потеря напряжения равна э. д. с.

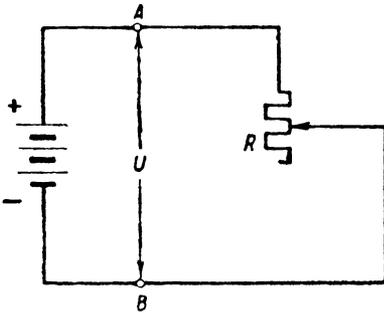
Кривая, изображающая зависимость напряжения на зажимах от тока, называется внешней характеристикой источника тока. Чтобы построить ее, будем откладывать по оси абсцисс значения тока, а по оси ординат — соответствующие значения напряжения (фиг. 1, 10).

Так как $U = e - IR_0$, то для тех источников тока, э. д. с. которых не зависит от величины тока в цепи, характеристика является прямой линией.

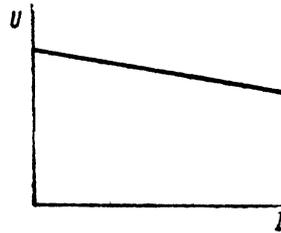
Чем больше R_0 , тем сильнее будет уменьшаться напряжение с увеличением тока и тем меньше будет максимальный ток, который может быть получен от источника тока.

Мощность, которую источник тока дает во внешнюю цепь,

$$P_2 = UI.$$



Фиг. 1,9.



Фиг. 1,10.

Мощность, расходуемая во всей цепи (внешней и внутренней),

$$P_1 = I^2(R + R_0) = I \cdot I(R + R_0) = eI.$$

Отношение этих двух мощностей дает нам коэффициент полезного действия (к. п. д.) источника

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{UI}{eI} = \frac{U}{e} = \frac{IR}{IR + IR_0},$$

или

$$\eta = \frac{R}{R + R_0}, \quad (1, 54)$$

т. е. к. п. д. источника тока равен отношению внешнего напряжения к э. д. с, или отношению внешнего сопротивления к полному сопротивлению цепи.

Ясно, что, чем больше R_0 , тем меньше будет к. п. д.

Если, пользуясь законом Джоуля-Ленца, выразить мощность, расходуемую во внешней цепи,

$$P_2 = I^2R$$

и подставить вместо I его значение

$$I = \frac{e}{R + R_0},$$

то получим

$$P_2 = \frac{e^2 \cdot R}{(R + R_0)^2} = \frac{e^2 R}{R^2 + 2RR_0 + R_0^2} = \frac{e^2}{R + 2R_0 + \frac{R_0^2}{R}} \quad (1, 55)$$

Как при $R=0$ (короткое замыкание), так и при $R=\infty$ (холостой ход) мы получаем, что

$$P = 0.$$

Этого и следовало ожидать. При коротком замыкании $U=0$, а при холостом ходе $I=0$, поэтому в обоих случаях

$$P_2 = U \cdot I = 0.$$

Максимального значения P_2 достигает при таком R , которое делает минимальным знаменатель выражения (1, 55). Приравнявая нулю производную от этого знаменателя, получим

$$\frac{d}{dR} \left(R + 2R_0 + \frac{R_0^2}{R} \right) = 1 - 0 + \frac{0 - R_0^2 \cdot 1}{R^2} = 1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{R}{R_0} = 1 \text{ и } R = R_0. \quad (1, 56)$$

Однако максимальная мощность

$$P_{2 \max} = \frac{e^2 R_0}{(2R_0)^2} = \frac{e^2}{4R_0} \quad (1, 57)$$

покупается весьма дорогой ценой, так как к. п. д. снижается при этом согласно (1, 48) до

$$\eta = \frac{R_0}{2R_0} = 0,5.$$

Половина энергии расходуется на нагревание источника тока.

1, 14. Последовательное соединение проводников

Соединим проводники с сопротивлениями R_1 и R_2 , как показано на фиг. 1, 11, и приключим их к зажимам источника тока A и C . Благодаря отсутствию в цепи разветвлений ток I в обоих проводниках будет одинаков. Такое соединение двух проводников называется последовательным.

Если цепь состоит из нескольких последовательно соединенных сопротивлений R_1, R_2, \dots, R_n (фиг. 1, 12), то напряжение на каждом сопротивлении можно выразить уравнениями

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2, \quad \dots, \quad U_n = IR_n,$$

причем ток I во всех сопротивлениях один и тот же.

Приложенное к цепи напряжение U равно сумме всех этих напряжений:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n.$$

В самом деле, мощность, потребляемая всеми этими сопротивлениями,

$$P = I^2 R_1 + I^2 R_2 + \dots + I^2 R_n = I (IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n).$$

В то же время эта мощность должна быть равна

$$P = IU.$$

Следовательно,

$$U = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n.$$

Обозначая через R общее сопротивление всей цепи, можно написать, что

$$U = IR,$$

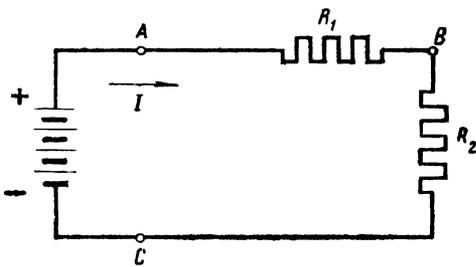
или

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_n.$$

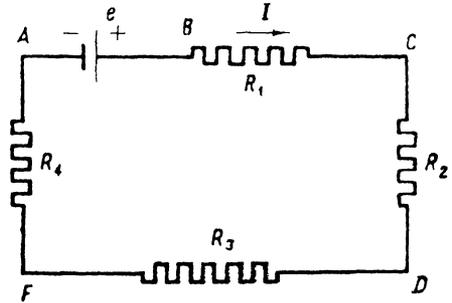
Сокращая обе части последнего равенства на I , получаем, что

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n,$$

или что общее сопротивление цепи, состоящей из нескольких последовательно соединенных сопротивлений, равно их сумме.



Фиг. 1,11.



Фиг. 1,12.

Если R_0 — внутреннее сопротивление источника тока, то общее сопротивление всей замкнутой цепи равно

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n,$$

а ток в цепи по закону Ома

$$I = \frac{e}{R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n}.$$

Для двух произвольных последовательно включенных участков цепи с сопротивлениями R_m и R_n имеем

$$U_m = I \cdot R_m$$

и

$$U_n = I \cdot R_n.$$

Деля друг на друга эти соотношения, получим

$$\frac{U_m}{U_n} = \frac{R_m}{R_n},$$

т. е. напряжения между зажимами последовательно соединенных проводников пропорциональны их сопротивлениям.

Точно так же пропорциональны сопротивлениям и мощности, расходуемые в последовательно соединенных проводниках, а следовательно, и количества выделяющегося в них тепла.

Это следует из того, что в последовательно включенных участках цепи ток одинаков.

1,15. Графическое изображение изменения потенциала вдоль цепи

При определении потенциала различных точек электрического поля потенциал произвольно выбранной точки этого поля может быть условно принят равным нулю. Чаще всего принимают равным нулю потенциал земли. Нас не должна смущать произвольность выбора точки, потенциал которой мы считаем равным нулю, так как целью наших расчетов являются не сами потенциалы, а лишь разности потенциалов в различных точках поля. Мы поступаем здесь подобно топографу, который, составляя карту какой-либо местности, отсчитывает высоту гор и глубину долин от так называемого „уровня моря“, принимаемого за начало отсчета.

Распределение потенциалов в любой замкнутой цепи может быть изображено графически. При построении такого графика на оси абсцисс наносятся точки, соответствующие всем характерным точкам цепи, причем расстояния между ними берутся пропорциональными сопротивлениям участков цепи между этими точками. По оси ординат откладываются потенциалы этих точек (по отношению к одной из точек, потенциал которой принят за нуль).

Пример 1,7. Рассмотрим построение такого графика на примере цепи, представленной на фиг. 1,12, при следующих данных:

$$R_0 = 2 \Omega; R_1 = 4 \Omega; R_2 = 1 \Omega; R_3 = 3 \Omega; R_4 = 2 \Omega; e = 120 \text{ V.}$$

Так как в цепи заземленных точек нет, то за точку нулевого потенциала условно принимаем точку *A*. По оси абсцисс (фиг. 1,13) откладываем в определенном масштабе сопротивления R_0, R_1, R_2, R_3 и R_4 . Таким образом получим точки: *a, b, c, d, f, a*, соответствующие точкам цепи: *A, B, C, D, F, A*.

Чтобы получить потенциал точки *B*, к потенциалу точки *A* (т. е. к нулю) нужно прибавить э. д. с. источника тока e и вычесть потерю напряжения в нем IR_0 . Предварительно необходимо определить ток

$$I = \frac{e}{R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{120}{2 + 4 + 1 + 3 + 2} = 10 \text{ A.}$$

Тогда

$$U_B = U_A + e - IR_0 = 0 + 120 - 10 \cdot 2 = 100 \text{ V.}$$

Эту величину откладываем как ординату в точке *b*. Потенциал точки *C*

$$U_C = U_B - IR_1 = 100 - 10 \cdot 4 = 60 \text{ V}$$

откладываем в точке *c*. Аналогично, далее,

$$U_D = U_C - IR_2 = 60 - 10 \cdot 1 = 50 \text{ V;}$$

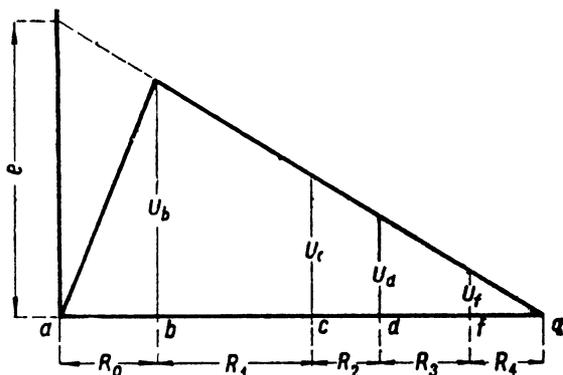
$$U_F = U_D - IR_3 = 50 - 10 \cdot 3 = 20 \text{ V}$$

и, наконец,

$$U_A = U_F - IR_4 = 20 - 10 \cdot 2 = 0,$$

как и следовало ожидать. Соответствующие ординаты откладываем в точках *d, f* и *a*. Соединяя полученные точки отрезками прямых, получаем график распределения потенциала вдоль цепи.

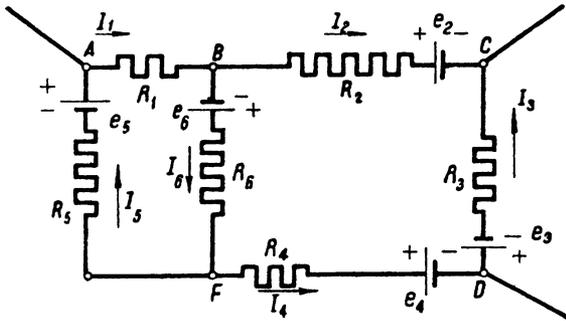
Так как ток I одинаков во всех участках цепи, то и падение потенциала, приходящееся на 1Ω сопротивления и характеризующее наклон соответствующего участка графика, будет одинаковым, т. е. все отрезки графика должны иметь одинаковый наклон, составляя одну прямую линию, наклон которой проще всего получить, отложив на оси ординат э. д. с. источника тока e и соединив полученную точку с концом последнего сопротивления на оси абсцисс. Таким образом график можно построить, не производя никаких вычислений.



Фиг. 1,13.

1,16. Разветвленная цепь. Законы Кирхгофа

Если электрическая цепь состоит из ряда источников тока и ряда сопротивлений, соединенных произвольным образом (фиг. 1,14), так что в цепи имеются точки разветвления тока, то закон Ома оказывается уже недостаточным для того, чтобы по заданным э. д. с. и сопротивлениям найти распределение токов и напряжений (потенциалов) в цепи.



Фиг. 1, 14.

В общем случае расчет производится при помощи двух правил или законов Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа. При установившемся режиме в цепи количество электричества, притекающее в единицу времени к какой-либо точке цепи, должно быть равно количеству электричества, утекающему за то же время от этой точки. Поэтому сумма всех токов, притекающих к любой точке разветвления (узлу), равна сумме всех токов, утекающих от этой точки.

Если условимся считать притекающие к узлу токи положительными, а утекающие от узла — отрицательными, то первый закон Кирхгофа может быть формулирован так: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю, или

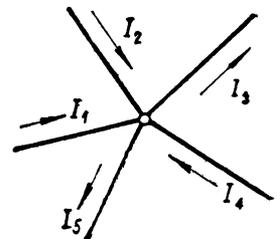
$$\sum I = 0. \quad (1,58)$$

Так, для узла, изображенного на фиг. 1,15, можем написать

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5, \text{ или } I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

(стрелки на фигуре обозначают направления токов).

Второй закон Кирхгофа. Выделим из разветвленной цепи произвольный замкнутый контур $ABCDFA$ (фиг. 1,14). Направление токов в его ветвях будем считать заданным, как указано на схеме. Проследим, как меняется потенциал, при обходе всего этого контура в любом направлении (т. е. по часовой стрелке или обратно). Переходя от одной точки цепи к другой, мы будем иметь уменьшение потенциала на величину IR , если направление обхода совпадает с направлением тока, и увеличение потенциала на IR , если направление обхода противоположно направлению тока. В первом случае мы должны брать произведение IR с отрицательным знаком, а во втором — с положительным. Проходя через источник тока, мы будем иметь изменение потенциала на $\mp IR_0$ вследствие потери напряжения во внутреннем сопротивлении и одновременно повышение потенциала на величину e (э. д. с.), если мы переходим от отрицательного полюса к положительному (в этом случае будем брать e с положительным знаком), или понижение потенциала на e , если мы переходим от положительного полюса к отрицательному (в этом случае будем считать e отрицательным).



Фиг. 1, 15.

Начиная обход контура от какой-либо точки A с потенциалом U_A и возвращаясь вновь в эту точку по окончании обхода, мы должны получить в ней тот же потенциал U_A . Поэтому, совершая обход выделенного нами контура $ABCDFA$ (фиг. 1, 14) по часовой стрелке, мы приходим к равенству

$$U_A - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = U_A.$$

Вычитая по U_A из обеих частей равенства, получаем

$$-e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0,$$

что может быть прочитано так: алгебраическая сумма э. д. с. и потерь напряжения в любом замкнутом контуре равна нулю. Это — первая формулировка второго закона Кирхгофа.

Удобнее, однако, сосредоточить в одной части уравнения все члены, содержащие э. д. с., а в другой — все члены, содержащие произведения IR . Тогда уравнение получит вид

$$-e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_5 R_5,$$

или

$$\sum e = \sum IR. \tag{1, 59}$$

Такая запись соответствует другой, более распространенной формулировке второго закона Кирхгофа: в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма э. д. с. равна алгебраической сумме потерь напряжения¹. При этом важно отметить, что произведения IR изменили свой знак, т. е. берутся со знаком $+$, когда направление обхода совпадает с направлением тока, и со знаком $-$, когда направление обхода противоположно направлению тока.

Выбор направления обхода остается совершенно произвольным.

Действительно, для контура, изображенного на фиг. 1, 16, если обходить его по часовой стрелке, можно написать

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_5 R_5 = -e_2 + e_3 + e_4 + e_5,$$

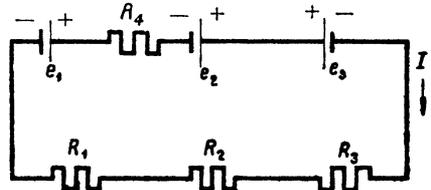
а если обходить против часовой стрелки,

$$-I_5 R_5 + I_4 R_4 + I_3 R_3 - I_2 R_2 - I_1 R_1 = -e_5 - e_4 - e_3 + e_2.$$

Легко видеть, что оба выражения тождественны.

Пользуясь вторым законом Кирхгофа, можно также распространить закон Ома на случай цепи, состоящей из нескольких последовательно соединенных источников тока (с э. д. с. e_1, e_2, e_3) и сопротивлений R_1, R_2, R_3 и R_4 (фиг. 1, 16).

Так как ответвлений в цепи нет, ток I во всех сопротивлениях одинаков. Применяя второй закон Кирхгофа к единственному в этом



Фиг. 1, 16.

¹ По существу дела эта формулировка, выражающая второе правило (или закон) Кирхгофа, является только удобным для практических расчетов токораспределений выражением данного выше определения э. д. с. $\oint E ds = e$.

случае контуру, получим (при обходе по часовой стрелке)

$$e_1 + e_2 - e_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_4^1,$$

или

$$e_1 + e_2 - e_3 = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4),$$

откуда

$$I = \frac{e_1 + e_2 - e_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}, \quad (1,60)$$

или

$$I = \frac{e}{R},$$

где

$$e = \sum e_i \quad \text{и} \quad R = \sum R_i. \quad (1,61)$$

Мы получили выражение закона Ома, в котором все последовательно соединенные э. д. с. заменены одной эквивалентной, равной их алгебраической сумме, а все сопротивления заменены одним эквивалентным сопротивлением, равным сумме всех сопротивлений цепи.

Пример 1,8. Найти ток в цепи, изображенной на фиг. 1,16, если

$$e_1 = 100 \text{ V}, \quad e_2 = 20 \text{ V}, \quad e_3 = 30 \text{ V},$$

$$R_1 = 5 \Omega, \quad R_2 = 4 \Omega, \quad R_3 = 8 \Omega, \quad R_4 = 1 \Omega.$$

Считая положительным направление по часовой стрелке, получим суммарную э. д. с.

$$e = 100 + 20 - 30 = 90 \text{ V}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи

$$R = 5 + 4 + 8 + 1 = 18 \Omega,$$

откуда

$$I = \frac{e}{R} = \frac{90}{18} = 5 \text{ A}.$$

Как суммарная э. д. с., так и ток — положительны. Следовательно, ток направлен в контуре по часовой стрелке.

Если бы в этом примере изменить e_3 , положив ее равной 165 V, оставляя все остальные величины без изменения, то, считая попрежнему положительным направление по часовой стрелке, получим

$$e = 100 + 20 - 165 = -45 \text{ V};$$

$$I = \frac{e}{R} = \frac{-45}{18} = -2,5 \text{ A}.$$

В этом случае ток был бы направлен против часовой стрелки.

1,17. Определение токов и напряжений в разветвленной цепи

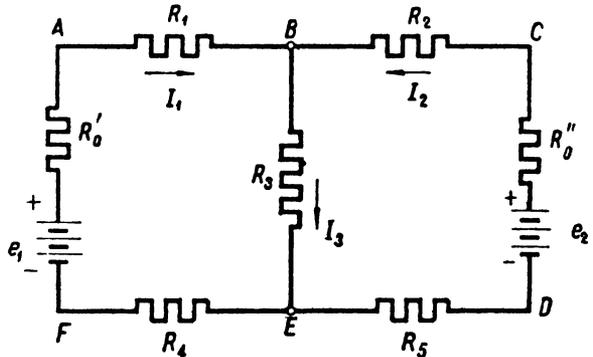
Применяя законы Кирхгофа к любой цепи, как бы сложна она ни была, всегда можно составить столько независимых уравнений, связывающих токи с э. д. с. и сопротивлениями, сколько различных токов имеется в цепи. Следовательно, если заданы все сопротивления и э. д. с., дей-

¹ В данном случае мы не ввели в явном виде внутренние сопротивления, считая, что они были учтены при определении одного из последовательно включенных сопротивлений, например, R_n . В некоторых случаях, если внутренние сопротивления источников малы по сравнению с остальными последовательно включенными сопротивлениями, ими можно пренебречь.

ствующие в цепи, то определение токов может быть сведено к решению системы линейных уравнений.

При составлении уравнений первый закон Кирхгофа может быть применен к любой узловой точке цепи. Если число узлов равно n , то при помощи первого закона Кирхгофа может быть составлено n уравнений. Однако только $n - 1$ из них будут независимыми, а n -ное уравнение явится алгебраическим следствием остальных. Поэтому при составлении системы уравнений сначала следует выяснить число неизвестных токов и составить $n - 1$ уравнение, применяя первый закон Кирхгофа ко всем узлам кроме одного. Недостающие уравнения должны быть составлены по второму закону Кирхгофа. При этом надо следить за тем, чтобы и во второй группе все уравнения были независимыми друг от друга.

Пример 1.9. Рассмотрим на примере (фиг. 1, 17), как следует пользоваться законами Кирхгофа для определения токов в сложной цепи. Нам даны э. д. с. $e_1 = 140$ В и $e_2 = 36$ В, сопротивления $R_1 = 4$ Ω; $R_2 = 3$ Ω; $R_3 = 10$ Ω; $R_4 = 3$ Ω и $R_5 = 2$ Ω и внутренние сопротивления источников тока $R_0' = 1$ Ω и $R_0'' = 1$ Ω. На фиг. 1, 17 для наглядности внутренние сопротивления показаны вынесенными из источников.



Фиг. 1, 17.

Искомые токи обозначим I_1 , I_2 и I_3 .

Предполагаемые направления этих токов укажем на схеме стрелками, выбирая их совершенно произвольно. Дальнейший расчет покажет, совпадают ли действительные направления токов с предполагаемыми или противоположны им.

Применяя первый закон Кирхгофа к точке B , получим

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \tag{a}$$

Применим второй закон Кирхгофа к контурам $ABEF$ и $BCDE$.

Выбрав для обоих контуров направление обхода по часовой стрелке, получим

$$I_1 R_0' + I_1 R_1 + I_3 R_3 + I_1 R_4 = e_1; \tag{b}$$

$$-I_2 R_2 - I_2 R_0'' - I_2 R_5 - I_3 R_3 = -e_2, \tag{c}$$

или

$$I_1 (R_0' + R_1 + R_4) + I_3 R_3 = e_1; \tag{b'}$$

$$I_2 (R_0'' + R_2 + R_5) + I_3 R_3 = e_2. \tag{c'}$$

Таким образом для определения трех неизвестных I_1 , I_2 и I_3 мы имеем три уравнения (a), (b') и (c').

Законы Кирхгофа позволяют, правда, получить еще два уравнения для определения тех же величин.

Действительно, применяя первый закон к точке E , а второй закон к контуру $ABCDEF$, получим

$$I_3 - I_2 - I_1 = 0$$

и

$$I_1 R_0' + I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_2 R_0'' - I_2 R_5 + I_1 R_4 = e_1 - e_2.$$

Однако легко видеть, что первое из этих уравнений тождественно с уравнением (а), а второе может быть получено путем сложения (b) и (с). Следовательно, независимых уравнений у нас только три.

Подставим в уравнения (а), (b'), (с') численные значения сопротивлений и э. д. с.:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0; \\ I_1 \cdot 8 + I_3 \cdot 10 &= 140; \\ I_2 \cdot 6 + I_3 \cdot 10 &= 36. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим

$$I_1 = 10; \quad I_2 = -4 \text{ А}; \quad I_3 = 6 \text{ А}.$$

Ток I_2 получился отрицательным. Это указывает на то, что его направление противоположно направлению соответствующей стрелки.

Направления токов I_1 и I_3 совпадают с направлениями обозначающих их стрелок, так как эти токи выражаются положительными числами.

Зная величины и направления токов и умножая эти токи на соответствующие сопротивления, мы можем найти потерю напряжения в любом участке цепи. Напряжение между точками A и F (напряжение на зажимах первого источника тока)

$$U_1 = e_1 - I_1 R_0' = 140 - 10 \cdot 1 = 130 \text{ В}.$$

Напряжение между точками C и D (напряжение на зажимах второго источника тока)

$$U_2 = e_2 - I_2 R_0'' = 36 - (-4) \cdot 1 = 40 \text{ В}.$$

Направление тока в первом источнике совпадает с направлением э. д. с. Мощность, отдаваемая первым источником,

$$P_1 = e_1 I_1 = 140 \cdot 10 = 1400 \text{ Вт},$$

расходуется во внешней цепи и внутри источника тока.

Во внешней цепи расходуется при этом

$$P_1' = U_1 I_1 = 130 \cdot 10 = 1300 \text{ Вт},$$

а во внутреннем сопротивлении источника

$$P_1'' = I_1^2 R_0' = 10^2 \cdot 1 = 100 \text{ Вт}.$$

Во втором источнике направление тока противоположно направлению э. д. с. Следовательно, второй источник получает энергию от цепи (зарядка аккумуляторной батареи). Мощность его выражается поэтому отрицательным числом

$$P_2 = U_2 I_2 = 40 \cdot (-4) = -160 \text{ Вт}.$$

1,18. Цепь с двумя узлами

Нахождение токов в разветвленной цепи с помощью законов Кирхгофа требует при большом числе ветвей решения системы уравнений с многими неизвестными. Существует, однако, целый ряд методов, облегчающих решение задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Если разветвленная цепь имеет только два узла (фиг. 1,18), между которыми включен ряд ветвей, содержащих э. д. с. и сопротивления, то нетрудно вывести формулу для определения напряжения U между узлами A и B . Это напряжение (при указанных на фиг. 1,20 положительных направлениях э. д. с. и токов) равно разности между э. д. с. и потерей напряжения в любом из участков:

$$U = e_k - I_k R_k,$$

где k — номер участка. Поэтому ток в любом участке может быть выражен с помощью напряжения U уравнением

$$I_k = \frac{e_k - U}{R_k}. \quad (1, 62)$$

Но по первому закону Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots = 0,$$

или

$$\sum I_k = 0.$$

Подставляя сюда только что полученные выражения токов, найдем

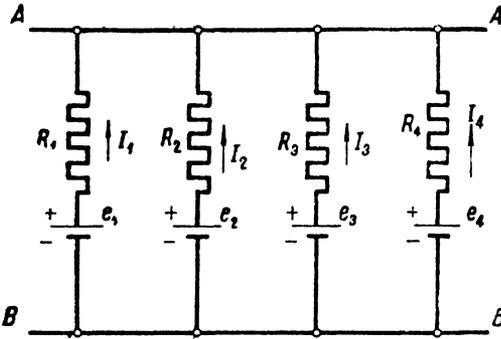
$$\frac{e_1 - U}{R_1} + \frac{e_2 - U}{R_2} + \frac{e_3 - U}{R_3} + \dots = 0,$$

или

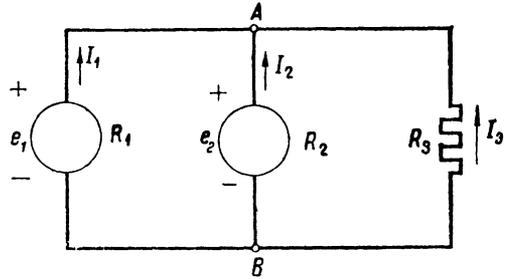
$$\sum \frac{e_k}{R_k} - \sum \frac{U}{R_k} = 0, \quad (1, 63)$$

где

$$\sum \frac{U}{R_k} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) = U \cdot \sum \frac{1}{R_k}.$$



Фиг. 1, 18.



Фиг. 1, 19.

Так как, кроме того, $\frac{1}{R_k} = g_k$, то уравнение (1, 63) получает вид

$$\sum e_k g_k - U \sum g_k = 0,$$

откуда и находится искомое напряжение между узлами

$$U = \frac{\sum e_k g_k}{\sum g_k}. \quad (1, 64)$$

Когда это напряжение найдено, ток в любой ветви может быть определен по формуле (1, 62).

Пример 1, 10. Две динамомшины (фиг. 1, 19) с э. д. с. $e = 122$ В и $e_2 = 126$ В и внутренними сопротивлениями $R_1 = 4$ Ω и $R_2 = 2$ Ω работают параллельно на приемник, сопротивление которого $R_3 = 10$ Ω. Найти распределение токов в цепи.

Нанеся на схеме (фиг. 1, 19) положительные направления э. д. с. и токов от точки В к точке А, находим предварительно

$$g_1 = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ S}, \quad g_2 = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ S}$$

и

$$g_3 = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ S}$$

и, подставляя их в уравнение (1, 64), определяем напряжение между A и B .

$$U = \frac{122 \cdot 0,25 + 126 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,1}{0,25 + 0,5 + 0,1} = \frac{30,5 + 63}{0,85} = \frac{93,5}{0,85} = 110 \text{ V.}$$

Далее, по (1, 62) находим

$$I_1 = \frac{122 - 110}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ A;}$$

$$I_2 = \frac{126 - 110}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ A;}$$

$$I_3 = \frac{0 - 110}{10} = -11 \text{ A.}$$

Отрицательное значение тока I_3 указывает, что он направлен от A к B , а не наоборот, как мы должны были принять в соответствии с уравнением (1, 62).

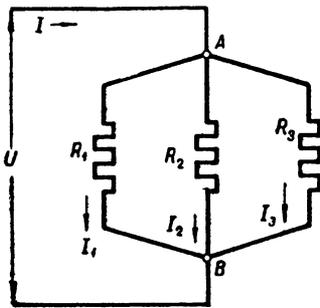
При вычислениях по формуле (1, 64) никакой роли не играет направление тока в тех участках, которые не содержат э. д. с. В этих участках можно поэтому принять за положительное направление тока от точки A к точке B и вычислить соответствующие токи по формуле

$$I_k = \frac{U}{R_k}, \quad (1, 65)$$

которая получается из (1, 62), если переменить знаки и подставить $e_k = 0$.

1, 19. Параллельное соединение проводников

Еще проще может быть решена задача, когда цепь состоит из нескольких проводников с сопротивлениями $R_1, R_2, R_3 \dots$, присоединенных к двум точкам параллельно друг с другом, напряжением U между которыми известно (фиг. 1, 20).



Фиг. 1, 20.

Найдем прежде всего, каково должно быть сопротивление одного проводника, которым можно было бы заменить все эти проводники, не изменяя при этом тока I в неразветвленной части цепи. Сопротивление такого проводника будем называть эквивалентным сопротивлением группы параллельно включенных проводников. Обозначая через R эквивалентное сопротивление, выразим через него ток в неразветвленной части цепи

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1, 66)$$

По первому закону Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots = \sum I_k,$$

где I_k — ток в любом из параллельно соединенных проводников. По закону Ома

$$I_k = \frac{U}{R_k}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) = U \cdot \sum \frac{1}{R_k}.$$

Заменяя I его выражением из (1, 66), получим

$$\frac{U}{R} = U \cdot \sum \frac{1}{R_k},$$

откуда, сокращая на U , находим

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}. \quad (1, 67)$$

Вводя вместо сопротивлений соответствующие проводимости, получим

$$g = \sum g_k = g_1 + g_2 + \dots, \quad (1, 68)$$

т. е. эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей всех параллельно соединенных проводников.

При параллельном соединении двух проводников

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \text{и} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1, 69)$$

При параллельном соединении n проводников с равными сопротивлениями

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} = n \frac{1}{R_1},$$

откуда

$$R = \frac{R_1}{n}. \quad (1, 70)$$

Посмотрим теперь, как распределяются токи в параллельных ветвях.

Заменяя сопротивления проводимостями, имеем для каждой ветви в отдельности

$$I_k = U g_k$$

откуда

$$U = \frac{I_1}{g_1} = \frac{I_2}{g_2} = \frac{I_3}{g_3},$$

или

$$I_1 : I_2 : I_3 = g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} \quad \text{и т. д.}, \quad (1, 71)$$

т. е. токи в параллельных ветвях прямо пропорциональны проводимостям ветвей (или обратно пропорциональны соответствующим сопротивлениям).

При параллельном соединении двух проводников

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{g_1}{g_2} \quad \text{или} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Так как

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad \text{а} \quad U = IR,$$

то

$$I_1 = \frac{IR}{R_1} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{IR}{R_2}$$

или, подставляя значение R из (1, 69),

$$I_1 = I \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_1} \quad \text{и} \quad I_2 = I \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_2},$$

что дает после сокращения

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (1, 72)$$

Если заменить сопротивления проводимостями, то

$$I_1 = U g_1; \quad I_2 = U g_2 \quad \text{и} \quad I = U g \Rightarrow U (g_1 + g_2),$$

откуда, деля первые два уравнения на третье, получим

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \quad \text{и} \quad \frac{I_2}{I} = \frac{g_2}{g_1 + g_2},$$

или

$$I_1 = I \frac{g_1}{g_1 + g_2} \quad \text{и} \quad I_2 = I \frac{g_2}{g_1 + g_2}. \quad (1, 73)$$

1, 20. Смешанное соединение проводников

Если цепь состоит из ряда сопротивлений, соединенных частью параллельно, частью последовательно, то и в этом случае можно найти распределение токов, пользуясь эквивалентным сопротивлением всей цепи.

Рассмотрим, например, цепь, изображенную на фиг. 1, 21.

Сопротивление между точками B и C находим по формуле (1, 69):

$$R_{BC} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (1, 74)$$

Так как сопротивление R_1 включено последовательно с сопротивлением R_{BC} , то эквивалентное сопротивление всей цепи

$$R = R_1 + R_{BC} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \quad (1, 75)$$

Ток I_1 в неразветвленной части цепи находим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{e}{R}$$

(внутренним сопротивлением источника тока пренебрегаем).

Напряжение на зажимах сопротивления R_1

$$U_1 = I_1 R_1,$$

а напряжение между точками B и C

$$U_{BC} = I_1 R_{BC}.$$

Можно также найти U_{BC} , применяя второй закон Кирхгофа к контуре $ABCD$:

$$e = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I_1 R_1 + U_{BC},$$

откуда

$$U_{BC} = e - I_1 R_1,$$

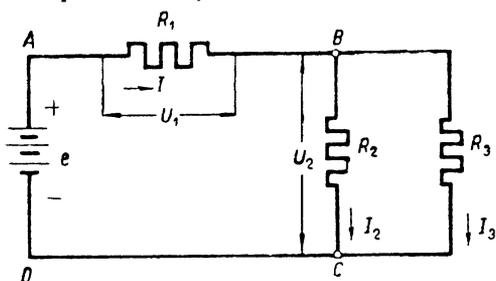
т. е. чтобы получить напряжение между точками B и C , надо из напряжения источника тока вычесть потерю напряжения в сопротивлении R_1 .

Зная U_{BC} , легко найти токи I_2 и I_3 по формулам

$$I_2 = \frac{U_{BC}}{R_2} \quad \text{и} \quad I_3 = \frac{U_{BC}}{R_3}.$$

Токи в ветвях R_2 и R_3 могут быть найдены и непосредственно по току I_1 , не прибегая к вычислению U_{BC} . Действительно, согласно (1, 72)

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{и} \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$



Фиг. 1, 21.

Полученные токи должны, конечно, удовлетворять равенству

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

что может служить для проверки правильности вычислений.

Пример 1,11 (фиг. 1,21). Электродвижущая сила источника $e = 120$ V. Сопротивления $R_1 = 2$ Ω, $R_2 = 6$ Ω и $R_3 = 12$ Ω.

Найти токи

$$I_1, I_2 \text{ и } I_3.$$

Вычисляем

$$R_{BC} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \text{ Ω}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$R = R_1 + R_{BC} = 2 + 4 = 6 \text{ Ω}.$$

В неразветвленной части цепи

$$I_1 = \frac{e}{R} = \frac{120}{6} = 20 \text{ A}.$$

В параллельных ветвях

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 20 \cdot \frac{12}{6 + 12} = 13,33 \text{ A},$$

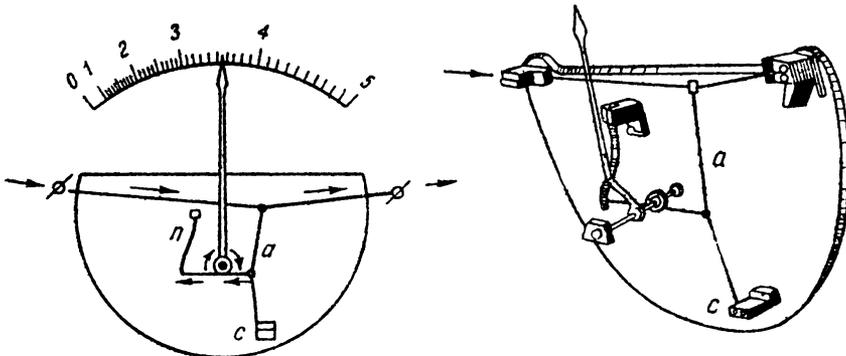
$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 20 \frac{6}{6 + 12} = 6,67 \text{ A}.$$

Проверка:

$$I_1 = I_2 + I_3 = 13,33 + 6,67 = 20 \text{ A}.$$

1,21. Измерение токов и напряжений

Простейшим из технических приборов, служащих для измерения тока, является тепловой амперметр (фиг. 1,22). Он состоит из платино-



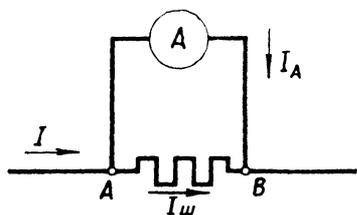
Фиг. 1, 22.

серебряной или платино-иридиевой проволоки, по которой проходит измеряемый ток. К середине проволоки припаяна другая проволока, закрепленная в точке c . Проволока a оттягивается посредством нити пружины n . Эта нить перекинута через блок, соединенный со стрелкой. Измеряемый ток, проходя по проволоке, нагревает ее. При нагревании проволока удлиняется и провисает. Пружина оттягивает нить, которая при этом поворачивает блок со стрелкой.

Так как угол поворота стрелки не пропорционален току, то деления шкалы теплового амперметра неравномерны: одному и тому же увеличению тока в разных местах шкалы соответствуют разные перемещения стрелки; в середине шкалы деления крупнее, чем в начале.

При измерении больших токов обычно употребляются амперметры с шунтом, т. е. с параллельно включенным сопротивлением.

В этом случае через прибор проходит только определенная часть измеряемого тока, а весь остальной ток идет через шунт (фиг. 1, 23). Допустим, что сопротивление амперметра R_A известно, и требуется определить, каково должно быть сопротивление шунта R_w , чтобы проходящий через амперметр ток I_A составлял $\frac{1}{100}$ измеряемого тока I .



Фиг. 1, 23.

Обозначив I_w — ток в шунте, имеем

$$I = I_A + I_w$$

и

$$\frac{I_A}{I_w} = \frac{R_w}{R_A};$$

так как

$$I_A = 0,01I,$$

то

$$I_w = I - I_A = I - 0,01I = 0,99I.$$

Подставляя значения I_A и I_w в вышеприведенную пропорцию, получим

$$\frac{0,01I}{0,99I} = \frac{R_w}{R_A},$$

откуда

$$R_w = \frac{1}{99} R_A.$$

Аналогично можно показать, что если

$$R_w = \frac{1}{9} R_A,$$

то ток

$$I_A = 0,1I \quad \text{или} \quad I = 10I_A.$$

Следовательно, приключая к одному и тому же амперметру шунт с различными сопротивлениями, можно расширить пределы применения данного амперметра, т. е. измерять амперметром токи, в 10, 100, 1000 и т. д. раз большие, чем ток, на который рассчитан сам амперметр.

Для измерения напряжения служит вольтметр — прибор, в большинстве случаев отличающийся от амперметра не по принципу работы, а лишь по способу включения в цепь, по величине своего сопротивления и по градуировке. В то время как амперметр включается в цепь последовательно с тем или иным приемником, имеет очень малое сопротивление и при измерении больших токов снабжается параллельно ему включенным шунтом, вольтметр включается параллельно с приемником, между зажимами которого он должен измерять напряжение, имеет большое сопротивление и для измерения больших напряжений снабжается последовательно включенным добавочным сопротивлением. Так как при постоянном сопротивлении прибора проходящий через него ток пропорционален напряжению на его зажимах, т. е. на зажимах приемника, то, зная сопротивление прибора, нетрудно установить, какое напряжение

соответствует каждому значению проходящего через прибор тока, и таким образом составить для него соответствующую шкалу.

На фиг. 1,24 показано включение вольтметра и амперметра для измерения тока и напряжения на участке цепи сопротивлением R_2 . Отметим, что включение измерительных приборов хотя бы в слабой степени, но неизбежно несколько изменяет режим работы цепи.

Пример 1,12. Напряжение на зажимах источника тока (фиг. 1,24) $U = 120$ В, сопротивление между точками A и B $R_2 = 100$ Ω , сопротивление остальной части цепи $R_1 = 20$ Ω .

Требуется измерить напряжение между точками A и B , приключая к ним вольтметр с сопротивлением $R_V = 2000$ Ω , и определить, насколько напряжение, показываемое вольтметром, отличается от напряжения между точками A и B при отсутствии вольтметра.

До включения вольтметра ток в цепи

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{120}{100 + 20} = 1 \text{ А.}$$

Напряжение между точками A и B

$$U_2 = IR_2 = 1 \cdot 100 = 100 \text{ В.}$$

После включения вольтметра сопротивление между точками A и B

$$R_2' = \frac{R_2 \cdot R_V}{R_2 + R_V} = \frac{100 \cdot 2000}{100 + 2000} = 95,2 \text{ } \Omega.$$

Ток в неразветвленной части цепи

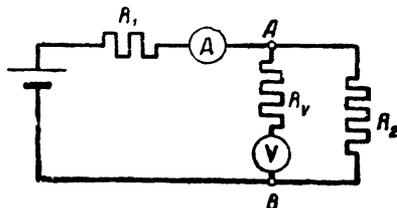
$$I_2' = \frac{U}{R_1 + R_2'} = \frac{120}{20 + 95,2} = 1,04 \text{ А.}$$

Напряжение между точками A и B (показываемое вольтметром)

$$U_2' = I_2' R_2' = 1,04 \cdot 95,2 \approx 99 \text{ В.}$$

Таким образом включение вольтметра изменило измеряемое напряжение на 1% .

Нетрудно определить и то, насколько ток, измеряемый амперметром, больше тока, протекающего через сопротивление R_2 , и как влияет включение амперметра на изменение режима цепи, если, разумеется, известно его сопротивление.



Фиг. 1,24.

1,22. Метод наложения

Подобно тому как движение тела под действием нескольких сил можно рассматривать как результат сложения движений, вызываемых каждой силой в отдельности, точно так же электрические токи в любой цепи¹ при наличии нескольких э. д. с. можно определять путем сложения (алгебраического) токов, вызываемых каждой э. д. с. в отдельности.

Для доказательства рассмотрим разветвленную цепь произвольной конфигурации, в некоторых участках которой действуют э. д. с. e_1, e_2, e_3 и т. д. Обозначим: I_{1k} — ток в каком-либо участке k при наличии в цепи одной э. д. с. e_1 , I_{2k} — ток в том же участке при наличии в цепи одной э. д. с. e_2 и т. д. Для каждого узла можно по первому закону

¹ Здесь имеются в виду цепи, сопротивление которых не зависит от величины проходящих по ним токов.

Кирхгофа написать

$$\sum I_{1k} = 0; \quad \sum I_{2k} = 0$$

и т. д., распространяя суммирование на все участки, сходящиеся в данном узле, и соблюдая соответствующее правило знаков.

Для каждого замкнутого контура, не содержащего э. д. с., по второму закону Кирхгофа получим

$$\sum I_{1k} R_k = 0, \quad \sum I_{2k} R_k = 0$$

и т. д., а для каждого контура, содержащего соответствующую э. д. с.,

$$\sum I_{1k} R_k = e_1; \quad \sum I_{2k} R_k = e_2$$

и т. д., распространяя в обоих случаях суммирование на все участки, входящие в данный контур, и опять-таки соблюдая соответствующее правило знаков.

Складывая теперь между собой все уравнения каждой группы, относящиеся к одним и тем же участкам цепи, получим

$$\sum I_{1k} + \sum I_{2k} + \dots = \sum (I_{1k} + I_{2k} + \dots) = 0;$$

$$\sum I_{1k} R_k + \sum I_{2k} R_k + \dots = \sum (I_{1k} R_k + I_{2k} R_k + \dots) = \sum (I_{1k} + I_{2k} + \dots) R_k = 0$$

и

$$\sum I_{1k} R_k + \sum I_{2k} R_k + \dots = \sum (I_{1k} + I_{2k} + \dots) R_k = \sum e,$$

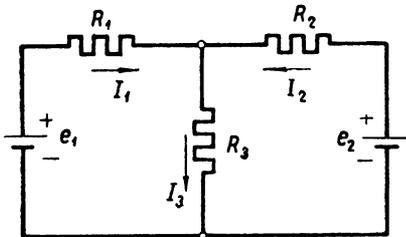
где $\sum e$ представляет собой алгебраическую сумму тех э. д. с., которые входят в данный контур.

Обозначив, далее, через I_k — алгебраическую сумму токов, создаваемых в участке k каждой э. д. с. в отдельности, т. е. положив

$$I_k = I_{1k} + I_{2k} + \dots, \quad (1,76)$$

приведем эти уравнения к виду

$$\left. \begin{aligned} \sum I_k &= 0; \\ \sum I_k R_k &= 0; \\ \sum I_k R_k &= \sum e. \end{aligned} \right\} \quad (1,77)$$



Фиг. 1, 25.

Но совершенно такой же вид будут иметь уравнения для определения токов в цепи при одновременном действии всех данных э. д. с. Отсюда следует, что ток I_k в любом участке сложной цепи, в которой действует несколько э. д. с., равен алгебраической сумме токов, создаваемых в этом участке каждой э. д. с. в отдельности. В этом и заключается так называемый принцип наложения (или суперпозиции).

Пример 1, 13. В качестве примера применения этого принципа рассмотрим цепь, представленную на фиг. 1, 25, приняв за положительные указанные на этой схеме направления токов и считая данными следующие значения э. д. с. и сопротивлений:

$$e_1 = 110 \text{ V}; \quad e_2 = 132 \text{ V}; \quad R_1 = 4 \text{ } \Omega; \quad R_2 = 2 \text{ } \Omega \text{ и } R_3 = 6 \text{ } \Omega.$$

Если в цепи действует одна э. д. с. e_1 , то общее сопротивление цепи

$$R' = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4 + \frac{2 \cdot 6}{2 + 6} = 4 + 1,5 = 5,5 \text{ } \Omega,$$

так как R_2 и R_3 соединены параллельно и к ним последовательно подключено R_1 . Ток в неразветвленной части такой цепи

$$I_1' = \frac{e_1}{R'} = \frac{110}{5,5} = 20 \text{ A},$$

а напряжение между точками разветвления

$$U_3' = I_1' \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 20 \cdot 1,5 = 30 \text{ V}.$$

По этому напряжению находим токи I_2' и I_3' в параллельных ветвях, имея в виду, что I_2' , как направленный против стрелки, на фиг. 1,25 отрицателен:

$$I_2' = \frac{U_3'}{R_2} = -\frac{30}{2} = -15 \text{ A};$$

$$I_3' = \frac{U_3'}{R_3} = \frac{30}{6} = 5 \text{ A}.$$

Если в цепи действует одна э. д. с. e_2 , то общее сопротивление цепи

$$R'' = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 2 + \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2 + 2,4 = 4,4 \Omega,$$

так как теперь параллельно соединены R_1 и R_3 . В неразветвленной части цепи

$$I_2'' = \frac{e_2}{R''} = \frac{132}{4,4} = 30 \text{ A},$$

а напряжение между точками разветвления

$$U_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 30 \cdot 2,4 = 72 \text{ V}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I_1'' = -\frac{U_3''}{R_1} = -\frac{72}{4} = -18 \text{ A};$$

$$I_3'' = \frac{U_3''}{R_3} = \frac{72}{6} = 12 \text{ A}.$$

Складывая теперь токи, создаваемые в одних и тех же участках отдельными э. д. с., находим

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 20 - 18 = 2 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -15 + 30 = 15 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 5 + 12 = 17 \text{ A}.$$

Напряжение между точками разветвления также может быть получено путем сложения напряжений между теми же точками в рассмотренных двух случаях:

$$U_3 = U_3' + U_3'' = 30 + 72 = 102 \text{ V},$$

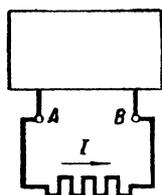
что можно проверить по закону Ома:

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = 17 \cdot 6 = 102 \text{ V}.$$

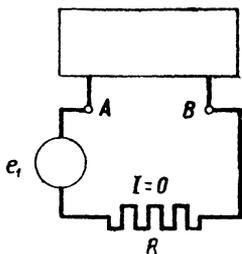
1,23. Метод холостого хода и короткого замыкания

Если при расчете разветвленной цепи требуется найти ток только в какой-нибудь одной ветви, то проще всего воспользоваться методом холостого хода и короткого замыкания (теорема Тевенена), сущность которого состоит в следующем:

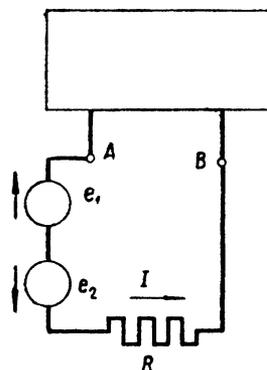
Положим, нужно найти ток в ветви AB , сопротивление которой равно R и которая включена между точками A и B любой разветвленной цепи (фиг. 1,26), в которой действует целый ряд э. д. с. (Вся эта цепь кроме ветви AB изображена на фиг. 1,27 прямоугольником.) Предположим сначала, что ветвь AB разомкнута и любым способом определим напряжение U_0 между точками A и B . Затем включим ветвь AB , одновременно введя в нее источник тока э. д. с. e_1 , равной по величине напряжению U_0 , но противоположной ему по направлению (фиг. 1,28). Так как эта э. д. с. компенсирует напряжение U_0 , тока в ветви AB не будет, а следовательно, останутся без изменения и токи во всех остальных участках цепи. Если теперь ввести в ветвь AB вторую э. д. с. e_2 , также равную по величине U_0 , но уже совпадающую с ним по направлению (фиг. 1,28), то она компенсирует действие э. д. с. e_1 и в ветви AB возникнет такой же ток, как в первоначальной схеме (фиг. 1,26). Пользуясь методом наложения, этот ток можно найти как сумму двух токов, создаваемых: 1) э. д. с. e_1 и всеми действительно имеющимися



Фиг. 1,26.



Фиг. 1,27.



Фиг. 1,28.

в цепи э. д. с. и 2) одной только э. д. с. e_2 . Но первый из этих токов, как только что было выяснено, равен нулю. Следовательно, ток в ветви AB

$$I = \frac{e_2}{R + R_k},$$

где R_k — эквивалентное сопротивление всей остальной цепи, вычисленное в предположении, что в ней отсутствуют э. д. с.¹ и что она питается источником тока, присоединенным непосредственно к зажимам A и B . Это общее сопротивление может быть названо сопротивлением короткого замыкания при питании в точках A и B и при равенстве всех остальных э. д. с. нулю.

Так как $e_2 = U_0$, то

$$I = \frac{U_0}{R + R_k}. \quad (1,76)$$

Все происходит, следовательно, так, как будто точки A и B являются зажимами некоторого генератора с э. д. с. U_0 (напряжение холостого хода) и внутренним сопротивлением R_k . Ток в ветви AB определяется, таким образом, путем деления напряжения холостого хода на сумму сопротивления ветви и сопротивления короткого замыкания. Поэтому и самый метод назван методом холостого хода и короткого замыкания.

¹ Вместо источников э. д. с. остаются только внутренние сопротивления этих источников.

Пример 1,14. Найдем по этому методу ток в ветви R_3 схемы, представленной на фиг. 1,25. Выключив эту ветвь, находим ток в остальной цепи

$$I' = \frac{e_2 - e_1}{R_1 + R_2} = \frac{132 - 110}{4 + 2} = 3,67 \text{ А}$$

и напряжение между точками разветвления

$$U_0 = e_2 - I'R_2 = 132 - 3,67 \cdot 2 = 124,7 \text{ В.}$$

Сопrotивление короткого замыкания

$$R_k = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 2}{4 + 2} = 1,33 \text{ }\Omega,$$

так как при отсутствии э. д. с. e_1 и e_2 ветви R_1 и R_2 оказываются включенными параллельно.

Ток в ветви R_3

$$I_3 = \frac{U_0}{R_3 + R_k} = \frac{124,7}{6 + 1,33} = 17 \text{ А,}$$

как и было получено выше более сложным путем.

Зная I_3 , легко найти действительное напряжение между точками разветвления, а затем и остальные два тока.

Пример 1,15. Определить ток в ветви R_5 (фиг. 1,29), если

$$U = 120 \text{ В; } R_1 = 4 \text{ }\Omega; R_2 = 6 \text{ }\Omega; R_3 = 12 \text{ }\Omega; R_4 = 8 \text{ }\Omega \text{ и } R_5 = 0,8 \text{ }\Omega.$$

Размыкая R_5 , находим

$$I_1' = I_2' = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{120}{4 + 6} = 12 \text{ А;}$$

$$I_3' = I_4' = \frac{U}{R_3 + R_4} = \frac{120}{12 + 8} = 6 \text{ А.}$$

Соответствующее напряжение холостого хода

$$U_0 = I_2'R_2 - I_4'R_4 = 12 \cdot 6 - 6 \cdot 8 = 24 \text{ В.}$$

Сопrotивление короткого замыкания¹

$$R_k = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} + \frac{12 \cdot 8}{12 + 8} = 2,4 + 4,8 = 7,2 \text{ }\Omega,$$

так как при $U = 0$ ветвь R_1 оказывается включенной параллельно R_2 , а ветвь R_3 параллельно R_4 .

Искомый ток

$$I_5 = \frac{U_0}{R_5 + R_k} = \frac{24}{0,8 + 7,2} = \frac{24}{8} = 3 \text{ А.}$$

Если нужно найти и остальные токи, то следует по формулам (1,72) вычислить распределение тока I_5 между параллельными ветвями (при $U = 0$) и, учитывая направления полученных токов, наложить их на уже вычисленные токи $I_1' = I_2'$ и $I_3' = I_4'$. Находим:

$$I_3'' = -I_5 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = -3 \frac{8}{20} = 1,2 \text{ А;}$$

$$I_4'' = +I_5 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = +3 \frac{12}{20} = +1,8 \text{ А;}$$

$$I_1'' = +I_5 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = +3 \frac{6}{10} = 1,8 \text{ А;}$$

$$I_2'' = -I_5 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -3 \frac{4}{10} = 1,2 \text{ А.}$$

¹ Внутренним сопротивлением источника пренебрегаем, полагая его равным нулю. что значительно упрощает расчет.

Наложение токов дает:

$$I_1 = 12 + 1,8 = 13,8 \text{ A};$$

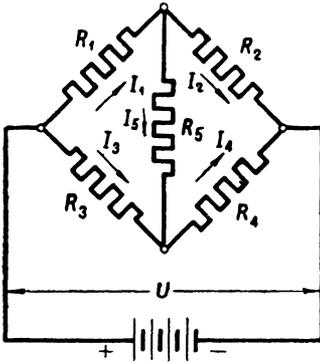
$$I_2 = 12 - 1,2 = 10,8 \text{ A};$$

$$I_3 = 6 - 1,2 = 4,8 \text{ A};$$

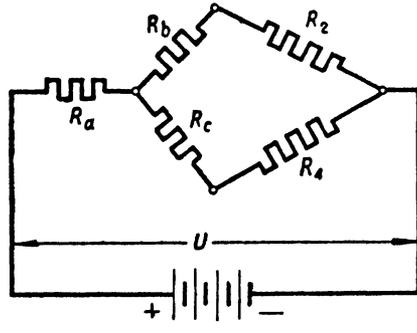
$$I_4 = 6 + 1,8 = 7,8 \text{ A}.$$

1,24. Метод трансфигурации (Кеннелли)

В целом ряде случаев схема разветвленной цепи оказалась бы более простой, если бы какие-либо три сопротивления, образующие собой треугольник, можно было заменить тремя другими сопротивлениями, включенными „звездой“, т. е. сходящимися в одной точке, или наоборот, если бы три сопротивления, соединенные „звездой“, можно было заменить эквивалентным треугольником. Эквивалентность звезды и треугольника понимается при этом в том смысле, что при замене звезды треугольником, или наоборот, и при неизменных потенциалах их вершин, токи в осталь-



Фиг. 1,29.



Фиг. 1,30.

ной части схемы должны оставаться без изменения. Так, например, если бы в схеме, изображенной на фиг. 1,29, треугольник, составленный из сопротивлений R_1 , R_3 и R_5 , удалось заменить эквивалентной звездой R_a , R_b и R_c (фиг. 1,30), то для полученной схемы сразу можно было бы вычислить общее сопротивление по формуле

$$R = R_a + \frac{(R_b + R_2)(R_c + R_4)}{R_b + R_2 + R_c + R_4},$$

после чего без особого труда определились бы токи во всех ветвях измененной схемы, потенциалы всех узловых точек, а затем и токи в первоначальной схеме.

Для получения формул, связывающих сопротивления эквивалентных друг другу звезды и треугольника, обозначим: R_{ab} , R_{bc} и R_{ca} сопротивления, включенные треугольником между точками a , b и c (фиг. 1,31), g_{ab} , g_{bc} и g_{ca} — соответствующие проводимости, R_a , R_b и R_c — сопротивления эквивалентной звезды, примыкающие к тем же точкам a , b и c (фиг. 1,32), и g_a , g_b и g_c — соответствующие проводимости.

Обозначив, далее, U_a , U_b и U_c — потенциалы точек a , b и c в обеих схемах, найдем для схемы треугольника токи в проводах, связывающих его с остальной цепью:

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = (U_a - U_b)g_{ab} - (U_c - U_a)g_{ca},$$

или

$$I_a = U_{ab}g_{ab} - U_{ca}g_{ca} \quad (1,77)$$

а аналогично

$$I_b = U_{bc}g_{bc} - U_{ab}g_{ab}; \quad (1,78)$$

$$I_c = U_{ca}g_{ca} - U_{bc}g_{bc}, \quad (1,79)$$

где

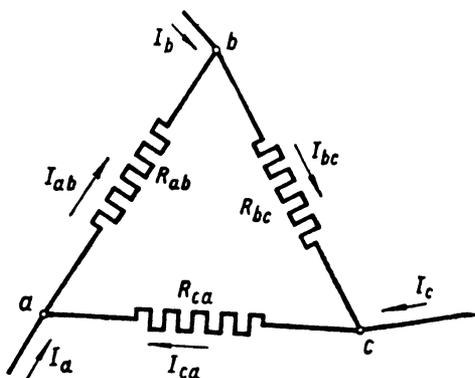
$$U_{ab} = U_a - U_b; \quad U_{bc} = U_b - U_c \quad \text{и} \quad U_{ca} = U_c - U_a.$$

Те же токи в схеме звезды

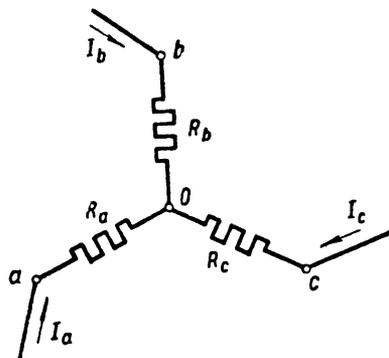
$$I_a = (U_a - U_0)g_a; \quad I_b = (U_b - U_0)g_b \quad \text{и} \quad I_c = (U_c - U_0)g_c,$$

где U_0 — потенциал узла звезды, который может быть определен, если к трем последним уравнениям добавить четвертое:

$$I_a + I_b + I_c = 0.$$



Фиг. 1, 31.



Фиг. 1, 32.

Решая эти уравнения путем, тождественным с проделанным в § 1, 18 получаем, что

$$U_0 = \frac{U_a g_a + U_b g_b + U_c g_c}{g_a + g_b + g_c}.$$

Подставляя выражение U_0 в уравнение для I_a , находим

$$\begin{aligned} I_a &= \left(U_a - \frac{U_a g_a + U_b g_b + U_c g_c}{g_a + g_b + g_c} \right) g_a = \frac{U_a g_b + U_a g_c - U_b g_b - U_c g_c}{g_a + g_b + g_c} g_a = \\ &= \frac{(U_a - U_b) g_a g_b - (U_c - U_a) g_a g_c}{g_a + g_b + g_c} = U_{ab} \frac{g_a g_b}{g_a + g_b + g_c} - U_{ca} \frac{g_c g_a}{g_a + g_b + g_c}. \end{aligned} \quad (1,80)$$

Сравнивая полученное уравнение с соответствующим уравнением (1,77) при соединении треугольником, мы видим, что при одних и тех же значениях напряжений U_{ab} и U_{ca} ток I_a в обеих схемах будет одинаков, если будут соблюдены два соотношения между проводимостями треугольника и звезды:

$$g_{ab} = \frac{g_a g_b}{g_a + g_b + g_c}$$

и

$$g_{ca} = \frac{g_c g_a}{g_a + g_b + g_c},$$

т. е. проводимость какой-либо ветви треугольника должна быть равна произведению проводимостей двух ветвей звезды, примыкающих к тем

же точкам цепи, деленному на сумму проводимостей всех трех ветвей звезды.

Подобные же соотношения получаются из условия неизменности токов I_b и I_c при переходе от звезды к треугольнику.

Хотя для каждого из трех токов и получается при этом по два условия неизменности, однако три из шести соотношений оказываются тождественными с тремя остальными. Таким образом эквивалентный данной звезде треугольник должен обладать следующими проводимостями своих ветвей:

$$\left. \begin{aligned} g_{ab} &= \frac{g_a g_b}{g_a + g_b + g_c}; \\ g_{bc} &= \frac{g_b \cdot g_c}{g_a + g_b + g_c} \\ g_{ca} &= \frac{g_c \cdot g_a}{g_a + g_b + g_c}. \end{aligned} \right\} \quad (1, 81)$$

и

Каждое из этих выражений может быть получено из двух остальных путем круговой замены индексов.

Полученные формулы можно преобразовать таким образом, чтобы они выражали сопротивления эквивалентного треугольника через известные сопротивления звезды. Так как

$$g_a + g_b + g_c = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a R_b R_c},$$

то

$$R_{ab} = \frac{1}{g_{ab}} = \frac{g_a + g_b + g_c}{g_a g_b} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a R_b R_c} R_a R_b =$$

$$= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c}, \quad (1, 82)$$

или

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}. \quad (1, 83)$$

Путем круговой замены индексов получаем аналогично

$$\left. \begin{aligned} R_{bc} &= R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a} \\ R_{ca} &= R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}. \end{aligned} \right\} \quad (1, 83)$$

и

Выведем теперь формулы, по которым можно было бы произвести обратное преобразование, т. е. данный треугольник заменить эквивалентной звездой.

Обозначив

$$D = R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a,$$

представим только что полученные формулы в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} R_{ab} &= \frac{D}{R_c}; & R_{bc} &= \frac{D}{R_a}; & R_{ca} &= \frac{D}{R_b}, \\ R_a &= \frac{D}{R_{bc}}; & R_b &= \frac{D}{R_{ca}}; & R_c &= \frac{D}{R_{ba}} \end{aligned} \right\} \quad (1, 84)$$

или

и найдем их попарные произведения:

$$R_a R_b = \frac{D^2}{R_{bc} R_{ca}}; \quad R_b R_c = \frac{D^2}{R_{ca} R_{ab}}$$

и

$$R_c R_a = \frac{D^2}{R_{ab} R_{bc}}.$$

Подставляя их в вышеприведенное выражение D , получим

$$D = \frac{D^2}{R_{bc} R_{ca}} + \frac{D^2}{R_{ca} R_{ab}} + \frac{D^2}{R_{ab} R_{bc}},$$

откуда, сокращая на D и приводя правую часть к общему знаменателю,

$$1 = D \frac{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}{R_{ab} R_{bc} R_{ca}}$$

и, следовательно,

$$D = \frac{R_{ab} R_{bc} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Получив, таким образом, выражение D через известные теперь сопротивления треугольника, подставляем его в формулы (1, 84) и после сокращения одного из сопротивлений находим:

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ R_b &= \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ R_c &= \frac{R_{bc} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \end{aligned} \right\} \quad (1, 85)$$

т. е. сопротивления звезды выражаются через сопротивления треугольника совершенно так же, как проводимости треугольника были выражены через проводимости звезды.

Применение описанных преобразований звезды в треугольник и обратно для расчета токов в разветвленной цепи известно под названием метода Кеннели.

Пример 1, 16. Потенциалы вершин звезды (фиг. 1, 32) $U_a = 74$ В; $U_b = 22$ В; $U_c = 10$ В, а сопротивления ее ветвей $R_a = 2$ Ω; $R_b = 4$ Ω и $R_c = 8$ Ω. Определить токи в ветвях.

Заменяем звезду эквивалентным треугольником (фиг. 1, 31). Его сопротивления по формулам (1, 83):

$$R_{ab} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{8} = 7 \text{ Ω};$$

$$R_{bc} = 4 + 8 + \frac{4 \cdot 8}{2} = 28 \text{ Ω};$$

$$R_{ca} = 8 + 2 + \frac{8 \cdot 2}{4} = 14 \text{ Ω}.$$

Напряжения на сторонах треугольника:

$$U_{ab} = U_a - U_b = 74 - 22 = 52 \text{ В};$$

$$U_{bc} = U_b - U_c = 22 - 10 = 12 \text{ В};$$

$$U_{ca} = U_c - U_a = 10 - 74 = -64 \text{ В}.$$

Токи в его ветвях:

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}} = \frac{52}{7} \text{ А};$$

$$I_{bc} = \frac{U_{bc}}{R_{bc}} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \text{ А};$$

$$I_{ca} = \frac{U_{ca}}{R_{ca}} = -\frac{64}{14} = -\frac{32}{7} \text{ А}.$$

Токи в подводящих проводах треугольника, равные токам в ветвях звезды:

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = \frac{52}{7} - \left(-\frac{32}{7}\right) = \frac{84}{7} = 12 \text{ A};$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = \frac{3}{7} - \frac{52}{7} = -\frac{49}{7} = -7 \text{ A};$$

$$I_c = I_{ca} - I_{bc} = \frac{32}{7} - \frac{3}{7} = \frac{29}{7} = 4 \text{ A}.$$

Таким образом ток I_a является притекающим к точке a , а токи I_b и I_c — утекающими от соответствующих точек.

1,25. Передача энергии постоянным током

При передаче энергии по проводам от генератора к приемнику часть энергии теряется в проводах, превращаясь в тепло. Напряжение U_2 на зажимах приемника всегда меньше напряжения U_1 на зажимах генератора. Если обозначить R_{np} — сопротивление каждого из проводов, соединяющих генератор с приемником (фиг. 1,33), то

$$U_1 = IR_{np} + U_2 + IR_{np},$$

откуда

$$U_2 = U_1 - 2IR_{np}, \quad (1,86)$$

т. е. напряжение у приемника меньше напряжения генератора на величину

$u = 2IR_{np}$, называемую потерей (или падением) напряжения в проводах.

Потеря мощности в проводах пропорциональна потере напряжения и составляет

$$2I^2R_{np} = 2I \cdot IR_{np} = Iu. \quad (1,87)$$

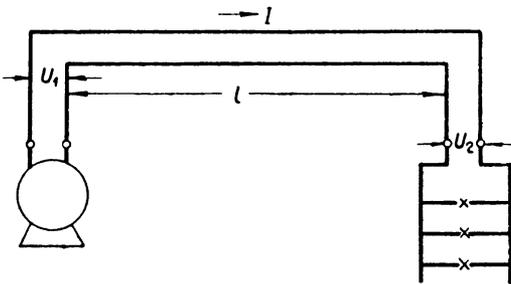
Потеря напряжения в проводах пропорциональна току. Поэтому с изменением тока приемника меняется и напряжение на его зажимах, уменьшаясь от величины $U_2' = U_1$ при холостом ходе ($I = 0$) до величины $U_2 = U_1 - 2IR_{np}$ при токе I .

Большая потеря напряжения не должна допускаться не только потому, что при этом значительное количество энергии бесполезно тратится на нагревание проводов, не менее важным является также и то обстоятельство, что при этом напряжение у приемника сильно колеблется с изменением нагрузки.

Если l — расстояние приемника от генератора (т. е. длина каждого из проводов), S — сечение провода, а ρ — его удельное сопротивление, то

$$R_{np} = \rho \frac{l}{S} \quad \text{и} \quad u = 2IR_{np} = 2\rho \frac{I \cdot l}{S}. \quad (1,89)$$

При заданном токе I и длине l величина потери напряжения u может быть уменьшена путем увеличения сечения проводов и, следовательно, уменьшения их сопротивления. Однако увеличение сечения провода связано с увеличением количества проводникового материала, а следовательно, с увеличением стоимости всей установки. При расчете проводов сечение их должно быть выбрано так, чтобы, с одной стороны, вся установка была наиболее экономичной и чтобы, с другой стороны, ко-



Фиг. 1,33.

лебания напряжения у приемника не превышали некоторых допустимых пределов.

Величина допустимого колебания напряжения зависит от характера нагрузки потребителя.

Выбор сечения проводов при заданных мощности приемника P_2 , напряжении на его зажимах U_2 и допустимой потере напряжения в проводах u производится следующим путем:

Зная P_2 и U_2 , можем найти потребляемый ток

$$I = \frac{P_2}{U_2}.$$

Из формулы

$$u = 2IR_{np} = 2I\rho \frac{l}{S}$$

находим

$$S = \frac{2I\rho l}{u}. \quad (1, 86)$$

Сечение S можно найти и по другой формуле, объединяющей две предыдущие, а именно:

$$S = \frac{2\rho P_2 l}{u U_2}.$$

Кроме расчета на потерю напряжения сечение проводов сети должно быть достаточным в отношении допускаемого нагрева.

При передаче заданной мощности P_2 ток обратно пропорционален напряжению.

Потеря напряжения в проводах при одинаковых сечениях прямо пропорциональна току i , следовательно, обратно пропорциональна напряжению. Потеря мощности пропорциональна квадрату тока i , следовательно, обратно пропорциональна квадрату напряжения.

Если потерю напряжения в проводах выразить в процентах от напряжения потребителя, введя обозначение

$$\varepsilon = \frac{u}{U_2} \cdot 100,$$

то, подставляя сюда значение u из (1, 89), получим

$$\varepsilon = \frac{2I\rho l}{U_2 S} \cdot 100,$$

или подставляя $I = \frac{P_2}{U_2}$,

$$\varepsilon = \frac{2\rho P_2 l}{U_2^2 S} \cdot 100,$$

откуда

$$S = \frac{2P_2 \rho l}{\varepsilon U_2^2} \cdot 100. \quad (1, 87)$$

Последняя формула показывает, что при заданных передаваемой мощности, расстояний от станции до приемника и процентном падении напряжения в проводах допускаемое сечение проводов обратно пропорционально квадрату напряжения.

Поэтому при передаче больших мощностей на далекие расстояния для получения технически и экономически приемлемых сечений проводов пользуются высоким напряжением.

Пример 1, 17. Расстояние от генератора до потребителя $l = 100$ м. Мощность потребителя $P_2 = 10$ kW. Напряжение $U_2 = 220$ V. Допустимая потеря напряжения $\varepsilon = 2\%$. Определить сечение медных проводов.

Так как $\varepsilon = 2\%$, то $u = 0,02 \cdot 220 = 4,4$ V.

Ток

$$I = \frac{P_2}{U_2} = \frac{10\,000}{220} = 43 \text{ А.}$$

По формуле (1, 85) находим

$$S = \rho \frac{2l}{u} = 0,0175 \frac{2 \cdot 43 \cdot 100}{2,4} = 34,5 \text{ мм}^2.$$

Ближайшее большее стандартное сечение 35 мм². На нем можно остановиться, так как предельно допускаемый для этого сечения ток I порядка 125 А.

Пример 1, 18. Если бы при тех же значениях передаваемой мощности и расстояния напряжение было ниже, например, $U_2 = 120 \text{ В}$, то

$$I = \frac{P_2}{U_2} = \frac{10\,000}{120} = 83,4 \text{ А; } u = 0,02 \cdot 120 = 2,4 \text{ В,}$$

и сечение

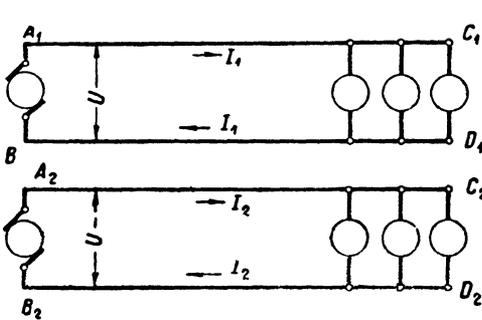
$$S = \rho \frac{2l}{u} = 0,0175 \frac{2 \cdot 83,4 \cdot 100}{2,4} = 121,5 \text{ мм}^2.$$

Ближайшее большее стандартное сечение, необходимое в этом случае, равно 150 мм².

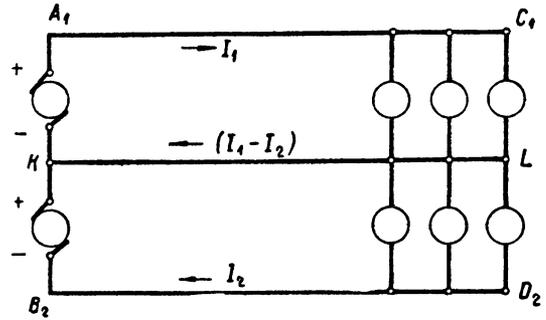
Расход меди в этом случае в 4,23 раза больше, чем при напряжении 220 В.

1, 26. Трехпроводная система

Чтобы уменьшить падение напряжения в проводах без повышения напряжения на зажимах приемников при распределении энергии постоянным током, иногда применяется так называемая трехпроводная система



Фиг. 1, 34.



Фиг. 1, 35.

постоянного тока. Сущность этой системы уясняется из рассмотрения фиг. 1, 34, где изображены два отдельных генератора, работающих каждый на свою группу приемников.

Если соединить точки B_1 с A_2 и D_1 с C_2 , а провода B_1D_1 и A_2C_2 заменить одним проводом KL (фиг. 1, 35), то ток в проводе KL будет равен разности токов $I_1 - I_2$, так как эти токи первоначально имели противоположное направление. Токи в крайних проводах останутся при этом без изменения.

При одинаковых нагрузках обеих групп, т. е. при $I_1 = I_2$, ток в проводе KL будет равен нулю, благодаря чему этот провод называется нулевым или уравнительным.

При отсутствии тока в нулевом проводе в нем не будет и потери напряжения. Поэтому, если сравнить трехпроводную линию с двумя двухпроводными того же сечения, общая потеря напряжения в первой оказывается в два раза меньше. Это позволяет уменьшить в два раза сече-

ние проводов трехпроводной линии, по сравнению с двухпроводными, сохраняя неизменной общую потерю напряжения. Если бы можно было при этом отказаться и от нулевого провода, который при одинаковой нагрузке обеих групп приемников оказывается излишним, то, имея в виду, что одновременно с уменьшением в два раза сечения каждого провода число проводов также уменьшается в два раза, мы должны были бы прийти к выводу, что трехпроводная система позволяет уменьшить расход меди (или алюминия) на провода в четыре раза.

Однако на практике нельзя, конечно, рассчитывать на полное равенство нагрузок обеих групп, и поэтому обычно нулевой провод сохраняется, но сечение его берется от $1/3$ до $1/2$ сечения крайних проводов; экономия материала получается при этом несколько меньше указанной выше величины.

Добавочным преимуществом трехпроводной системы является то обстоятельство, что потребитель располагает двумя напряжениями, напряжением U между крайним проводом и нулевым и напряжением $2U$ между обоими крайними проводами.

При случайном соединении с землей одного из крайних проводов (замыкание на землю) потенциал другого крайнего провода (относительно земли) оказывается равным $2U$ (или $-2U$).

Поэтому изоляция такой линии должна быть рассчитана на напряжение $2U$, и кроме того, по нормам линия будет отнесена к категории линий высокого напряжения, если $2U$ будет больше 250 V.

Если, однако, у той же линии соединить нулевой провод с землей (заземление), то потенциалы крайних проводов по отношению к земле ни при каких условиях не будут выше, чем U (или $-U$). На это напряжение и должна быть в этом случае рассчитана изоляция линии, и по нормам она будет считаться линией высокого напряжения лишь в том случае, если U будет больше 250 V, т. е. если $2U$ превысит 500 V.

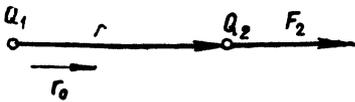
ГЛАВА 2

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

2.1. Поле точечного заряда

Опыт показывает, что между двумя заряженными (наэлектризованными) телами возникают силы механического взаимодействия. Их величина может быть определена измерением силы, которая необходима для того, чтобы удержать заряженное тело в неподвижном состоянии.

Результатом обработки опытных данных является закон Кулона, по которому сила взаимодействия двух неподвижных зарядов прямо пропорциональна величине взаимодействующих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Направление действия этой силы совпадает с направлением прямой, проходящей через оба заряда. Сила взаимодействия зарядов, или кратко, — кулонова сила — стремится увеличить расстояние между зарядами одного знака (отталкивание) и уменьшить расстояние между зарядами разного знака (притяжение). Все вышесказанное может быть выражено уравнением:



Фиг. 2, 1.

где (фиг. 2,1) Q_1 и Q_2 — взаимодействующие заряды;
 r — расстояние между ними;
 $\mathbf{r}^\circ = \frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор, направленный от заряда Q_1 к Q_2 ;

F_{12} — сила, с которой заряд Q_1 действует на заряд Q_2 ;

$$F_{12} = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{r}^\circ, \quad (2, 1)$$

k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Очевидно, что расстояние между зарядами и направление проходящей через оба заряда прямой имеют однозначный смысл лишь для непротяженных или так называемых точечных зарядов. Таких зарядов в действительности не существует: мы знаем, что минимальный возможный заряд обладает хотя и малой, но все же конечной (а не бесконечно малой) протяженностью. Однако закон Кулона можно применять без дальнейших оговорок в тех случаях, когда размеры наэлектризованных тел настолько малы по сравнению с расстоянием между ними, что не будет большой ошибкой вовсе пренебречь этими размерами и считать заряды точечными.

Так как закон Кулона определяет величину силы взаимодействия двух зарядов, то он может быть непосредственно применен лишь тогда,

когда взаимодействующие заряды находятся в вакууме, так как в противном случае наличие атомов, а следовательно, и зарядов промежуточной среды существенно изменило бы характер взаимодействия между зарядами. Вопрос о влиянии промежуточной среды на действие кулоновых сил будет разобран ниже, пока же ограничимся указанием на то, что взаимодействие n зарядов ($n > 2$) можно определить, исходя из принципа независимости действия сил, т. е. в предположении, что кулонова сила сохраняет свою величину независимо от того, действуют ли на рассматриваемые заряды еще какие-нибудь силы или нет.

Закон Кулона устанавливает связь между тремя физическими величинами: силой, электрическим зарядом и длиной. Если единицы измерения определены лишь для двух из этих величин, например, для силы и длины, то законом Кулона можно воспользоваться для определения единицы третьей величины, например, заряда, придавая коэффициенту пропорциональности k определенное, хотя и вполне произвольное, значение. Тем самым устанавливается не только единица для измерения новой величины, но и система единиц.

Например, выбирая в качестве единицы длины 1 см, единицы силы 1 дину и придавая коэффициенту пропорциональности в законе Кулона значение единицы (отвлеченное число), мы получим для электрического заряда производную единицу

$$g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Это — абсолютная электростатическая единица заряда, равная заряду $2,095 \cdot 10^9$ протонов¹. Закон Кулона в абсолютной электростатической системе единиц записывается в виде уравнения

$$F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} r^0.$$

При равенстве электрических зарядов $Q_1 = Q_2 = Q$ из выражения закона Кулона мы получаем, что

$$Q = \sqrt{F r^2}.$$

Так как единицей F является дина, равная $g \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$, а единицей r^2 — cm^2 , мы получаем в качестве единицы Q — $g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ sec}^{-1}$.

Сила взаимодействия между двумя зарядами может быть представлена как произведение напряженности электрического поля, создаваемого одним из этих зарядов, на величину другого заряда, т. е.

$$F_2 = E_1 \cdot Q_2,$$

где E_1 — напряженность поля, создаваемого зарядом Q_1 в той точке, где находится заряд Q_2 .

Таким образом

$$E_1 = \frac{F_2}{Q_2}.$$

Подставляя F_2 по (2,1), получим для напряженности электрического поля точечного заряда выражение²

$$E = k \frac{Q r^0}{r^2},$$

¹ Кулон = $3 \cdot 10^9$ абсолютных электростатических единиц заряда.

² Индекс 1 у E_1 и Q_1 опущен.

которое показывает, что в любой точке шаровой поверхности радиуса r , описанной вокруг точечного заряда Q , напряженность поля имеет одну и ту же величину, пропорциональную величине заряда и обратно пропорциональную квадрату радиуса этой поверхности или можно сказать обратно пропорциональную величине самой шаровой поверхности $4\pi r^2$. Таким образом, чтобы создать во всех точках шаровой поверхности радиуса r одинаковое по величине радиальное электрическое поле E , нужно в центре этой поверхности поместить точечный заряд

$$Q = \frac{1}{k} E \cdot r^2 = \frac{1}{4\pi k} \cdot E \cdot 4\pi r^2.$$

Обозначая через ϵ_0 постоянную величину $\frac{1}{4\pi k}$, получим

$$Q = \epsilon_0 E 4\pi r^2, \quad (2, 2)$$

или

$$E = \frac{Q r^0}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2}. \quad (2, 3)$$

Постоянная ϵ_0 называется диэлектрической проницаемостью вакуума.

Размерность ее в практической системе единиц легко может быть определена из уравнения (2, 2)

$$[\epsilon_0] = \frac{[Q]}{[E] \cdot [4\pi r^2]} = \frac{C}{\frac{V}{cm} \cdot cm^2} = \frac{A \cdot sec}{V \cdot cm} = F/cm^1.$$

Численное значение диэлектрической проницаемости вакуума $\epsilon_0 = 0,886 \cdot 10^{-13}$ определяется экспериментально, например, путем измерения силы взаимодействия между двумя известными зарядами, помещенными в вакууме на заданном расстоянии друг от друга, и дальнейшего подсчета по закону Кулона, который после подстановки $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ приобретает вид

$$F_2 = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon_0 4\pi r^2} \cdot r^0. \quad (2, 4)$$

Если электрическое поле создается не одним, а несколькими точечными зарядами, то его напряженность в любой точке определяется как геометрическая сумма напряженностей поля, создаваемых отдельными зарядами:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum E_k, \quad (2, 5)$$

где E_k от каждого заряда может быть вычислено по формуле (2,3).

Пример 2,1. Определить величину точечного заряда, создающего на расстоянии 2 см поле с напряженностью 40 kV/cm.

По формуле (2, 3)

$$Q = \epsilon_0 \cdot E \cdot 4\pi r^2 = 0,886 \cdot 10^{-13} \cdot 40\,000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 4 = 0,178 \cdot 10^{-6} C.$$

2,2. Потенциал электростатического поля

Электрическое поле можно считать вполне известным, если задано значение вектора напряженности поля в каждой его точке. Иными словами, поле вполне определяется при помощи величины, численно равной

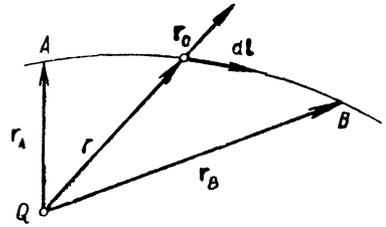
¹ В практической системе единиц $\frac{A \cdot sec}{V}$ является единицей емкости и носит название фарады (обозначение F). Поэтому $[\epsilon_0] = F/cm$.

силе, действующей на единичный заряд, помещенный в произвольную точку поля. Эта возможность определить поле не является единственной: мы увидим сейчас, что электростатическое поле может быть также вполне определено, если известна величина работы, необходимой для перемещения пробного заряда из одной точки поля в другую.

Возьмем в поле заряда Q (фиг. 2,2) две произвольные точки A и B . При перемещении заряда Q_1 вдоль пути l из точки A в точку B совершается работа

$$A = \int_A^B \mathbf{F} \, dl = Q_1 \int_A^B \mathbf{E} \, dl. \quad (2,6)$$

Если при этом направление перемещения заряда Q_1 совпадает с направлением силы F (или проекция силы на направление перемещения совпадает с этим последним, а не противоположно ему), то работа будет производиться за счет энергии поля, обуславливая ее убыль. Наоборот, если перемещение заряда происходит в направлении, противоположном действию силы, то энергия должна подводиться извне, следствием чего является увеличение энергии поля. Произведенная силами поля работа может быть представлена как уменьшение потенциальной энергии заряда, перемещенного из одной точки поля в другую:



Фиг. 2, 2.

$$A = W_A - W_B.$$

Отношение уменьшения потенциальной энергии заряда, перемещенного из одной точки поля в другую, к величине этого заряда Q_1 называется разностью потенциалов $U = U_A - U_B$ данных точек поля (см. § 1, 2).

Таким образом

$$A = Q_1 \cdot (U_A - U_B), \quad (2,7)$$

где

$$U_A - U_B = \int_A^B \mathbf{E} \, dl, \quad (2,8)$$

как это видно из сравнения (2,7) и (2,6).

Что касается самих потенциалов точек, т. е. U_A и U_B , а не их разности, они могут быть определены как отношение потенциальной энергии, которой обладает заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$U_A = \frac{W_A}{Q} \quad \text{и} \quad U_B = \frac{W_B}{Q}.$$

Но если изменение потенциальной энергии, происходящее при перемещении заряда, является вполне определенной и измеримой величиной, то энергия заряда, расположенного в той или иной точке поля, является по существу дела столь же неопределимой величиной, как и потенциал этой точки (см. § 1, 2).

Однако можно условно определить энергию заряда, расположенного в данной точке, или как величину работы, совершаемой силами поля при перенесении заряда из данной точки на поверхность земли (принятие

потенциала земли равным нулю) или как работу, которую могут произвести силы поля при перемещении заряда из данной точки в точку, бесконечно удаленную (принятие потенциала бесконечно удаленной точки равным нулю). Оба эти определения являются вполне произвольными.

Выражение для определения потенциала точки A в соответствии с вторым из приведенных здесь определений может быть получено из уравнения (2,8), если точку B отнести в бесконечность и если положить $U_B = U_\infty = 0$. Тогда

$$U_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \, dl. \quad (2,9)$$

Для поля точечного заряда

$$U_A = \int_A^\infty \frac{Q \, r^\circ \, dl}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi} \int_A^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi} \left| -\frac{1}{r} \right|_{r_A}^\infty,$$

т. е. потенциал в точке A на расстоянии r_A от заряда

$$U_A = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r_A},$$

или, опуская индексы при U и r ,

$$U = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r}. \quad (2,10)$$

Как было показано в § 1,2, существует простая зависимость между производной потенциала по произвольному направлению и проекцией вектора \mathbf{E} на это направление:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E \cos(\mathbf{E}, \mathbf{l}). \quad (2,11)$$

Действительно, в случае точечного заряда

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial l} = -\frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial l}.$$

Но

$$\frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = E, \quad \text{а} \quad \frac{\partial r}{\partial l} = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{dl}) = \cos(E, \mathbf{dl}),$$

так как направления \mathbf{E} и \mathbf{r} совпадают, поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -E \cdot \cos(\mathbf{E}, \mathbf{dl}),$$

или

$$E \cdot \cos(\mathbf{r}, \mathbf{dl}) = -\frac{\partial U}{\partial l}.$$

Как видно из уравнения (2,10), потенциал любой точки поля однозначно определяется положением этой точки, также однозначно определяется и разность потенциалов между двумя точками поля.

Из уравнений (2,7) и (2,10) следует также и то, что работа, совершаемая при перемещении заряда Q_1 из точки A в точку B , равная

$$A = UQ_1 = \frac{Q \cdot Q_1}{\epsilon_0 4\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right),$$

зависит только от положения начальной и конечной точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение заряда. Таким образом при перемещении заряда Q_1 из точки A в точку B по пути 1 (фиг. 2, 3) и из точки B в точку A по пути 2 совершаемая работа равна нулю:

$$A_{AB} + A_{BA} = \frac{Q \cdot Q_0}{\epsilon_0 4\pi} \left[\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) + \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \right] = 0.$$

Отсюда следует, что циркуляция вектора ¹ напряженности поля также равна нулю:

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0. \quad (2, 12)$$

При определении потенциалов в сложных полях, т. е. в полях, созданных несколькими зарядами, следует исходить из уравнений (2, 5) и (2, 9). Соединение этих двух уравнений в одно дает

$$\begin{aligned} U &= \int_A^\infty (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots) \, d\mathbf{l} = \left(\int_A^\infty \mathbf{E}_1 \, d\mathbf{l} + \int_A^\infty \mathbf{E}_2 \, d\mathbf{l} + \int_A^\infty \mathbf{E}_3 \, d\mathbf{l} + \dots \right) = \\ &= U_1 + U_2 + U_3 + \dots \end{aligned} \quad (2, 13)$$

Таким образом потенциал в сложном поле находится алгебраическим суммированием потенциалов полей точечных зарядов. Тот же самый результат можно получить и из того, что работа равнодействующей силы равна сумме работ составляющих сил.

Уравнение (2, 13) позволяет оценить выгоду, достигаемую введением понятия потенциала: алгебраическое суммирование, конечно, проще геометрического.

В качестве примера определим потенциал поля диполя. Диполем называется пара равных по величине и противоположных по знаку зарядов, расстояние между которыми l — постоянно (фиг. 2, 4).

Величина диполя характеризуется электрическим моментом его зарядов, равным произведению величины зарядов на расстояние между ними. Электрический момент диполя представляет собой вектор, направленный от отрицательного к положительному заряду:

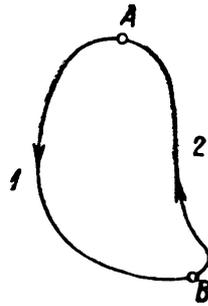
$$\mathbf{p} = Q \cdot \mathbf{l}. \quad (2, 14)$$

Из уравнений (2, 10) и (2, 13) следует, что потенциал в некоторой произвольной точке поля M равен

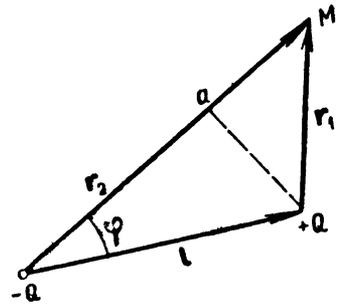
$$U = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Если расстояние между зарядами мало по сравнению с расстояниями от зарядов до рассматриваемой точки, то можно положить $r_1 \cdot r_2 \approx r^2$ и,

¹ Циркуляцией вектора называется его линейный интеграл, взятый по произвольному замкнутому пути.



Фиг. 2, 3.



Фиг. 2, 4.

кроме того, считать, что отрезок $Ma \approx r_1$ (точка a представляет собой основание перпендикуляра, опущенного из точки $+Q$ на отрезок r_2), а следовательно, $r_2 - r_1 \approx l \cos \varphi$.

Следовательно, потенциал поля диполя

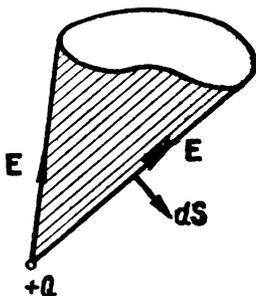
$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) \approx \frac{Ql \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

причем формула верна лишь при условии $r \gg l$.

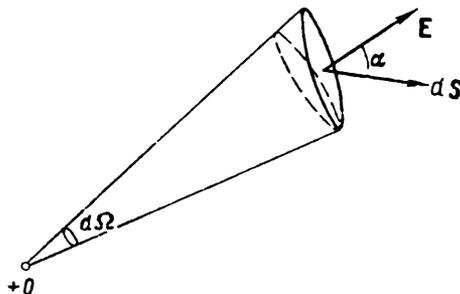
2.3. Теорема Гаусса

Наряду с линейным интегралом вектора напряженности поля весьма важным вспомогательным понятием является его поверхностный интеграл, или так называемый поток вектора.

Потоком вектора \mathbf{E} через поверхность dS называется скалярное произведение вектора элементарной площадки dS (его направление совпа-



Фиг. 2, 5.



Фиг. 2, 6.

дает с направлением положительной нормали к поверхности) и вектора \mathbf{E} — напряженности электростатического поля в точках, принадлежащих этой площадке. Величину площадки dS всегда можно взять настолько малой, чтобы во всех ее точках вектор \mathbf{E} сохранял постоянное значение.

Алгебраическое суммирование произведений $\mathbf{E} dS$, распространенное на некоторую поверхность S , даст поток вектора \mathbf{E} через эту поверхность:

$$N = \int_S \mathbf{E} dS. \quad (2, 15)$$

Если поверхность S выбрана таким образом, что в любой ее точке вектор напряженности поля перпендикулярен к нормали площадки dS , то поток вектора через эту поверхность равен нулю.

Выделим, например, в поле точечного заряда Q (фиг. 2,5) конус, в вершине которого находится этот заряд. Направление образующих конуса, очевидно, совпадает с направлением вектора напряженности поля, нормаль же к боковой поверхности конуса перпендикулярна образующей, а следовательно, и вектору \mathbf{E} . Такая поверхность называется боковой поверхностью силовой трубки, ее образующие — силовыми линиями¹; поток вектора напряженности поля через боковую поверхность силовой трубки равен нулю.

¹ В общем случае силовые трубки, конечно, могут быть и не конусами.

Определим теперь величину потока через торцевую поверхность силовой трубки. Поперечное сечение силовой трубки всегда можно взять настолько малым, чтобы ее торцевая поверхность представляла собой плоскую площадку, в общем случае эта площадка будет составлять с поперечным сечением трубки некоторый угол α (фиг. 2,6). Непосредственно из чертежа следует

$$dN = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha.$$

Площадь поперечного сечения трубки $dS \cos \alpha$ проще всего определить при помощи элементарного телесного угла $d\Omega$ ¹:

$$dS \cos \alpha = r^2 d\Omega.$$

Тогда

$$dN = E r^2 d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (2, 16)$$

Последнее соотношение позволяет вычислить величину потока через произвольную замкнутую поверхность, внутри которой находится заряд Q . Так как телесный угол для любой замкнутой поверхности, окружающей точку наблюдения, равен 4π ,² то величина соответствующего потока

$$N = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2, 17)$$

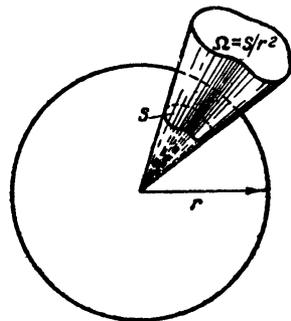
Это соотношение носит название теоремы Гаусса.

Характерно, что величина потока не зависит от положения заряда внутри поверхности. Это свойство позволяет обобщить теорему Гаусса для случая, когда внутри какой-нибудь поверхности находится произвольное число зарядов одного или разных знаков. Помещая все заряды в какую-нибудь одну точку внутри поверхности (величина потока при этом, очевидно, не меняется), мы получим точечный заряд, равный алгебраической сумме всех находящихся внутри поверхности зарядов. Для этого случая теорема Гаусса примет вид

$$N = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q. \quad (2, 18)$$

В частном случае, когда внутри рассматриваемой поверхности не содержится никаких зарядов, величина потока обращается в нуль.

Для доказательства возьмем в поле точечного заряда замкнутую поверхность S таким образом, чтобы она не охватывала зарядов (фиг. 2,8).



Фиг. 2,7.

¹ Напомним, что называется телесным углом конуса. Проведя сферу радиуса r , центр которой лежит в вершине конуса, мы найдем, что образующие конуса вырезают из этой сферы участок поверхности с площадью S (фиг. 2,7). Отношение этой площади к квадрату радиуса и служит мерой телесного угла. Для малых углов Ω элемент сферической поверхности, вырезаемый конусом, может быть заменен площадью поперечного сечения конуса (плоскостью, перпендикулярной к оси конуса).

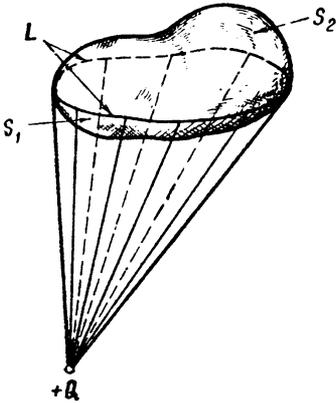
Очень важно заметить еще следующее: при определении телесного угла, под которым видна какая-либо поверхность из заданной точки, телесный угол считается положительным, если видна отрицательная сторона поверхности, и отрицательным, если видна положительная.

Когда речь идет о замкнутой поверхности, принято считать отрицательной ее внутреннюю сторону и положительной — наружную.

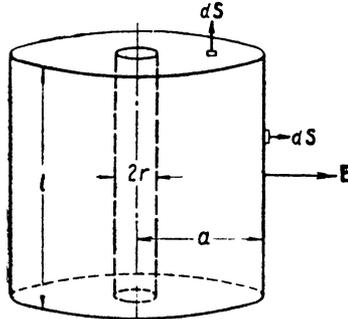
² Если точка наблюдения находится вне замкнутой поверхности, телесный угол равен нулю.

Тогда из точки $+Q$ можно провести пучок прямых, касательных к поверхности S . Геометрическим местом точек касания будет некоторая замкнутая линия L , все точки которой лежат на поверхности S , а геометрическим местом касательных — коническая поверхность. Поверхность S можно рассматривать как сумму поверхностей S_1 и S_2 , границей между которыми является кривая L .

Из уравнения (2,16) следует, что поток через поверхность S_1 равен $-\frac{Q \cdot Q}{4\pi \cdot \epsilon_0}$ (из точки Q видна внешняя сторона поверхности S_1), а поток через поверхность S_2 равен $+\frac{Q \cdot Q}{4\pi \epsilon_0}$ (видна внутренняя часть поверхности S_2). Следовательно, поток через поверхность S равен нулю.



Фиг. 2, 8.



Фиг. 2, 9.

Применение теоремы Гаусса позволяет значительно упростить решение ряда задач электростатики. Рассмотрим отрезок бесконечного цилиндра радиуса r (фиг. 2, 9), равномерно заряженного по своей длине; поверхностная плотность зарядов равна

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{Q_0}{2\pi r}$$

($Q_0 = \frac{Q}{l}$ — заряд на единицу длины). Из соображений симметрии следует, что

вектор напряженности поля направлен нормально поверхности заряженного цилиндра, а его величина в точках, равноудаленных от оси цилиндра, одинакова.

Чтобы найти напряженность поля в точке, удаленной от оси на расстояние a , построим мысленно еще один цилиндр, имеющий общую с данным цилиндром ось, радиус a и длину l . Вычислим поток вектора напряженности поля через замкнутую поверхность, составленную из боковой поверхности этого цилиндра и двух торцевых поверхностей, перпендикулярных к его оси. Поток через торцевые поверхности равен нулю вследствие перпендикулярности векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$, а поток через боковую поверхность

$$N = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi \cdot a \cdot l.$$

Но по теореме Гаусса тот же поток должен равняться заключенному внутри поверхности заряду, деленному на диэлектрическую проницаемость вакуума:

$$N = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q_0 l}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{Q_0}{\epsilon_0 2\pi \cdot a}. \quad (2, 19)$$

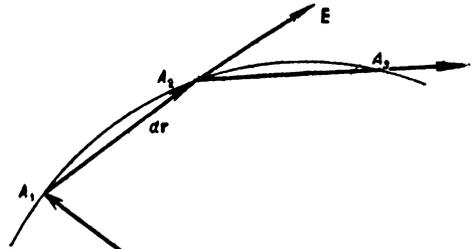
Диаметр заряженного цилиндра не влияет таким образом на величину напряженности поля, которое оказывается тождественным полю заряженной прямой (при одинаковом заряде на единицу длины Q_0).

2.4. Геометрия электростатического поля

Наиболее наглядным способом изображения всякого поля является графический. Конечно, чертеж не может полностью заменить вычислений, зато он дает возможность составить понятие о поле в целом. Чертеж электростатического поля должен дать ясную картину распределения его двух основных характеристик: вектора напряженности поля и потенциала.

В частности, чертеж должен давать представление не только о величине, но и о направлении вектора напряженности поля. Это может быть достигнуто построением семейства кривых, удовлетворяющих двум условиям: во-первых, касательная к любой кривой этого семейства в любой ее точке должна совпадать с направлением вектора напряженности поля в этой точке, во-вторых, густота этих линий должна быть пропорциональна абсолютной величине вектора.

Линия, удовлетворяющая первому из этих условий, называется силовой линией. Очевидно, что можно построить бесчисленное множество силовых линий. Второе условие ограничивает произвол построения: число линий связывается некоторым масштабом с величиной вектора E .



Фиг. 2, 10.

Предположим, что одна силовая линия уже построена (фиг. 2, 10) и попробуем найти ее уравнение. Разобьем кривую на отдельные участки (A_1A_2 , A_2A_3 и т. д.) и заменим ее в пределах каждого участка прямолинейным отрезком, это даст нам ломаную линию $A_1A_2A_3 \dots$, вписанную в кривую. Элемент ломаной линии представляет собой не что иное, как приращение радиуса вектора $r = ix + jy + kz$, проведенного из неподвижной точки O , служащей началом отсчета, в произвольную точку кривой.

В пределе, при достаточном сближении точек $A_1A_2 \dots$, приращение обратится в дифференциал dr , а секущая — в касательную, таким образом направление вектора dr будет совпадать с направлением касательной.

С другой стороны, вектор dr по условию параллелен вектору напряженности поля. Следовательно, дифференциальное уравнение силовой линии запишется в векторной форме в виде:

$$[E dr] = 0, \tag{2, 20}$$

а в координатной форме в виде:

$$[E dr] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

где E_x , E_y и E_z означают соответственные проекции вектора E на направления координатных осей. Раскрытие определителя приводит к уравнению

$$(E_y dz - E_z dy) i + (E_z dx - E_x dz) j + (E_x dy - E_y dx) k = 0.$$

Так как сумма трех взаимно перпендикулярных векторов обращается в нуль лишь тогда, когда каждое слагаемое в отдельности равно нулю,

то уравнение силовых линий принимает вид:

$$\begin{cases} E_y dz - E_z dy = 0, \\ E_z dx - E_x dz = 0, \\ E_x dy - E_y dx = 0, \end{cases}$$

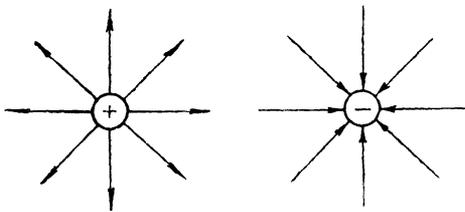
или окончательно

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (2, 21)$$

Силовые линии электростатического поля не могут быть замкнутыми, т. е. они должны иметь начало и конец или уходить в бесконечность. Для доказательства этого положения рассмотрим линейный интеграл вектора напряженности поля, взятый вдоль какой-нибудь силовой линии. Так как вектор \mathbf{E} в любой точке параллелен бесконечно малому элементу силовой линии, то подинтегральная функция в выражении $\int \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int E d\mathbf{r}$ будет всегда положительной величиной и никогда не обратится в нуль, следовательно, при интегрировании вдоль силовой линии интеграл $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$ будет принимать лишь положительные значения.

Предположим теперь, что силовая линия представляет собой замкнутую кривую. Из предыдущих рассуждений следует, что взятый по замкнутому контуру интеграл $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r}$ должен быть в этом случае положительной величиной. Но это противоречило бы уравнению (2, 12). Следовательно, силовые линии имеют начало и конец.

Так, в поле точечного заряда (фиг. 2, 11) семейство силовых линий представляет собой пучок прямых, в центре которого находится создающий поле заряд.



Фиг. 2, 11.

Принято считать, что силовые линии начинаются на положительном заряде (выходят из него) и кончатся на отрицательном заряде (входят в него).

Последнее остается справедливым для любого электростатического поля. Как бы ни были расположены создающие поле заряды, они всегда представляют собой совокупность элементарных точечных зарядов.

Следовательно, началом силовой линии всегда является положительный заряд, а концом — отрицательный.

Посмотрим теперь, каким образом можно удовлетворить второму условию построения силовых линий, а именно, чтобы их густота была пропорциональна абсолютной величине вектора напряженности поля. Под густотой, или плотностью, силовых линий мы подразумеваем число силовых линий, пронизывающих каждый кв. сантиметр поверхности, расположенной перпендикулярно к ним.

В осуществимости этого требования легко убедиться на примере поля точечного заряда (фиг. 2, 11). Проведем n силовых линий с таким расчетом, чтобы они равномерно распределились по сферической поверхности S произвольного радиуса r , центр которой совпадает с положением точечного заряда. Такая поверхность будет перпендикулярна к силовым линиям, а следовательно, их плотность

$$\delta = \frac{n}{S} = \frac{n}{4\pi r^2}.$$

С другой стороны, напряженность поля в любой точке поверхности S равна [см. уравнение (2,3)]

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2},$$

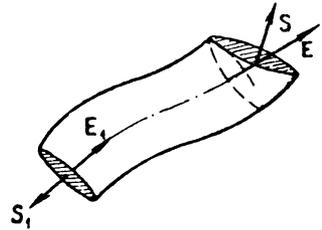
отсюда следует, что

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 n} \delta = a\delta,$$

где $a = \frac{Q}{\epsilon_0 n} = \text{const}$, т. е. абсолютная величина вектора напряженности поля пропорциональна плотности силовых линий.

Чтобы обобщить этот вывод для случая сложных полей, т. е. полей нескольких зарядов, возьмем в поле поверхность, через которую не проходит ни одной силовой линии и внутри которой не содержится зарядов (фиг. 2,12): объем, ограниченный такой поверхностью и двумя торцевыми поверхностями, носит название силовой трубки.

Существенное свойство силовой трубки состоит в том, что число линий, проходящих через любое ее поперечное сечение, остается постоянным. В самом деле, раз в трубке нет зарядов, то в ней не начинается и не оканчивается ни одной силовой линии. С другой стороны, по условию ни одна из проходящих внутри трубки линий не может выйти через ее боковую поверхность и ни одна из находящихся вне трубки линий не может войти в нее через эту поверхность. Следовательно, все линии, вошедшие в трубку через одну из торцевых поверхностей, должны будут пройти через любое сечение трубки и выйти через вторую торцевую поверхность.



Фиг. 2, 12.

Остается доказать, что плотность линий в любом сечении силовой трубки пропорциональна соответствующей напряженности поля; так как мы рассматриваем совершенно произвольную трубку, то доказательство будет общим, правильным для любых полей.

В общем случае значение вектора E в различных точках торцевой поверхности трубки S будет неодинаковым, а нормаль к поверхности S не будет совпадать с направлением вектора E . Рассмотрим поэтому силовую трубку с бесконечно малой торцевой поверхностью dS , на которой напряженность поля E можно считать постоянной. Применяя теорему Гаусса к произвольному отрезку этой трубки (фиг. 2,12), мы увидим, что суммарный поток, выходящий из этого отрезка, должен быть равен нулю, так как внутри отрезка нет зарядов. Иными словами, поток, входящий через сечение dS , должен быть равен потоку, выходящему через сечение dS , а следовательно, поток, проходящий через любое сечение dS силовой трубки, есть величина постоянная:

$$dN = E dS = \text{const.}$$

Если сечение dS взять нормально к E , то это равенство примет вид:

$$dN = E dS = \text{const.}$$

Если, далее, число силовых линий в трубке dn пропорционально потоку dN , т. е. если $dN = a \cdot dn$, то

$$a \cdot dn = E \cdot dS,$$

и следовательно,

$$E = a \cdot \frac{dn}{dS} = a \cdot \delta,$$

где плотность силовых линий $\delta = \frac{\delta n}{\delta S}$.

Таким образом плотность силовых линий δ в известном масштабе изображает напряженность поля в любой его точке.

Распределение потенциала может быть изображено при помощи поверхностей равного потенциала (или эквипотенциальных). Как показывает само название, разность потенциалов между любыми двумя точками такой поверхности равна нулю. Отсюда следует, что силовые линии будут всегда нормальны к поверхностям равного потенциала. Чтобы это доказать, предположим обратное, а именно, что силовая линия, а следовательно, и вектор \mathbf{E} образует с эквипотенциальной поверхностью некоторый угол α (фиг. 2, 13). Тогда вектор \mathbf{E} можно разложить на составляющие: нормальную E_n и тангенциальную

$$E_t = E \cos \alpha = E \mathbf{t}^\circ$$

(где \mathbf{t}° — единичный вектор).

Уравнение (2,11) показывает, что тангенциальная составляющая по абсолютной величине равна производной $\frac{\partial U}{\partial t}$, взятой по направлению вектора \mathbf{t}° , т. е. изменению потенциала вдоль отрезка dt . Но элемент dt принадлежит эквипотенциальной поверхности, а следовательно, изменение потенциала должно равняться нулю ($U = \text{const}$). Таким образом тангенциальная составляющая вектора \mathbf{E} также равна нулю, т. е. вектор \mathbf{E} должен быть перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности.

Итак, задача построения эквипотенциальных поверхностей сводится к отысканию поверхностей ортогональных к силовым линиям; уравнение таких поверхностей имеет вид

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (2, 22)$$

или в координатной форме

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = 0. \quad (2, 23)$$

При построении поверхностей равного потенциала целесообразно располагать их таким образом, чтобы разность потенциалов между двумя любыми соседними поверхностями была одинакова.

В качестве примера построим картину поля, созданного двумя бесконечными параллельными прямыми, линейная плотность зарядов которых равна $\pm Q_0$. Расстояние между прямыми $2l$. Если расположить эти прямые таким образом, чтобы их направление совпало с осью z , то в силу симметрии $E_z = 0$ и уравнения (2, 21) и (2, 23) упростятся:

$$E_x dy - E_y dx = 0; \quad (2, 24)$$

$$E_x dx + E_y dy = 0. \quad (2, 25)$$

Согласно (2,19) напряженность поля, созданного одной заряженной прямой,

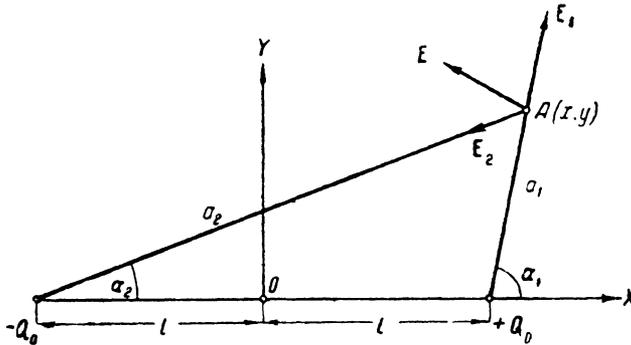
$$E = \frac{Q_0}{\epsilon_0 2\pi a}.$$

Для напряженности поля имеют место следующие очевидные равенства (фиг. 2, 14):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2;$$

$$E_x = E_{x_1} + E_{x_2} = E_1 \cos \alpha_1 + E_2 \cos \alpha_2;$$

$$E_y = E_{y_1} + E_{y_2} = E_1 \sin \alpha_1 + E_2 \sin \alpha_2.$$



Фиг. 2, 14.

Кроме того, непосредственно из чертежа (фиг. 2, 14) следует

$$a_1^2 = y^2 + (l - x)^2; \quad \sin \alpha_1 = \frac{y}{a_1}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{x - l}{a_1};$$

$$a_2^2 = y^2 + (l + x)^2; \quad \sin \alpha_2 = \frac{y}{a_2}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{x + l}{a_2}.$$

Вычисляем проекции вектора E :

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \alpha_1 + E_2 \cos \alpha_2 = \frac{Q_0 \cos \alpha_1}{\epsilon_0 2\pi a_1} - \frac{Q_0 \cos \alpha_2}{\epsilon_0 2\pi a_2} = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi} \left(\frac{x - l}{a_1^2} - \frac{x + l}{a_2^2} \right) = \\ &= \frac{Q_0}{\epsilon_0 2\pi} \left(\frac{x - l}{y^2 + (l - x)^2} - \frac{x + l}{y^2 + (l + x)^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y &= E_1 \sin \alpha_1 + E_2 \sin \alpha_2 = \frac{Q_0 \sin \alpha_1}{\epsilon_0 2\pi a_1} - \frac{Q_0 \sin \alpha_2}{\epsilon_0 2\pi a_2} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 2\pi} \left(\frac{y}{a_1^2} - \frac{y}{a_2^2} \right) = \\ &= \frac{Q_0}{\epsilon_0 2\pi} \left(\frac{y}{y^2 + (l - x)^2} - \frac{y}{y^2 + (l + x)^2} \right). \end{aligned}$$

Подстановка этих значений E_x и E_y в уравнения (2, 24) и (2, 25) дает после сокращения общих множителей

$$2xy \, dx + (l^2 + y^2 - x^2) \cdot dy = 0;$$

$$2xy \, dy + (x^2 - y^2 - l^2) \cdot dx = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем уравнение силовых линий

$$x^2 + (y - A)^2 = A^2 + l^2, \quad (2, 26)$$

и эквипотенциальных поверхностей

$$(x - B)^2 + y^2 = B^2 - l^2, \quad (2,27)$$

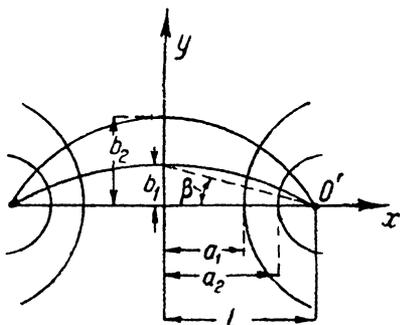
где A и B — постоянные интегрирования.

Таким образом силовые линии и эквипотенциальные поверхности (вернее их следы на плоскости чертежа) изобразятся семейством окружностей. Давая постоянным A и B различные значения, мы можем построить любое количество силовых линий и эквипотенциальных поверхностей. Отметим между прочим, что уравнение (2,26) независимо от значения постоянной A удовлетворяется подстановкой $y=0$; $x=\pm l$; это значит, что любая из силовых линий проходит через заряженные прямые.

Положив $A = \infty$ и $B = \infty$, мы получим следующие частные значения:

$$y = 0;$$

$$x = 0,$$



Фиг. 2, 15.

т. е. ось абсцисс представляет собой силовую линию, а ось ординат — след эквипотенциальной поверхности, уходящей в бесконечность. Потенциал этой поверхности равен нулю.

Из предыдущего следует, что две эквипотенциальных поверхности могут быть построены совершенно произвольно, но третья поверхность (равно как и все последующие) должна строиться с таким расчетом, чтобы разность потенциалов между любыми соседними эквипотенциальными поверхностями была постоянной. На этом основании строим еще одну поверхность на расстоянии a_1 от первой $x=0$ (фиг. 2, 15). Потенциал этой поверхности U_1 проще всего находится интегрированием вдоль силовой линии $y=0$:

$$U_1 = - \int_0^{a_1} E_x dx = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{a_1} \left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{l+x} \right) dx = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l+a_1}{l-a_1},$$

откуда

$$\frac{l+a_1}{l-a_1} = e^{\frac{2\pi\epsilon_0 U_1}{Q_0}},$$

или, обозначив

$$\lambda = e^{\frac{2\pi\epsilon_0 U_1}{Q_0}},$$

$$a_1 = l \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Увеличение потенциала U_1 вдвое равносильно возведению в квадрат параметра λ , следовательно, абсцисса следующей эквипотенциальной поверхности найдется из соотношения

$$a_2 = l \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$$

и т. д.

Аналогичные рассуждения приходится применять при построении силовых линий. Одна из силовых линий уже построена ($y=0$), другую строим по уравнению (2,26) на произвольном расстоянии b_1 (при $x=0$)

от первой. Вычислим поток через прямоугольную поверхность, одной стороной которой является отрезок Ob_1 (фиг. 2, 15), а другой — отрезок L , отложенный в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Во всех точках этой поверхности $x=0$, а следовательно,

$$E = E_x = -\frac{IQ_0}{\pi\epsilon_0(l^2 + y^2)}.$$

Поток вектора E

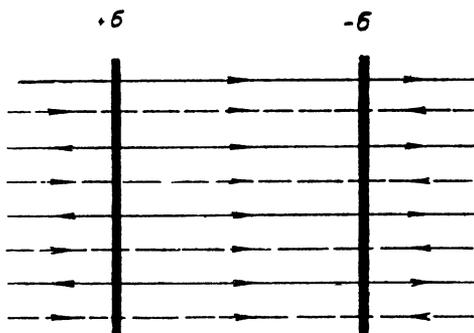
$$N = -\frac{Q_0 l L}{\pi\epsilon_0} \int_0^{b_1} \frac{dy}{l^2 + y^2} = -\frac{Q_0 L}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{b_1}{l}$$

пропорционален углу β_1 (фиг. 2, 15). Отсюда следует, что ордината следующей силовой линии изобразится отрезком Ob_2 , т. е. катетом, противолежащим углу $2\beta_1$, и т. д.

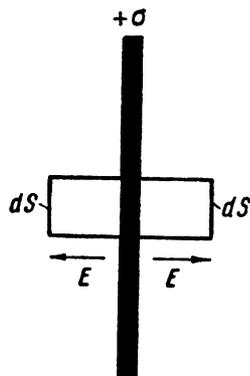
2.5. Однородное электростатическое поле

Если вектор напряженности электростатического поля остается во всех его точках неизменным и по величине и по направлению, то такое поле называется однородным. Однородное поле создается между двумя бесконечно большими параллельными пластинами, несущими разноименные заряды одинаковой плотности σ (фиг. 2, 16).

Практически однородное поле получается и между параллельными пластинами конечных размеров, искажаясь лишь вблизи их краев.



Фиг. 2, 16.



Фиг. 2, 17.

Напряженность поля, создаваемого бесконечно большими параллельными пластинами, может быть получена путем геометрического сложения напряженностей полей, создаваемых каждой пластиной в отдельности.

Напряженность поля одиночной бесконечно большой пластины (фиг. 2, 17), каждый квадратный сантиметр которой содержит заряд σ , может быть определена с помощью теоремы Гаусса.

Выделим на рассматриваемой плоскости бесконечно малую прямоугольную площадку dS и построим параллелепипед, расположенный перпендикулярно к нашей плоскости, пересекающей ее по этой площадке и имеющей торцевые площадки, равные по величине dS на одинаковых расстояниях от плоскости.

В силу симметрии можно утверждать, что напряженность поля E будет одинакова на обеих торцевых площадках и направлена перпенди-

кулярно к ним. Таким образом поток вектора \mathbf{E} , выходящий из параллелепипеда через каждую из торцевых площадок, будет равен $\mathbf{E} d\mathbf{S} = E \cdot d\mathbf{S}$. Поток, выходящий через боковые грани параллелепипеда, будет равен нулю, так как напряженность поля в любой его точке направлена перпендикулярно к заряженной плоскости и, следовательно, параллельна боковым граням параллелепипеда. Суммарный поток, выходящий через поверхность параллелепипеда $2E dS$, согласно теореме Гаусса должен быть равен заряду σdS , находящемуся внутри параллелепипеда, деленному на ϵ_0 , т. е.

$$2E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2,28)$$

Расстояние от плоскости не влияет на величину напряженности поля, которое, таким образом, оказывается однородным.

Принимая за положительное направление поля справа от плоскости, получим для поля по левую сторону плоскости выражение

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2,29)$$

Пластина, несущая отрицательный заряд $-\sigma$, создает поле обратного направления, по правую сторону такой пластины

$$E = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

а по левую

$$E = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

На фиг. 2, 16 силовые линии поля положительно заряженной пластины показаны сплошными, а силовые линии поля отрицательной пластины — пунктирными. В пространстве между пластинами, т. е. по правую сторону одной пластины и по левую сторону другой, складываются поля одинакового направления, и суммарная напряженность поля в любой точке

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (2,30)$$

Во внешнем же пространстве (по левую или правую сторону от обеих пластин) складываются поля противоположного направления, и

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0.$$

Пример 2, 1. Какова должна быть плотность разноименного заряда параллельных плоскостей, чтобы поле между ними имело напряженность 30 кВ/см?

По формуле (2, 30) находим

$$\sigma = \epsilon_0 E = 0,886 \cdot 10^{-13} \text{ C/V} \cdot \text{cm} \cdot 30\,000 \text{ V/cm} = 2,66 \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2.$$

2, 6. Проводники в электростатическом поле

Перейдем теперь к исследованию электростатического поля, в котором находится проводник. Изучение этого вопроса начнем с разбора отдельных типичных случаев.

1. Внесем в однородное поле проводящую плоскую пластину толщиной a и расположим ее таким образом, чтобы обе ее поверхности совпали с поверхностями равного потенциала (фиг. 2, 18).

Как известно, разность потенциалов вызывает в проводниках перемещение зарядов, поэтому в рассматриваемой пластине под действием поля электроны начнут перемещаться против направления поля, постепенно сосредотачиваясь у одной из поверхностей пластины. Одновременно у другой пластины будет накапливаться равный по величине положительный заряд. Оба заряда, расположившись равномерно на поверхностях пластины, создают свое поле, направленное внутри проводника против основного поля. Процесс перемещения зарядов в проводнике будет продолжаться до тех пор, пока внутри проводника внешнее поле не будет полностью компенсировано полем смещенных зарядов, расположившихся на поверхностях проводника, и результирующая напряженность поля в проводнике не станет равной нулю. Из уравнения (2,30) следует, что такой распад поля внутри проводника наступит в том случае, когда плотность зарядов на поверхности проводящей пластины окажется равной плотности зарядов, создающих внешнее поле.

Выделим мысленно в проводнике какую-нибудь замкнутую поверхность произвольной формы, лежащую всеми своими точками внутри проводника. Поток вектора напряженности поля через эту поверхность будет равен нулю, так как внутри проводника $E=0$. Из теоремы Гаусса следует, что сумма зарядов, заключенных внутри этой поверхности, также должна равняться нулю. Мы приходим к выводу, что в статическом состоянии заряды могут располагаться лишь на поверхности проводника, т. е. на границе между проводником и диэлектриком¹.

Подсчитаем, как изменится разность потенциалов U между внешними пластинами в связи с появлением в поле проводящей пластины. В отсутствии пластины

$$U = E(l_1 + a + l_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(l_1 + a + l_2),$$

а при наличии пластины

$$U' = E(l_1 + l_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(l_1 + l_2),$$

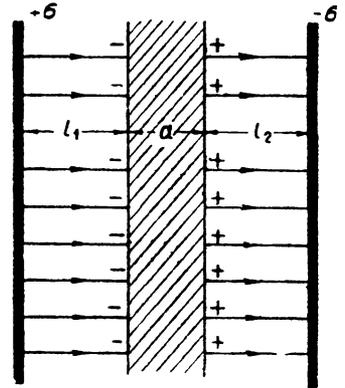
т. е. разность потенциалов уменьшилась на величину

$$U - U' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a,$$

пропорциональную толщине проводящей пластины.

Форма самого поля при этом не изменилась².

2. Отсюда следует, что если поместить в электростатическом поле бесконечно тонкую проводящую пластину, расположив ее таким образом, чтобы она совпала с поверхностью равного потенциала, то в распределе-



Фиг. 2, 18.

¹ Из этого вовсе не следует, как часто ошибочно думают, что и электрический ток проходит по поверхности проводника. Явление „поверхностного эффекта“, наблюдаемое при переменном токе, не имеет ничего общего со статическим распределением заряда по поверхности проводника.

² Необходимо обратить внимание на то, что в рассматриваемом случае постоянным оставался заряд на пластинах. Если бы поле между пластинами создавалось вследствие их присоединения к зажимам генератора, то при внесении металлической пластины разность потенциалов не изменилась бы, но изменились бы заряд и напряженность поля.

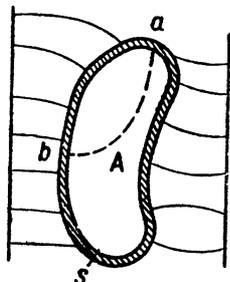
нии линий поля ничего не изменится. Это дает нам право в нужных случаях рассматривать любую эквипотенциальную поверхность, как проводящую — прием, которым мы будем пользоваться при решении ряда вопросов.

3. Расположим теперь проводящую пластину так, чтобы ее границы не совпадали с эквипотенциальными поверхностями. Между отдельными точками пластины возникает разность потенциалов, которая вызовет перемещение зарядов. Статическое состояние будет возможно лишь при соблюдении следующих условий: проводящая пластина должна быть поверхностью равного потенциала, а силовые линии должны идти перпендикулярно как к пластине, так и к внешним границам поля.

Выполнение этих требований возможно только при изменении конфигурации поля. На фиг. 2, 19 показано такое изменение конфигурации поля при внесении проводника в поле двух параллельных заряженных пластин.

Практика широко пользуется этим приемом, вводя проводники в электрические поля и тем самым видоизменяя эти поля желательным образом.

4. Внесем в поле замкнутую проводящую поверхность S произвольной формы, внутри которой не имеется электрических зарядов. Докажем, что напряженность поля внутри этой поверхности равна нулю, для этого достаточно доказать, что она равна нулю в некоторой произвольной точке A (фиг. 2, 19).



Фиг. 2, 19.

Предположим обратное, а именно, что в точке A напряженность поля отлична от нуля, тогда через эту точку может быть проведена силовая линия. Но силовая линия не может быть замкнутой (см. стр. 74), а следовательно, должна иметь начало и конец. Находясь внутри поверхности S концы силовой линии также не могут, так как это соответствовало бы наличию внутри поверхности зарядов, что противоречит заданным условиям.

Итак, силовая линия должна пересечь поверхность S в некоторых точках a и b . Вычислим линейный интеграл вектора напряженности поля между этими точками, т. е. величину

$$\int_a^b \mathbf{E} \, dl = \int_a^b E \, dl \cdot \cos(\mathbf{E}, dl) = \int_a^b E \, dl$$

вдоль силовой линии.

Этот интеграл должен равняться положительной величине, так как подинтегральная функция остается все время положительной. С другой стороны, результат должен равняться нулю, так как потенциалы точек a и b одинаковы. Тем самым доказана ложность основной предпосылки о возможности существования поля внутри замкнутой поверхности при отсутствии там зарядов.

Отсюда, в частности, следует, что если поместить внутри поверхности S какой-нибудь проводник, то на его поверхности не появится никаких зарядов т. е. он будет полностью защищен от влияния электростатического поля.

На этом основано устройство защитных экранов, применяемых, например, для защиты измерительных приборов от мешающих измерению влияний электрических полей.

2.7. Диэлектрики в электростатическом поле

В противоположность металлам внутриатомные и внутримолекулярные связи в диэлектриках настолько прочны, что под действием сил поля электроны, как правило, не отщепляются от атомов, а удерживаются на своих орбитах. При возникновении разности потенциалов между любыми двумя точками диэлектрика перемещения зарядов не происходит, и следовательно, в диэлектрике может существовать электростатическое поле.

Рассмотрим как наиболее простой пример поведение атома водорода в электростатическом поле. В отсутствии поля устойчивость системы, состоящей из протона и электрона, обусловлена равновесием между двумя силами: кулоновой силой взаимного притяжения протона и электрона и центробежной силой вращения электрона вокруг ядра¹.

Время обращения электрона вокруг протона настолько мало (порядка 10^{-16} сек.), что во всех без исключения технических задачах можно не рассматривать истинное положение электрона в тот или другой момент, а исходить из его среднего положения за один период. Это среднее положение электрона совпадает с положением ядра, и это дает нам право рассматривать атом как электрически нейтральную систему.

Условия, однако, изменятся, если атом окажется в электростатическом поле. И протон и электрон подвергнутся воздействию поля, причем направления действующих на них сил будут взаимно противоположны. К двум существовавшим ранее силам — кулоновой и центробежной — присоединяется третья сила — сила внешнего поля. Вращение электрона по его прежней орбите уже не обеспечивает равновесия, и орбита должна деформироваться. Среднее положение электрона, вращающегося по деформированной орбите, теперь не совпадает с положением ядра (фиг. 2, 20), а смещено на некоторое расстояние l . Это явление носит название поляризации атома.

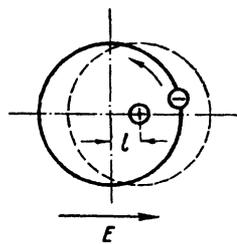
Направление отрезка l , очевидно, должно совпадать с направлением силы, вызвавшей деформацию, т. е. с направлением вектора напряженности поля. Деформация эта упругая, т. е. она исчезает вместе с полем. Что касается величины l , то опыт показывает, что в полях, напряженность которых не превосходит известного предела, деформация следует закону, аналогичному закону Гука: величина деформации пропорциональна деформирующей силе, т. е.

$$l \approx E.$$

Таким образом поляризованный атом водорода эквивалентен в электрическом отношении элементарному диполю, т. е. паре зарядов противоположных знаков, расположенных на определенном расстоянии друг от друга. Сложные молекулы эквивалентны системе, состоящей из совокупности диполей, которая может быть заменена одним эквивалентным диполем.

Диполь характеризуется при помощи вектора электрического момента, равного произведению величины заряда на расстояние между зарядами и направленного от отрицательного заряда к положительному. Суммирование диполей сводится к геометрическому сложению их моментов. Операция суммирования диполей уясняется из фиг. 2, 21.

¹ Строго говоря, существует еще третья сила: сила взаимного тяготения протона и электрона, однако порядок ее величины составляет около 10^{-39} кулоновой силы и ее можно не принимать во внимание.



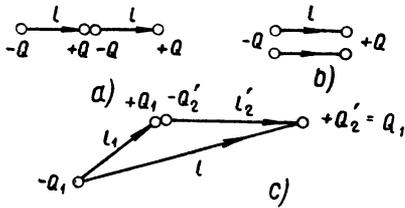
Фиг. 2, 20.

Два тождественных диполя (с одинаковым направлением, моментом и равными зарядами) дают диполь с двойным моментом. На фиг. 2,21,а показано такое расположение диполей, что соприкасающиеся заряды как бы нейтрализуются и система образует диполь с первоначальным зарядом, но удвоенным расстоянием. На фиг. 2,21,б показано такое расположение, что соприкасающиеся заряды складываются и образуют диполь с удвоенным зарядом при неизменившемся расстоянии. В обоих случаях момент результирующего диполя равен сумме моментов слагаемых, т. е. $2Ql$. Операция эта легко обобщается для любого числа диполей.

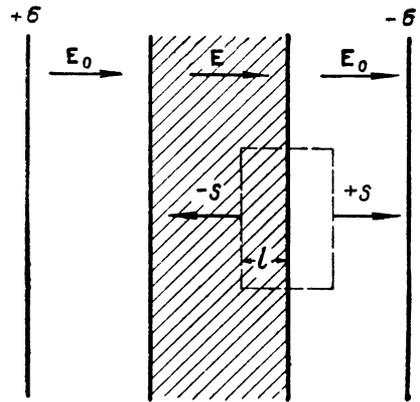
При суммировании двух произвольных диполей (фиг. 2,21,с) один из них (например, с зарядом Q_2) заменяется эквивалентным диполем, момент которого $p_2 = Q_2 l_2$, но заряд $Q_2' = Q_1$.

Для этого достаточно принять расстояние между его зарядами равным $l_2' = \frac{Q_2}{Q_1} l_2$. Тогда соприкасающиеся заряды нейтрализуются и получится диполь с моментом

$$p = Q_1 (l_1 + l_2') = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 = p_1 + p_2.$$



Фиг. 2, 21.



Фиг. 2, 22.

Молекулы некоторых веществ, в частности, молекулы, образованные не из нейтральных атомов, а из разноименных ионов, обладают электрическим моментом и в отсутствии поля. Но геометрическая сумма этих моментов в некотором конечном объеме равна нулю: векторы моментов направлены во всевозможные стороны, и все направления равновероятны. Но под влиянием поля происходит поворот молекул, в результате которого вектор момента оказывается совпадающим по направлению с вектором напряженности поля. Следовательно, конечный результат процесса поляризации таков же, как при поляризации атома.

Теперь выясним количественную сторону явления. Поместим в однородное поле сделанную из диэлектрика пластину так, чтобы ее поверхности совпали с поверхностями равного потенциала (фиг. 2, 22). Выделим в поле объем, ограниченный прямой призмой, вырезающей на поверхности раздела вакуума и диэлектрика площадку S . Поток вектора напряженности поля через поверхность этой призмы пропорционален сумме зарядов, находящихся внутри призмы.

Подсчитаем эти заряды. В части поля, расположенной в вакууме, никаких зарядов нет, в части призмы, занятой диэлектриком, в результате образования диполей окажется избыток положительных зарядов, так как часть отрицательных зарядов диполей останется за пределами рассматриваемого объема. Число оставшихся внутри объема положительных зарядов будет тем больше, чем интенсивнее поляризация.

Рассматриваемый объем можно взять такой малой толщины, чтобы внутри него вовсе не оставалось отрицательных зарядов, т. е. довести толщину диэлектрика внутри рассматриваемого объема как раз до величины l .

Так как l — очень малая величина, то можно считать, что заключенные в рассматриваемом объеме заряды распределены по поверхности S ; обозначим их плотность через P . Плотность поляризованных зарядов

$$P \approx E, \text{ или } \mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad (2,31)$$

где \mathbf{P} — вектор, имеющий направление вектора \mathbf{E} , по величине равный P , а α — так называемый коэффициент поляризации.

Итак, заряд, заключенный в рассматриваемой призме, равен PS , следовательно, поток через поверхность призмы равен $\frac{1}{\epsilon_0} PS$.

С другой стороны, величина того же самого потока может быть подсчитана по уравнению (2,15), из фиг. 2,22 следует, что она равна разности $E_0 S - ES$, где E_0 — напряженность поля в вакууме, а E — напряженность поля в диэлектрике.

Приравняв между собой оба результата и опуская общий множитель S , получим

$$\epsilon_0 (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}) = \mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}.$$

Положив для краткости

$$\epsilon_0 + \alpha = \epsilon > \epsilon_0, \quad (2,32)$$

мы получаем два основных уравнения:

$$\epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \epsilon \mathbf{E} \quad (2,33)$$

и

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}. \quad (2,34)$$

Очевидно, все предыдущие рассуждения сохраняют свою силу и в том случае, когда расстояние между поверхностью диэлектрика и внешними пластинами, несущими заряды $+\sigma$ и $-\sigma$, будет исчезающе малой величиной, т. е. когда диэлектрик заполнит весь объем поля.

Из уравнения (2,33) следует, что одни и те же заряды создают поля различной напряженности в зависимости от разделяющей их среды. Наибольшее значение напряженности поля получается в вакууме. Напряженность поля в любой, отличной от вакуума, среде будет в $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ раз меньше.

В частности, точечный заряд Q , находясь в произвольной среде, создает вокруг себя поле напряженностью

$$E = \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} \quad (2,35)$$

[см. уравнение (2,3)] и, следовательно, взаимодействует с зарядом Q_1 с силой

$$F = \frac{Q \cdot Q_1}{\epsilon 4\pi r^2}. \quad (2,36)$$

Величина ϵ , заменяющая здесь ϵ_0 , входившую в соответствующие уравнения для вакуума, называется диэлектрической проницаемостью диэлектрика (абсолютной), а отношение

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r, \quad (2,37)$$

показывающее, во сколько раз диэлектрическая проницаемость (абсолютная) данной среды больше диэлектрической проницаемости вакуума, называется относительной (по отношению к вакууму) диэлектрической проницаемостью, или диэлектрическим коэффициентом. Из уравнения (2,32) следует, что для неполяризуемой среды $\epsilon_r = 1$. Значения отно-

сительной диэлектрической проницаемости для некоторых материалов приведены в нижеследующей таблице.

ТАБЛИЦА

М а т е р и а л	ϵ_r	М а т е р и а л	ϵ_r
Вакуум	1	Фарфор	4,4—6
Воздух	1,0006	Слюда	5—8
Жидкий воздух	1,5	Мрамор	8,3
Бумага	1,8—2,6	Оптическое стекло	10
Керосин	2	Этиловый спирт	26
Трансформаторное масло	2,2	Глицерин	57
Шеллак	2,7	Вода	81
Лед	3,1	Сегнетова соль	до 20 000

Следует иметь в виду, что эти значения могут существенно меняться в зависимости от ряда физических условий, из которых особенно сильно сказывается влияние давления и температуры ¹.

Пример 2, 2. Две параллельные металлические пластинки разделены стеклянной пластинкой ($\epsilon_r = 10$) и заряжены до напряжения 120 V. Как изменится напряжение между ними, если вынуть стеклянную пластинку?

Принимая для воздуха $\epsilon \approx \epsilon_0$, получим из уравнения (2, 33) напряженность поля в воздухе

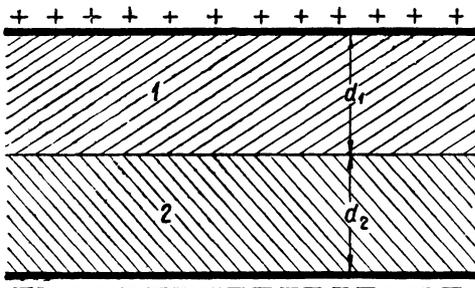
$$E_0 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E = \epsilon_r E = 10E.$$

Так как при неизменном расстоянии между пластинками напряжение между ними пропорционально напряженности поля, то

$$U_0 = 10 \cdot U = 10 \cdot 120 = 1\,200 \text{ V}.$$

2, 8. Многослойная изоляция

Изоляция, применяемая в технике, зачастую является не однородной, а комбинированной из различных диэлектриков. Расчет электрического поля усложняется здесь тем обстоятельством, что диэлектрическая проницаемость неодинакова в различных точках поля. При расчетах полей в однородной диэлектрической среде мы могли пользоваться соотношениями, выведенными для поля в вакууме, единственная вносимая нами поправка заключалась в увеличении в ϵ_r раз диэлектрической проницаемости вакуума, т. е. в замене во всех формулах величины ϵ_0 величиной ϵ . Для неоднородной среды подобный прием уже не годится.



Фиг. 2, 23.

Метод расчета полей в неоднородной среде лучше всего уясняется на простейшем примере двуслойного диэлектрика между двумя параллельными металлическими пластинами.

¹ Поэтому следует считать неправильным широко распространенный термин «диэлектрическая постоянная».

Параллельная этим пластинам поверхность раздела обоих диэлектриков является поверхностью равного потенциала, а следовательно, может быть заменена бесконечно тонкой проводящей прокладкой (фиг. 2, 23), на обеих сторонах которой сосредоточатся разноименные заряды с такой же плотностью σ , как и на внешних пластинах.

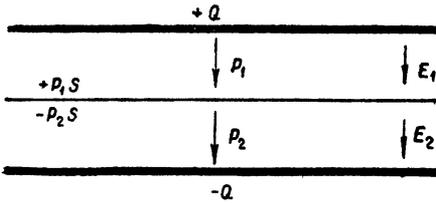
Обозначив ϵ_1 и ϵ_2 диэлектрическую проницаемость того и другого слоя диэлектрика, выразим по формуле (2,30) напряженность поля в каждом из этих слоев:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2}.$$

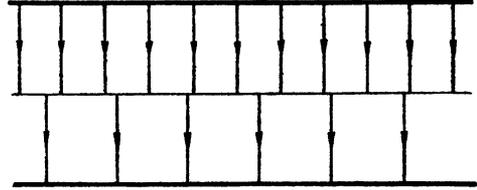
Деля друг на друга эти два выражения, получим

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (2, 38)$$

т. е. при переходе из одной среды в другую происходит скачкообразное изменение вектора напряженности поля, обратно пропорционального соответствующей диэлектрической проницаемости.



Фиг. 2, 24.



Фиг. 2, 25.

С другой стороны, в пределах каждого слоя поле является однородным, и напряжение, приложенное к каждому слою, может быть выражено формулами

$$U_1 = E_1 d_1 \quad \text{и} \quad U_2 = E_2 d_2,$$

откуда суммарное напряжение между внешними пластинами

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2. \quad (2, 39)$$

Решая совместно уравнения (2, 38) и (2, 39), получим

$$E_1 = \frac{U \cdot \epsilon_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{U \epsilon_1}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}. \quad (2, 40)$$

Поверхность раздела обоих диэлектриков оказывается при этом заряженной зарядами поляризованных атомов. Эти заряды имеют по обе стороны поверхности раздела, во-первых, различную плотность ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$) и различные знаки, как это видно на фиг. 2, 24.

Заряд на поверхности раздела равен $P_1 S - P_2 S$, что соответствует плотности заряда

$$\sigma_0 = P_1 - P_2. \quad (2, 41)$$

С другой стороны, согласно (2, 34)

$$P_1 - P_2 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2 = \epsilon_0 (E_2 - E_1) + \epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2,$$

или, так как согласно (2, 33) $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$,

$$P_1 - P_2 = \epsilon_0 (E_2 - E_1). \quad (2, 42)$$

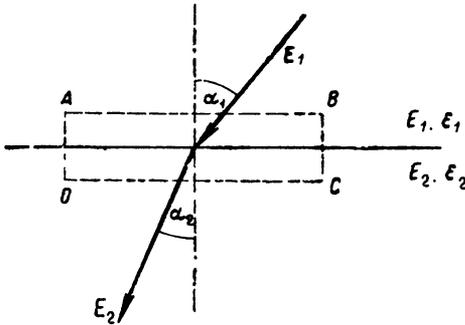
Сопоставляя (2, 41) и (2, 42), находим

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}. \quad (2, 43)$$

Так как силовые линии электростатического поля начинаются и кончаются на зарядах, то в неоднородной среде часть линий будет оканчиваться на поверхности раздела (фиг. 2, 25).

Явление усложняется, если поверхность раздела двух диэлектриков не перпендикулярна к направлению силовых линий, т. е. не является поверхностью равного потенциала. В этом случае на поверхности раздела происходит преломление силовых линий.

Предположим, что угол, образуемый силовой линией и нормалью к поверхности раздела, равен в первой среде α_1 и во второй среде α_2 (фиг. 2, 26). Вычислим циркуляцию вектора напряженности поля, взяв за путь интегрирования прямоугольник $ABCD$, где длина сторон $AB = CD = l$, а длина сторон $AD = BC$ настолько мала, что разностью потенциалов на концах этих сторон можно пренебречь:



Фиг. 2, 26.

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -E_1 \sin \alpha_1 l + E_2 \sin \alpha_2 l.$$

Но в силу уравнения (2, 12) полученный результат должен равняться нулю, что по сокращении на общего множителя l дает

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2. \quad (2, 44)$$

Рассматривая прямоугольник $ABCD$ как след на плоскости чертежа от некоторой замкнутой поверхности, применим к ней теорему Гаусса. Обозначая через S поверхности, следами которых являются отрезки AB и CD , и пренебрегая величиной потока через обе боковых поверхности, находим

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = -E_1 \cos \alpha_1 \cdot S + E_2 \cos \alpha_2 \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Внутри поверхности заключен заряд поляризованных атомов. Чтобы вычислить его величину, необходимо принять во внимание, что плотность заряда равна нормальной составляющей вектора поляризации. Поэтому

$$Q = P_1 S - P_2 S = S(P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \cos \alpha_2).$$

Принимая во внимание уравнение (2, 34), мы приходим к соотношению

$$E_1 \epsilon_1 \cos \alpha_1 = E_2 \epsilon_2 \cos \alpha_2 \quad (2, 45)$$

и, наконец, деля почленно равенства (2, 44) и (2, 45), — к окончательному результату

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (2, 46)$$

т. е. тангенсы углов между силовыми линиями и нормалью к поверхности раздела двух диэлектриков пропорциональны диэлектрическим проницаемостям.

2, 9. Емкость

Два проводника (обкладки), разделенные диэлектриком, образуют конденсатор. В простейшем конденсаторе обкладки имеют форму параллельных пластин, это — так называемый плоский конденсатор, который был довольно подробно изучен в предыдущих параграфах.

В плоском конденсаторе заряды распределяются равномерно по поверхности обкладок, между величиной заряда и его плотностью имеет

место прямая пропорциональность, плотность зарядов в свою очередь пропорциональна напряженности поля, наконец, напряженность однородного поля пропорциональна разности потенциалов на обкладках. Отсюда следует, что

$$Q = CU, \quad (2, 47)$$

где C — коэффициент пропорциональности между величиной заряда и обусловленной этим зарядом разностью потенциалов обкладок конденсатора. Этот коэффициент, или отношение заряда конденсатора к разности потенциалов на его обкладках, носит название емкости. Его принято всегда считать положительной величиной.

Название „емкость“ сложилось в ту эпоху, когда электричество мыслилось в виде жидкости, протекающей по проводнику. Название неудачно, так как оно создает неверное представление, будто конденсатор может вместить некоторое вполне определенное количество электричества. На самом деле величина емкости лишь показывает, насколько возрастет разность потенциалов обкладок при сообщении им того или иного заряда.

Аналогией электрической емкости может служить емкость сосуда при заполнении его газом. Количество газа в постоянном объеме прямо пропорционально давлению, здесь давление играет роль, аналогичную разности потенциалов, количество газа соответствует заряду, постоянное отношение между ними — емкости.

Эту аналогию можно продолжить: заполнение сосуда возможно лишь до определенного предела, обусловленного механической прочностью его стенок, т. е. их способностью противостоять увеличивающемуся давлению. Также и обкладки конденсатора могут увеличивать свой заряд лишь до тех пор, пока диэлектрик в состоянии выдерживать нарастающую разность потенциалов, а следовательно, и напряженность поля.

Уравнение (2, 47) позволяет установить единицу измерения емкости. За единицу емкости проще всего принять емкость такого конденсатора, обкладки которого при заряде в 1 С имеют разность потенциалов в 1 В. Эта единица называется фарадой (F):

$$1 \text{ фарада (F)} = \frac{1 \text{ кулон (C)}}{1 \text{ вольт (V)}}.$$

Для конденсаторов, с которыми имеет дело техника, эта единица слишком велика, а поэтому неудобна. Чаще встречаются производные единицы: микрофарада ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) и наннофарада ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$).

Подсчитаем величину емкости плоского конденсатора. Уравнение (2, 30) позволяет написать следующие равенства:

$$Q = \sigma S = \varepsilon ES,$$

а так как

$$E = \frac{U}{d},$$

где U — напряжение между обкладками конденсатора, а d — расстояние между ними, то

$$Q = \varepsilon \frac{U}{d} S,$$

откуда

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon S}{a} \quad (2, 48)$$

Таким образом емкость зависит лишь от геометрических размеров конденсатора и от вещества диэлектрика. Она не зависит ни от величины зарядов, сообщенных обкладкам, ни от разности потенциалов на обкладках, являясь, следовательно, неизменяющейся характеристикой системы.

2, 10. Энергия электрического поля

Подсчитаем величину той силы, с которой взаимодействуют две пластины плоского конденсатора. Сила, действующая на каждую из пластин, равна произведению ее заряда на напряженность поля, создаваемого другой пластиной. Так, например, на положительную пластину, заряд которой $Q = S\sigma$, где S — поверхность пластины, действует поле отрицательной пластины, напряженность которого

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon};$$

следовательно, кулонова сила

$$F = Q \cdot E_1 = S \cdot \sigma \frac{\sigma}{2\varepsilon} = S \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} = S\varepsilon \frac{E^2}{2}, \quad (2, 49)$$

где $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ — напряженность поля, создаваемого обеими пластинами.

Если под действием этой силы пластины придут в движение и расстояние между ними уменьшится на dx , то при этом будет совершена работа

$$dA = E dx = \varepsilon \frac{E^2}{2} \cdot S dx.$$

Если во время этого движения пластины не соединены с источником тока, то работа может совершаться лишь за счет запаса энергии в пространстве, занятом полем, в данном случае в пространстве между пластинами.

Уменьшив расстояние между пластинами до нуля, это приведет к взаимной нейтрализации зарядов, к распаду поля и к переходу всей энергии электростатического поля в механическую работу. Итак, механическая работа A , совершаемая при уменьшении расстояния a между пластинами до нуля, должна быть равна на основании закона сохранения энергии запасу энергии W в электростатическом поле, следовательно,

$$W = A = \int_0^a \varepsilon \cdot \frac{E^2}{2} \cdot S \cdot dx = \varepsilon \frac{E^2}{2} \cdot S \cdot a,$$

так как при изменении расстояния между пластинами E остается постоянным.

¹ В абсолютной электростатической системе CGS емкость плоского конденсатора вычисляется при помощи соотношения

$$C = \frac{S}{4\pi d}$$

и имеет размерность длины, в связи с этим абсолютной единицей емкости является сантиметр.

Нетрудно убедиться, что емкость в $9 \cdot 10^{11}$ см тождественна с емкостью в 1 F.

Величина $Sa = V$ представляет собой объем, занятый полем; так как поле однородно, и нет оснований предпочесть один из его участков другому, то мы можем считать, что энергия распределена в объеме V равномерно и, следовательно, плотность энергии, т. е. энергия, заключенная в единице объема,

$$W_0 = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon E^2}{2}. \quad (2, 50)$$

Мы пришли бы к тождественному результату, если бы подсчитали энергию электростатического поля, исходя из величины работы, подводимой извне и затрачиваемой источником тока на создание поля. Для того чтобы создать поле между пластинами, необходимо зарядить их; это достигается перенесением зарядов какого-нибудь одного знака с одной пластины на другую. Совершаемая при этом источником тока работа равна произведению переносимого заряда на разность потенциалов между пластинами. Последняя может быть вычислена по уравнению (2, 8), которое для однородного поля значительно упрощается: при интегрировании вдоль силовой линии (а результат интегрирования не зависит от пути) $\cos(\mathbf{E} \, d\mathbf{l})$ равен единице, а величина E имеет в однородном поле постоянное значение. Следовательно,

$$U = \int_0^a \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_0^a E \, dl = E \int_0^a dl = E \cdot a = \frac{\sigma}{\epsilon} a. \quad (2, 51)$$

При увеличении плотности зарядов одновременно возрастает и разность потенциалов, и для переноса каждой последующей порции зарядов источник затрачивает все большую работу. Для промежуточного значения плотности заряда σ работа, затрачиваемая при переносе заряда $dQ = S \, d\sigma$, равна

$$dA = U dQ = \frac{\sigma \cdot a}{\epsilon} \cdot S \, d\sigma.$$

Полная работа

$$A = \frac{Sa}{\epsilon} \int_0^{\sigma} \sigma \, d\sigma = \frac{S \cdot a}{\epsilon} \frac{\sigma^2}{2} = \epsilon \frac{E^2}{2} \cdot S \cdot a,$$

как это уже было выведено ранее.

Чтобы подсчитать энергию неоднородного поля, необходимо разбить его на объемы, настолько малые, чтобы в пределах такого элементарного объема можно было пренебречь неоднородностью поля. Энергия в элементе объема

$$dW = \frac{\epsilon E^2}{2} \cdot dV,$$

а полная энергия

$$W = \frac{\epsilon}{2} \int E^2 dV, \quad (2, 52)$$

причем интегрирование распространяется на весь объем поля.

Для вакуума уравнение (2, 50) принимает вид:

$$W'_0 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad (2, 53)$$

т. е. плотность энергии в диэлектрике больше плотности энергии в вакууме при той же напряженности поля E в

$$\frac{W_0}{W'_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r \text{ раз.}$$

Причина этого заключается в том, что энергия поля в диэлектрике складывается, во-первых, из энергии поля в межатомном пространстве (поле в вакууме) и, во-вторых, из энергии упругой деформации поляризованного диэлектрика.

Подсчитаем плотность энергии поляризации зарядов. На основании сказанного она должна равняться разности полной плотности энергии и той плотности энергии, которой поле обладало бы в вакууме:

$$W_0'' = W_0 - W_0' = \frac{\epsilon \cdot E^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{E^2}{2},$$

или в связи с уравнением (2, 34)

$$W_0 = \frac{1}{2} E \cdot P. \quad (2, 54)$$

Следовательно, полную плотность энергии поля можно выразить в такой форме:

$$W_0 = \frac{E}{2} (\epsilon_0 E + P).$$

Выражение, стоящее в скобках, может быть представлено как модуль векторной величины:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \cdot \mathbf{E}, \quad (2, 55)$$

называемой вектором электрического смещения.

Абсолютная величина этого вектора равна плотности заряда на обкладках конденсатора, так как плотность заряда связана с напряженностью поля таким же соотношением: $\sigma = \epsilon E$.

Таким образом

$$W_0 = \frac{ED}{2}. \quad (2, 56)$$

Пользуясь понятием емкости, можно значительно упростить выражение энергии поля. В процессе заряда конденсатора с любым диэлектриком увеличение заряда обкладок на величину dQ требует совершения работы

$$dA = U dQ.$$

Заменяя dQ через $C dU$ и приравнявая величину произведенной работы запасенной в конденсаторе энергии, мы получаем уравнение

$$W = \int_0^U CU dU = \frac{1}{2} CU^2. \quad (2, 57)$$

2, 11. Соединение конденсаторов

Когда приходится рассматривать несколько соединенных между собой конденсаторов, можно ввести понятие эквивалентного конденсатора, играющее важную роль в технических расчетах. Этим термином обозначается конденсатор, удовлетворяющий следующим условиям: во-первых, при установлении любой разности потенциалов между крайними зажимами системы конденсаторов и между соответствующими зажимами эквивалентного конденсатора, к последним должно подводиться одинаковое количество электричества (одинаковый заряд), во-вторых, эквивалентный конденсатор должен обладать энергией, равной сумме энергий заменяемых им конденсаторов.

Рассмотрим систему из n соединенных параллельно конденсаторов (фиг. 2, 27а), заряженных до некоторой общей разности потенциалов U ; m конденсаторов этой системы должны быть заменены одним эквивалентным.

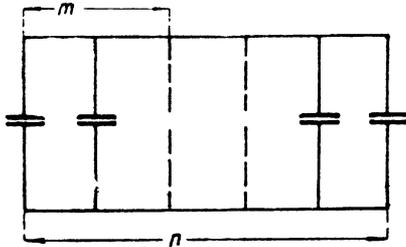
Исходя из условия равенства энергии и обозначая через C емкость эквивалентного конденсатора, мы можем написать, что

$$\frac{1}{2} CU^2 = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{2} C_k U^2 = \frac{1}{2} U^2 \sum_{k=1}^{k=m} C_k.$$

Сокращая общих множителей, находим величину емкости конденсатора, эквивалентного m параллельно соединенным конденсаторам:

$$C = \sum_{k=1}^{k=m} C_k. \quad (2, 58)$$

Нетрудно убедиться, что заряд эквивалентного конденсатора при напряжении U будет равен сумме зарядов на m замененных конденсаторах: для этого достаточно умножить на U обе части равенства (2, 58).



Фиг. 2, 27а.

Последовательно соединенные конденсаторы (фиг. 2, 27б) характеризуются тем, что заряды их обкладок равны между собой. В самом деле, если сообщить внешним обкладкам системы заряды $+Q$ и $-Q$, то в



Фиг. 2, 27б.

поле этих зарядов окажутся проводники (каждый проводник будет состоять из двух соседних пластин соединяющего их провода), внутри которых произойдет разделение зарядов.

Статическое состояние установится, когда заряд каждой обкладки будет равен Q .

Следовательно, заряд эквивалентного конденсатора также должен быть равен Q , а из условия равенства энергий следует, что

$$\frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{Q^2}{2C_k},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{C_k}. \quad (2, 59)$$

Умножая обе части последнего равенства на Q , мы получим, что

$$U = \sum_{k=1}^{k=m} U_k, \quad (2, 60)$$

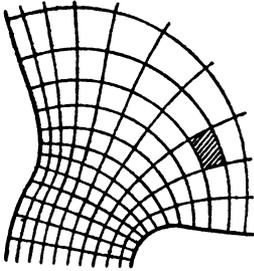
т. е. что при заряде Q на зажимах эквивалентного конденсатора установится разность потенциалов, равная разности потенциалов между крайними зажимами m последовательно включенных конденсаторов.

Более сложные случаи соединения конденсаторов часто могут быть сведены к двум рассмотренным здесь основным соединениям.

2,12. Неоднородные поля

„Рассчитать поле“, значит определить напряженность и потенциал поля во всех его точках, а также вычислить величину емкости между различными заряженными телами. При расчете неоднородных полей приходится исходить из дифференциальных уравнений поля, интегрируя их применительно к заданным пограничным условиям.

Наиболее часто встречающиеся на практике электростатические задачи обычно формулируются так: по заданному расположению электродов найти конфигурацию поля между ними.



Фиг. 2, 28.

Нельзя указать какого-нибудь общего метода для решения таких задач; некоторые поля, созданные, например, зарядами, распределенными по поверхности неправильной формы, вообще не поддаются точному расчету и могут быть построены лишь приблизительно. Однако в любом поле существует прямая пропорциональность между зарядом и разностью потенциалов. Для доказательства этого разобьем неоднородное поле (фиг. 2, 28) на элементарные объемы таким образом, чтобы каждый объем ограничивался поверхностью силовой трубки и двумя эквипотенциальными поверхностями.

Эти силовые трубки выбираем таким образом, чтобы заряды на их концах были одинаковы, а эквипотенциальные поверхности — так, чтобы были одинаковы разности потенциалов между двумя соседними поверхностями.

Если заряд на поверхности электрода равен Q , а число построенных нами силовых трубок n , то заряд, сосредоточенный на концах каждой трубки,

$$\Delta Q = \frac{Q}{n}.$$

Эквипотенциальные поверхности мы проводим таким образом, чтобы они расщипывали поле на m частей, следовательно, разность потенциалов между двумя соседними поверхностями составляет $\frac{1}{m}$ часть разности потенциалов внешних обкладок, т. е.

$$\Delta U = \frac{U}{m}.$$

Наша задача состоит в доказательстве того положения, что соотношение

$$\frac{Q}{U} = \text{емкости системы} = \text{const}$$

справедливо не только для однородного, но и для любого поля.

Каждый из получившихся элементов мы вправе рассматривать как конденсатор, обкладками которого являются соседние эквипотенциальные поверхности. Чем больше числа m и n , тем однороднее будет поле внутри каждого из элементарных объемов. При достаточно больших m и n элементарный конденсатор можно считать плоским. Емкости всех таких элементарных конденсаторов

$$\Delta C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{Q}{U} \frac{m}{n}$$

равны между собой. Емкость элементарного (в пределе — плоского) конденсатора постоянна, т. е. не зависит ни от заряда на обкладках, ни от приложенной к ним разности потенциалов, m и n также постоянные, хотя и произвольно выбранные, числа. Следовательно,

$$C = \frac{Q}{U} = \Delta C \cdot \frac{n}{m} = \text{const.}$$

Также и выражение энергии электростатического поля может быть обобщено на случай неоднородных полей. Мы разбили неоднородное поле на mn плоских конденсаторов, обладающих не только одинаковой емкостью, но и одинаковой разностью потенциалов (а следовательно, и энергией). Энергия неоднородного поля равна сумме энергий отдельных его элементов, а энергия элемента вычисляется с помощью уравнения (2, 58). Суммарная энергия поля

$$W = mn \Delta W = mn \frac{1}{2} \Delta C \left(\frac{U}{m} \right)^2 = \frac{1}{2} \Delta C \frac{n}{m} U^2 = \frac{1}{2} C U^2.$$

Рассмотрим теперь приемы, применяющиеся для расчетов простейших неоднородных полей.

2, 13. Цилиндрический конденсатор

Обкладками цилиндрического конденсатора служат два круглых цилиндра, причем в простейшем случае их оси совпадают (фиг. 2, 29). Из условий симметрии следует, что эквипотенциальными поверхностями будут цилиндры с общей осью. Построив две достаточно близкие друг к другу эквипотенциальные поверхности с радиусами x и $x + dx$, мы получим элементарный цилиндрический конденсатор. Так как dx — очень малая величина, то неоднородностью поля внутри такого конденсатора можно пренебречь и при подсчете его емкости пользоваться соотношениями, выведенными для плоского конденсатора.

Величина, обратная емкости элемента, очевидно, равна

$$d \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{dx}{\epsilon 2\pi x l},$$

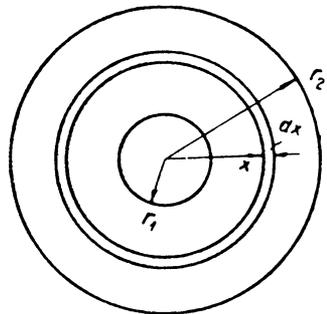
где l — длина цилиндра в осевом направлении.

Если разбить конденсатор на бесконечно большое число элементов, то получим ряд емкостей, находящихся в последовательном соединении друг с другом. Результирующая емкость находится из уравнения (2, 59) с заменой лишь знака суммы интегралом. Пределы интегрирования ясны из чертежа: внутри меньшего и снаружи большего цилиндра поля не будет. Итак,

$$\frac{1}{C} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{\epsilon 2\pi x l} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\epsilon 2\pi l},$$

или

$$C = \frac{\epsilon 2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{2, 61}$$



Фиг. 2, 29.

Заряд любого из последовательно соединенных конденсаторов равен заряду CU эквивалентного конденсатора. Обозначив dU — напряжение, приходящееся на элементарный конденсатор, получим

$$CU = \frac{U}{\frac{1}{C}} = \frac{dU}{d\left(\frac{1}{C}\right)},$$

или после подстановки соответствующих значений

$$U \frac{\varepsilon 2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\varepsilon 2\pi x l}{dx} dU,$$

на основании чего напряженность поля в произвольной точке

$$\frac{dU}{dx} = |\mathbf{E}| = \frac{U}{x \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2, 62)$$

Наконец, разность потенциалов между произвольной точкой поля и поверхностью внутреннего цилиндра определяется посредством интегрирования уравнения (2,62) в пределах от r_1 до x :

$$U_x = \int_{r_1}^x \frac{U dx}{x \ln \frac{r_2}{r_1}} = U \frac{\ln \frac{x}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2, 63)$$

2,14. Сферический конденсатор

Метод расчета поля сферического конденсатора ничем не отличается от предыдущего расчета, можно воспользоваться даже той же фиг. 2,29. Поэтому ограничимся лишь сводкой основных соотношений.

Величина, обратная емкости элементарного сферического конденсатора,

$$d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{dx}{\varepsilon 4\pi x^2}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от r_1 до r_2 , находим

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon 4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon 4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

откуда емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (2, 64)$$

Напряженность поля в произвольной точке находится попрежнему из соотношения $CU = \frac{dU}{d\left(\frac{1}{C}\right)}$ и оказывается равной

$$\frac{dU}{dx} = |\mathbf{E}| = \frac{U r_1 r_2}{x^2 (r_2 - r_1)}. \quad (2, 65)$$

Наконец, разность потенциалов между произвольной точкой поля и поверхностью внутренней сферы

$$U_x = \frac{U r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^x \frac{dx}{x^2} = U \frac{r_2}{x} \frac{x - r_1}{r_2 - r_1}. \quad (2, 66)$$

2, 15. Двухпроводная линия

Этот случай сложнее предыдущих, так как плотность заряда в различных точках поверхности каждого провода здесь неодинакова. Наличие сил притяжения обуславливает уплотнение зарядов (а следовательно, и увеличение напряженности поля) в той части поверхности каждого провода, которая обращена к другому проводу.

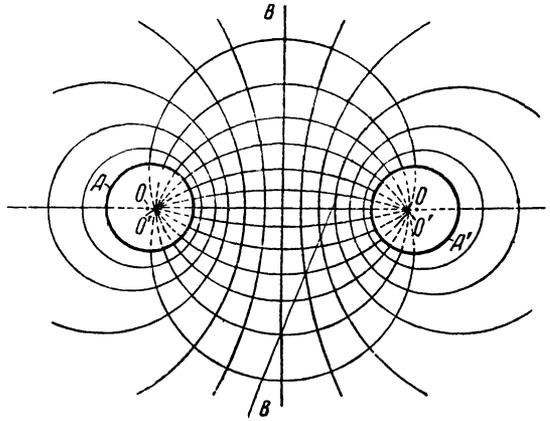
Для определения поля между двумя проводами воспользуемся тем свойством всякого электростатического поля, что его конфигурация не меняется при замене эквипотенциальной поверхности проводником (см. стр. 81). Обратившись к фиг. 2, 15, мы видим, что сечения эквипотенциальных поверхностей¹ поля двух заряженных прямых представляют собой семейство эксцентрических окружностей. Трактую какую-нибудь симметричную пару эквипотенциальных поверхностей, например, окружности A и A' (фиг. 2, 30) как металлические поверхности, мы непосредственно находим искомое поле двух параллельных проводов.

Итак, поле между двумя цилиндрами совпадает с полем двух заряженных прямых. Единственная поправка, которую приходится внести в построение, обусловлена тем, что поле внутри цилиндра равно нулю, а следовательно, силовые линии будут заканчиваться на электродах A и A' . Если мысленно продолжить силовые линии (пунктирные линии на чертеже фиг. 2, 30), то они пересекутся в точках $O'O'$, представляющих собой следы так называемых электрических осей. Электрическая ось каждого провода не совпадает с его геометрической осью, а смещена по направлению к другому проводу.

Таким образом задача построения поля между двумя параллельными проводами свелась к отысканию положения их электрических осей. А для того чтобы фиксировать положение электрических осей, достаточно найти две силовые линии, ибо точка их пересечения и будет представлять собой след электрической оси в плоскости чертежа.

Одна из двух силовых линий находится без всяких затруднений: это — прямая, соединяющая следы геометрических осей. Всякая другая силовая линия будет окружностью, пересекающей поверхности обоих проводов под прямым углом, кроме того, из условий симметрии следует, что центр этой окружности будет лежать на прямой BB (фиг. 2, 30). Эти свойства не только полностью определяют расположение силовой линии, но и подсказывают следующий простой прием для ее построения.

Через любую точку, лежащую на оси симметрии BB (фиг. 2, 31), проводим касательные к обоим проводам. Проще всего построить общую касательную TT , которая пересечет ось симметрии в точке C , представляющей собой центр одной из искомых окружностей; отрезки CT будут ее радиусами. Так как касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания OT , а с другой стороны, кас-



Фиг. 2, 30.

¹ Их следы в плоскости чертежа.

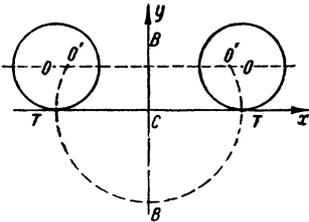
тельная TT служит диаметром окружности TBT , то последняя пересекает поверхности электродов A и A' под прямым углом, чем и доказывается правильность построения.

Для того чтобы подсчитать расстояние между электрическими осями, отнесем нашу систему к прямоугольным координатным осям с началом координат в точке C и обозначим r — радиусы обоих цилиндров и a — расстояние между их геометрическими осями.

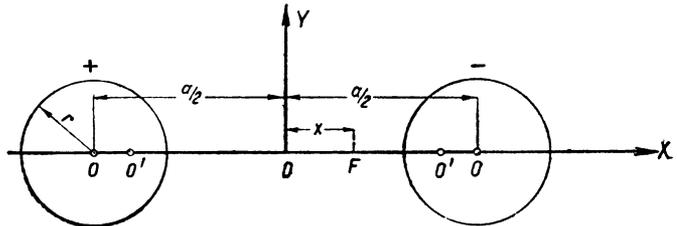
Уравнение окружности TBT запишется в виде $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, а уравнение прямой OO — в виде $y = r$. Точки их пересечения, т. е. искомые точки O' , найдутся совместным решением обоих уравнений, что дает

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2}.$$

Теперь можно определить напряженность поля в произвольной точке F , расположенной на прямой OO . Для упрощения выкладок перенесем начало координат в точку D (фиг. 2, 32), чтобы ось абсцисс совпадала



Фиг. 2, 31.



Фиг. 2, 32.

с прямой OO . Так как поле двух цилиндров не отличается от поля двух прямых, то можно воспользоваться соотношениями § 2, 4.

Положительно заряженный провод даст слагающую напряженности поля, равную по абсолютной величине

$$\frac{Q_0}{2\pi\epsilon (O'D + DF)}$$

и направленную в сторону положительных x . Слагающая, обусловленная отрицательно заряженным проводом, равна по абсолютной величине

$$\frac{Q_0}{2\pi\epsilon (DO' - DF)}$$

и направлена также в сторону положительных x . Отсюда следует, что напряженность поля в точке F может быть получена арифметическим сложением абсолютных величин ее компонент.

Так как $DF = x$ и $DO' = \sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2}$, то

$$E = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2 + x}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2 - x}} \right). \quad (2, 67)$$

Разность потенциалов между проводами найдется из соотношения $U = \int \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$. При этом интегрирование производится вдоль оси x . В этом случае угол между направлением перемещения и направлением вектора \mathbf{E}

равен нулю. Пределами интегрирования будут служить точки пересечения прямой OO с поверхностью электродов. Итак,

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{-\frac{a}{2}+r}^{\frac{a}{2}-r} E \, dx = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \left[\int_{-\frac{a}{2}+r}^{\frac{a}{2}-r} \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2 + x}} - \int_{-\frac{a}{2}+r}^{\frac{a}{2}-r} \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2 - x}} \right] = \\
 &= \frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \left[\ln \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2 + x}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - r^2 - x}} \right]_{-\frac{a}{2}+r}^{\frac{a}{2}-r} = \frac{Q_0}{\pi\epsilon} \ln \left(\frac{a}{2r} + \sqrt{\left(\frac{a}{2r}\right)^2 - 1} \right). \quad (2, 68)
 \end{aligned}$$

Емкость системы найдется из известного соотношения $C = \frac{Q}{U}$. Так как Q_0 представляет собой заряд на единицу длины, то

$$C = \frac{Q_0 l}{U} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{a}{2r} + \sqrt{\left(\frac{a}{2r}\right)^2 - 1} \right)}, \quad (2, 69)$$

где l — длина линии в см.

В случае если расстояние между проводами много больше их радиуса, формула (2,69) упрощается, так как можно положить

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2r}\right)^2 - 1} \approx \frac{a}{2r},$$

откуда

$$C \approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{a}{r}}. \quad (2, 70)$$

Пользование формулой (2,70) дает ошибку менее 1% при соотношении $\frac{a}{2r} > 4,74$.

2,16. Распределение зарядов и потенциалов в системе проводов

Когда какой-нибудь проводник получает положительный или отрицательный заряд, всегда имеется другой проводник или даже группа проводников, которые одновременно получают равный по величине заряд обратного знака. Условимся называть „системой“ такую группу проводников, заряды которых обусловлены перемещением электричества с одного из входящих в группу проводников на другой, так что суммарный заряд системы остается равным нулю. Примером такой системы может служить двухпроводная или трехпроводная линия постоянного тока. Если при этом на самой линии, в питающих ее источниках тока или присоединенных к ней приемниках имеются заземленные точки, через которые возможен переход заряда с линии на землю или обратно, то и земля должна быть включена в состав данной системы.

Понятие емкости, определенное в § 2,9 в общем случае, не может быть применено к системе, имеющей больше чем два изолированных друг от друга проводника, так как при этом заряды на любой паре про-

водников могут быть различны и, кроме того, они зависят не только от разности потенциалов между данной парой проводников, но и от разности потенциалов между данными проводниками и каждым из остальных проводников системы.

Однако в отдельных частных случаях возможно, что заряды на какой-либо паре проводов оказываются всегда равными по величине и противоположными по знаку и, кроме того, пропорциональными напряжению между этими проводниками. В этих случаях можно говорить о расчетной, или рабочей, емкости такой пары проводов, определяя емкость попрежнему как отношение заряда к напряжению:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (2,71)$$

Рассмотрим, как можно найти распределение зарядов и потенциалов в системе, образованной трехпроводной воздушной линией.

Предварительно рассмотрим поле, образованное одним из проводов и поверхностью земли, т. е. поле между плоскостью и параллельным ей цилиндром, считая при этом, что высота подвеса провода намного больше его диаметра. Такое поле может быть получено, если в изученном уже нами поле двух параллельных проводов (фиг. 2, 15) заменить проводящей плоскостью эквипотенциальную поверхность нулевого потенциала, проходящую посередине между проводами. Таким образом поле системы „провод-земля“ (фиг. 2, 33) может быть рассчитано как поле двухпроводной линии с таким же зарядом Q_0 на единицу длины и расстоянием между проводами, равным двойной высоте подвеса провода над землей. Напряженность этого поля в произвольной точке M представляет собой сумму напряженностей E' и E'' полей положительного и отрицательного зарядов, где согласно (2, 19) и обозначениям фиг. 2, 33

$$E' = \frac{Q_0}{\epsilon 2\pi a_M} \quad \text{и} \quad E'' = \frac{-Q_0}{\epsilon 2\pi b_M}.$$

Так как

$$E' = -\frac{dU'_M}{da_M} \mathbf{a}_M^\circ \quad \text{и} \quad E'' = -\frac{dU''_M}{db_M} \mathbf{b}_M^\circ,$$

то

$$\begin{aligned} U_M &= U'_M + U''_M = -\left(\int E' da_M^\circ + \int E'' db_M^\circ \right) = \\ &= -\frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \left(\int \frac{da_M}{a_M} - \int \frac{db_M}{b_M} \right) = -\frac{Q_0}{2\pi\epsilon} (\ln a_M - \ln b_M) + K, \end{aligned}$$

или

$$U_M = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_M}{a_M} + K, \quad (2,72)$$

где K — сумма двух постоянных интегрирования.

Перенося точку M в любую точку поверхности земли, мы будем иметь

$$\frac{b_M}{a_M} = 1;$$

кроме того, мы условились считать потенциал земли равным нулю, поэтому для точек, лежащих на поверхности земли, мы получаем по (2, 72)

$$\frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \ln 1 + K = 0,$$

откуда $K=0$, и следовательно, в любой точке

$$U_M = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_M}{a_M} = \alpha_M Q_0, \quad (2, 73)$$

где

$$\alpha_M = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_M}{a_M} \quad (2, 74)$$

— постоянная величина, зависящая только от расположения точки M по отношению к проводу и к земле и от среды, в которой находятся как провод, так и точка M (воздух). Эта постоянная величина называется потенциалным коэффициентом и имеет размерность см/Ф.

Перейдем теперь к поставленной нами задаче о распределении зарядов и потенциалов в трехпроводной линии (фиг. 2, 34). Потенциал такого поля U_M в произвольной точке M может быть найден как сумма потенциалов, которые создавались бы каждым из проводов в отдельности (в присутствии земли), т. е.

$$U_M = U_{1M} + U_{2M} + U_{3M}.$$

Заменяя действие земной поверхности действием трех зарядов обратного знака, расположенных в симметричных относительно земной поверхности точках, получим

$$U_{1M} = \alpha_{1M} Q_{10}; \quad U_{2M} = \alpha_{2M} Q_{20}$$

и

$$\alpha_{3M} = \alpha_{3M} Q_{30},$$

где

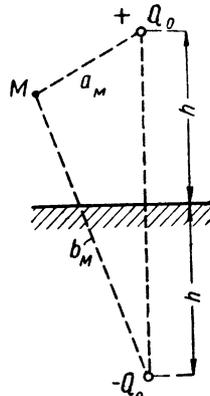
$$\alpha_{1M} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}},$$

$$\alpha_{2M} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}}$$

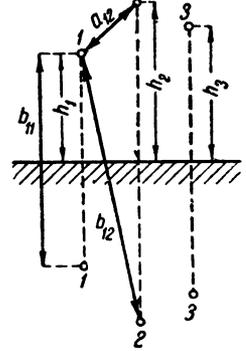
и

$$\alpha_{3M} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{3M}}{a_{3M}},$$

(2, 75)



Фиг. 2, 33.



Фиг. 2, 34.

а следовательно,

$$U_M = \alpha_{1M} Q_{10} + \alpha_{2M} Q_{20} + \alpha_{3M} Q_{30}. \quad (2, 76)$$

Применяя это уравнение к точкам, расположенным на поверхностях проводов, и заменяя поэтому индекс M индексами 1, 2 и 3, получим потенциалы проводов:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \alpha_{11} Q_{10} + \alpha_{21} Q_{20} + \alpha_{31} Q_{30}; \\ U_2 &= \alpha_{12} Q_{10} + \alpha_{22} Q_{20} + \alpha_{32} Q_{30}; \\ U_3 &= \alpha_{13} Q_{10} + \alpha_{23} Q_{20} + \alpha_{33} Q_{30}. \end{aligned} \right\} \quad (2, 77)$$

Совокупность этих уравнений носит название первой группы формул Максвелла для определения потенциалов. Потенциальные коэффициенты в этих уравнениях можно найти по формулам (2, 75), заменяя в них индекс M номером соответствующего провода.

Имея в виду, что

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = r$$

представляет собой расстояние от оси каждого провода до его поверхности и равно, следовательно, радиусу провода r , а b_{11} , b_{22} и b_{33} равны двойной высоте подвеса соответствующего провода (минус его радиус, который много меньше высоты подвеса), получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_1}{r}; & \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}}; \\ \alpha_{22} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_2}{r}; & \alpha_{23} &= \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{23}}{a_{23}}; \\ \alpha_{33} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_3}{r}; & \alpha_{31} &= \alpha_{13} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b_{31}}{a_{31}}, \end{aligned} \right\} \quad (2, 78)$$

где a_{12} , a_{23} и a_{31} — расстояния между проводами, а b_{12} , b_{23} и b_{31} — расстояния между каждым из проводов и зеркальным изображением двух других проводов.

Так как обычно бывают известны не заряды проводов, а их потенциалы, решаем систему уравнений (2,77) относительно зарядов. Это решение приведет нас ко второй группе формул Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} Q_{10} &= \beta_{11}U_1 + \beta_{21}U_2 + \beta_{31}U_3; \\ Q_{20} &= \beta_{12}U_1 + \beta_{22}U_2 + \beta_{32}U_3; \\ Q_{30} &= \beta_{13}U_1 + \beta_{23}U_2 + \beta_{33}U_3, \end{aligned} \right\} \quad (2, 79)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}; & \beta_{12} &= \beta_{21} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{33} \\ \alpha_{12} & \alpha_{32} \end{vmatrix}}{\Delta}; \\ \beta_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{31} \\ \alpha_{13} & \alpha_{11} \end{vmatrix}}{\Delta}; & \beta_{23} &= \beta_{32} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{23} & \alpha_{13} \end{vmatrix}}{\Delta}; \\ \beta_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}; & \beta_{31} &= \beta_{13} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{21} \end{vmatrix}}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (2, 80)$$

а

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad (2, 81)$$

Коэффициенты β в уравнениях (2,79) носят название емкостных коэффициентов — их размерность F/см.

Пример 2, 3. Определить коэффициенты α и β для 1 км проводов линии, представленной на фиг. 2, 34, если диаметр провода 10 мм, расстояние между соседними проводами 3 м, а высота подвеса каждого из проводов 6 м.

Определяем необходимые геометрические размеры:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ см};$$

$$2h_1 = 2h_2 = 2h_3 = 2 \cdot 600 = 1200 \text{ см};$$

$$a_{12} = a_{23} = 300 \text{ см};$$

$$a_{31} = 2a_{12} = 2 \cdot 300 = 600 \text{ см};$$

$$b_{12} = b_{23} = \sqrt{(2h_1)^2 + a_{12}^2} = \sqrt{1200^2 + 300^2} = 300 \sqrt{4^2 + 1} = 1240 \text{ см};$$

$$b_{13} = \sqrt{(2h_1)^2 + a_{13}^2} = \sqrt{1200^2 + 600^2} = 600 \sqrt{2^2 + 1} = 1340 \text{ см}.$$

По формулам (2, 78) находим потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{10^{13}}{2\pi \cdot 0,886} \ln \frac{1200}{0,5} = 1,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,3 \cdot \lg 2400 = 14 \cdot 10^{12} \text{ см/Ф};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = 1,8 \cdot 10^{12} \cdot 2,3 \lg \frac{1240}{300} = 4,13 \cdot 10^{12} \cdot \lg 4,13 = 2,55 \cdot 10^{12} \text{ см/Ф};$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 4,13 \cdot 10^{12} \lg \frac{1340}{600} = 4,13 \cdot 10^{12} \cdot \lg 2,23 = 1,44 \cdot 10^{12} \text{ см/Ф}.$$

Далее, по формуле (2, 81) определяем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 2,55 & 1,44 \\ 2,55 & 14 & 2,55 \\ 1,44 & 2,55 & 14 \end{vmatrix} \cdot 10^{36} = 2139 \cdot 10^{36} \text{ (см/Ф)}^3,$$

а по формулам (2,80)

$$\beta_{11} = \beta_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2,55 \\ 2,55 & 14 \end{vmatrix} \cdot 10^{24}}{2139 \cdot 10^{36}} = \frac{189,5}{2139 \cdot 10^{12}} = 0,0885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/см};$$

$$\beta_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 1,44 \\ 1,44 & 14 \end{vmatrix} \cdot 10^{24}}{2139 \cdot 10^{36}} = \frac{193,9}{2139 \cdot 10^{12}} = 0,0907 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/см};$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{23} = \beta_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 1,44 & 14 \\ 2,55 & 2,55 \end{vmatrix} \cdot 10^{24}}{2139 \cdot 10^{36}} = -\frac{32,3}{2139 \cdot 10^{12}} = -0,0151 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/см};$$

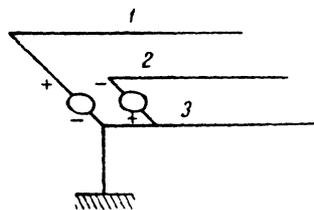
$$\beta_{31} = \beta_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 2,55 & 14 \\ 1,44 & 2,55 \end{vmatrix} \cdot 10^{24}}{2139 \cdot 10^{36}} = -\frac{13,7}{2139 \cdot 10^{12}} = -0,0064 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/см}.$$

Зная емкостные коэффициенты, мы можем теперь определить заряды, приходящиеся на каждый из проводов, если известны их потенциалы (или напряжения относительно земли). Если, например, $U_1 = 1000 \text{ В}$; $U_2 = -1000 \text{ В}$; $U_3 = 0$, то на 1 км длины проводов приходятся заряды:

$$Q_{10} = \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \beta_{13}U_3 = (8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 10^3 + 1,51 \cdot 10^{-14} \cdot 10^3) 10^6 = 10,36 \cdot 10^{-6} \text{ С/км};$$

$$Q_{20} = \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \beta_{23}U_3 = (-1,51 \cdot 10^{-14} \cdot 10^3 - 9,07 \cdot 10^{-14} \cdot 10^3) 10^6 = -10,58 \cdot 10^{-6} \text{ С/км};$$

$$Q_{30} = \beta_{31}U_1 + \beta_{32}U_2 + \beta_{33}U_3 = (-0,64 \cdot 10^{-14} \cdot 10^3 + 1,51 \cdot 10^{-14} \cdot 10^3) 10^6 = 0,81 \cdot 10^{-6} \text{ С/км}.$$



Фиг. 2, 35.

В полученном результате обращает на себя внимание то, что сумма зарядов трех проводов не равна нулю, и то, что на третьем проводе существует заряд, несмотря на то, что потенциал провода равен нулю. Это, однако, вполне закономерно: заданное распределение потенциалов может быть осуществлено только в том случае, если генераторы, питающие линию, включены так, как показано на фиг. 2, 35: одна из точек сети при этом соединена с землей. Сумма зарядов системы будет равна нулю, если в рассмотрение включить и землю. Что касается заряда на проводе 3, он появляется вследствие влияния других заряженных проводов.

2, 17. Частичные емкости

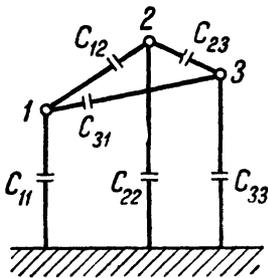
При рассмотрении системы изолированных проводов вместо емкости целесообразно ввести понятие частичных емкостей. Представим себе, что между каждым двумя проводами, а также между каждым проводом и землей (фиг. 2, 36) включено по конденсатору такой емкости, чтобы заряд каждого провода можно было рассматривать как сумму зарядов всех присоединенных к нему обкладок конденсаторов. Емкости таких конденсаторов должны удовлетворять следующим трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + C_{31}(U_1 - U_3); \\ Q_2 &= C_{22}(U_2 - 0) + C_{12}(U_2 - U_1) + C_{23}(U_2 - U_3); \\ Q_3 &= C_{33}(U_3 - 0) + C_{31}(U_3 - U_1) + C_{23}(U_3 - U_2); \end{aligned} \right\} \quad (2, 82)$$

или, раскрывая скобки и группируя члены, содержащие одинаковые потенциалы,

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= (C_{11} + C_{12} + C_{31})U_1 - C_{12}U_2 - C_{31}U_3; \\ Q_2 &= -C_{12}U_1 + (C_{22} + C_{12} + C_{23})U_2 - C_{23}U_3; \\ Q_3 &= -C_{31}U_1 - C_{23}U_2 + (C_{33} + C_{31} + C_{23})U_3. \end{aligned} \right\} \quad (2, 83)$$

Сравнивая эту группу уравнений с уравнениями (2, 79)¹ и приравняв друг другу коэффициенты при одних и тех же потенциалах, получим



Фиг. 2, 36.

$$\left. \begin{aligned} C_{11} + C_{12} + C_{31} &= \beta_{11}l; \\ C_{22} + C_{12} + C_{23} &= \beta_{22}l; \\ C_{33} + C_{31} + C_{23} &= \beta_{33}l; \\ -C_{12} &= \beta_{21}l = \beta_{12}l; \\ -C_{31} &= \beta_{31}l = \beta_{13}l; \\ -C_{23} &= \beta_{32}l = \beta_{23}l; \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} C_{12} &= -\beta_{12}l; \\ C_{23} &= -\beta_{23}l; \\ C_{31} &= -\beta_{31}l; \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} C_{11} &= (\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{31})l; \\ C_{22} &= (\beta_{22} + \beta_{12} + \beta_{23})l; \\ C_{33} &= (\beta_{33} + \beta_{31} + \beta_{23})l. \end{aligned} \right\} \quad (2, 84)$$

Полученные емкости и называются „частичными емкостями“. Так как все коэффициенты β зависят исключительно от размеров и расположения проводов и ϵ той среды, в которой они находятся, то и определяемые ими частичные емкости являются для данной системы постоянными величинами.

Пример 2, 4. Найдем частичные емкости для линии, рассмотренной в примере 2, 3. По формулам (2, 84) получаем:

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{23} = 0,0151 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 1,51 \cdot 10^{-9} \text{ F/km} = 0,00151 \text{ } \mu\text{F/km}; \\ C_{31} &= 0,0064 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 0,64 \cdot 10^{-9} \text{ F/km} = 0,00064 \text{ } \mu\text{F/km}; \\ C_{11} &= C_{23} = (0,0885 - 0,0151 - 0,0064) \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 6,70 \cdot 10^{-9} \text{ F/km} = \\ &= 0,00670 \text{ } \mu\text{F/km}; \\ C_{22} &= (0,0907 - 0,0151 - 0,0151) \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 6,05 \cdot 10^{-9} \text{ F/km} = 0,00605 \text{ } \mu\text{F/km}. \end{aligned}$$

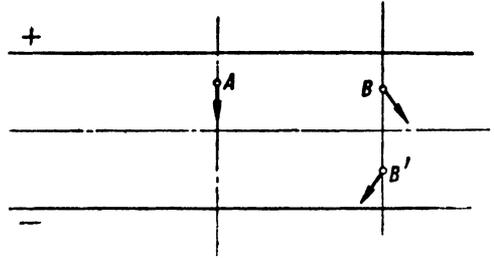
2, 18. Краевой эффект

Рассмотрим еще два примера неоднородных полей, часто встречающихся на практике: поле вблизи краев плоского конденсатора и поле

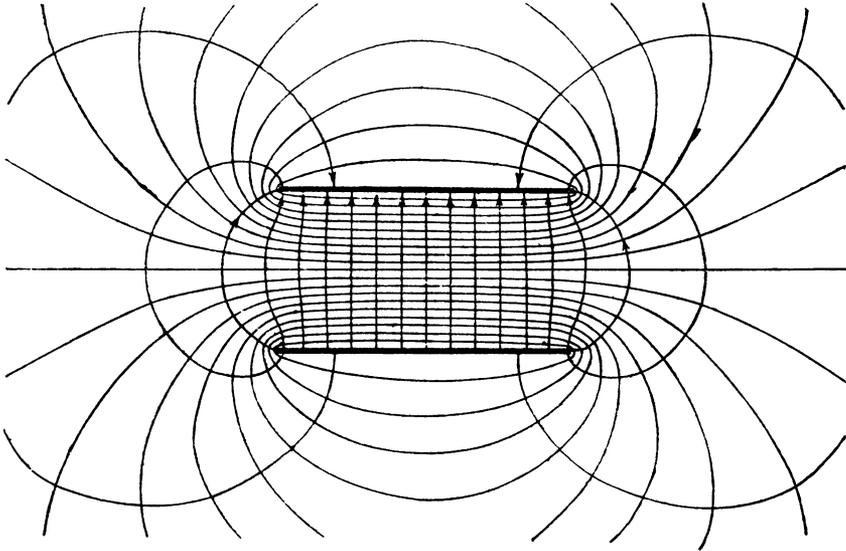
¹ Обе части уравнений (2, 79) следует предварительно умножить на l , чтобы они выражали заряды на всю длину каждого провода.

между двумя острями. Расчет обоих полей представляет собой известные математические трудности, а потому мы ограничимся качественным разбором картины обоих полей.

Силовые линии в бесконечном плоском конденсаторе представляют собой семейство параллельных прямых, расположенных перпендикулярно к обкладкам конденсатора. Это обусловлено тем обстоятельством, что любая точка поля бесконечного конденсатора расположена симметрично относительно каждой из его обкладок. Если обкладки конденсатора уходят в бесконечность, то ось, проведенная через любую точку, например, через точку A (фиг. 2, 37), будет осью симметрии. Силу, действующую на помещенный в точке A пробный заряд, можно разложить на четыре слагающие, две из которых создаются положительно заряженными полуплоскостями, расположенными влево и вправо от вертикальной оси, а две других — отрицательно заряженными полуплоскостями. Из условий симметрии следует, что геометрическая сумма каждой пары направлена перпендикулярно обкладкам конденсатора. Таким образом направление силы



Фиг. 2, 37.



Фиг. 2, 38.

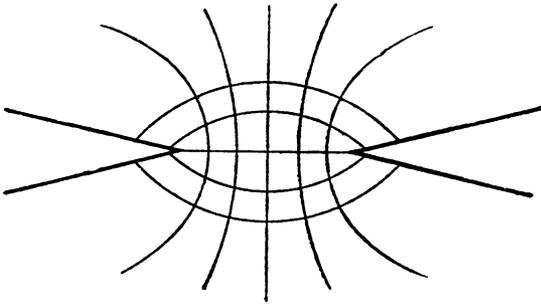
действующей на пробный заряд, а следовательно, и направление вектора напряженности поля будет также перпендикулярно конденсаторным обкладкам.

Для плоского конденсатора конечных размеров предыдущие рассуждения окажутся справедливыми лишь применительно к точкам, расположенным на оси симметрии, и приблизительно верными для точек, расположенных не слишком близко от краев.

Возьмем теперь точку B (фиг. 2, 37) и рассечем поле конденсатора некоторой воображаемой плоскостью P , перпендикулярной к обкладкам и

проходящей через точку B . В точку B поместим пробный заряд и действующую на него силу попрежнему разложим на четыре слагающие.

Величина положительного и отрицательного зарядов, расположенных влево от плоскости P , будет больше величины зарядов, расположенных справа. Это позволяет оценить направление силовой линии, проходящей через точку B : она отклонится от плоскости P вправо. В самом деле, из четырех слагающих кулоновой силы наибольшую величину будет иметь слагающая, обусловленная действием положительных зарядов, расположенных слева от плоскости P , так как, во-первых, действие отрицательных зарядов слабее действия положительных зарядов (точка B расположена ближе к положительной обкладке) и, во-вторых, действие правых зарядов слабее действия левых. Поэтому пробный заряд в точке B будет как бы выталкиваться из поля. Путем аналогичных рассуждений можно убедиться в том, что в симметричной точке B' пробный заряд будет втягиваться в поле. Силовые линии получат выпуклость, направленную к краям конденсатора, причем искажение линий будет тем сильнее, чем ближе они от краев. Эквипотенциальные поверхности располагаются перпендикулярно к силовым линиям. Получается картина поля, изображенная на фиг. 2, 38. Сгущение силовых линий, т. е. увеличение напряженности поля вблизи краев, объясняется тем, что плотность зарядов возрастает от середины к краям: под действием сил отталкивания заряд каждой обкладки стремится удалиться от середины и расположиться на краях. Напряженность же поля, как известно, пропорциональна плотности зарядов.



Фиг. 2, 39.

Путем аналогичных рассуждений можно получить представление о конфигурации поля между двумя иглами. Плотность зарядов будет наибольшей на остриях игл. Силовые линии должны располагаться перпендикулярно к поверхностям игл, сгущаясь около острий. Плоскость симметрии OO будет, очевидно, поверхностью равного потенциала, следовательно, силовые линии должны быть перпендикулярны и к ней. Наконец, линии поля должны быть симметричны относительно оси, проходящей через острия игл. Эти рассуждения приводят нас к картине поля, показанной на фиг. 2, 39.

ГЛАВА III

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

3.1. Электрический ток и магнитное поле

Электрический ток связан не только с теми процессами, которые происходят в самом проводнике и которые были рассмотрены в первой главе, но и с образованием особого состояния в окружающем проводник пространстве.

О наличии этого особого состояния можно судить по механическим силам, действующим вблизи проводника с током на магнитную стрелку или на другой проводник с током.

Простейший опыт с двумя параллельными проводами, по которым движется электричество, показывает, что такие провода взаимно притягиваются, если движение электричества (электрический ток) происходит в них в одинаковом направлении, и взаимно отталкиваются, если движение электричества происходит в противоположных направлениях.

Указанные механические силы наблюдаются как при наличии какого-либо вещества, заполняющего пространство между взаимодействующими проводами (или проводом и магнитной стрелкой), так и в том случае, когда провода (или провод и магнитная стрелка) разделены вакуумом.

Область пространства, в которой ток создает это особое состояние, называется магнитным полем.

Это название обусловлено тем, что совершенно такое же поле создают постоянные магниты (например, кусок магнитного железняка-естественной горной породы).

Отметим сразу же, что свойство магнитов возбуждать вокруг себя магнитное поле объясняется определенным образом ориентированным движением электронов, входящих в состав атомов и молекул магнита. Таким образом и в случае постоянных магнитов магнитное поле вызывается электрическим током, так как всякое движение электронов — частиц отрицательного электричества — можно рассматривать как электрический ток (хотя бы внутримолекулярный или внутриатомный).

Магнитное поле и ток неизменно сопутствуют друг другу. Наличие магнитного поля всегда указывает на наличие той или иной формы электрического тока.

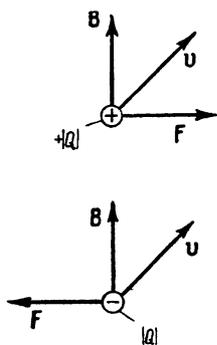
В свою очередь электрический ток всегда сопровождается магнитным полем, тогда как такие признаки тока, как химическое или тепловое действие тока, иногда могут и отсутствовать.

3.2. Магнитная индукция

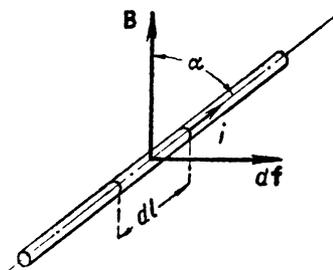
Если в магнитное поле поместить небольшую катушку, состоящую из нескольких витков проволоки и могущую свободно вращаться, и пропустить через нее ток, то катушка займет совершенно определенное

положение. То направление, в котором располагается ось катушки, принимается за направление магнитного поля. Положительным считается при этом направление оси, совпадающее с движением буравчика (или штопора), концы рукоятки которого движутся по направлению тока в витках катушки. Помещенная в магнитное поле магнитная стрелка также располагается по направлению поля, северный полюс ее направляется в положительную сторону, а южный — в отрицательную.

Опыт показывает, что не только на проводник с током, но и на всякий движущийся в магнитном поле заряд Q действует сила F , направление которой перпендикулярно как к направлению скорости v движения заряда, так и к направлению самого поля, а величина силы пропорциональна заряду и перпендикулярной полю слагающей скорости. Если скорость движения заряда перпендикулярна к направлению поля, то величина силы F пропорциональна заряду и скорости его движения. Другими словами, отношение силы F к произведению Qv есть величина постоянная для данной точки магнитного поля и может, следовательно, характеризовать собой интенсивность магнитного поля. Эта величина



Фиг. 3, 1.



Фиг. 3, 2.

$$B = \frac{F}{Qv} \quad (3, 1)$$

называется магнитной индукцией. Равный ей по величине вектор \mathbf{B} , характеризующий как интенсивность, так и направление магнитного поля в данной его точке, называется вектором магнитной индукции. Размерность этой новой величины может быть определена по формуле (3, 1). Действительно,

$$[B] = \frac{\text{J/cm}}{\text{C} \cdot \text{cm/sec}} = \frac{\text{VA sec} \cdot \text{sec}}{\text{cm} \cdot \text{A sec} \cdot \text{cm}} = \frac{\text{V sec}}{\text{cm}^2}.$$

Весьма часто употребляется более мелкая единица магнитной индукции — гаусс — Gs^1 , равная по величине $10^{-8} \text{ V} \cdot \text{sec/cm}^2$.

При произвольном направлении движения заряда в магнитном поле действующая на него сила может быть определена по величине и направлению соотношением

$$\mathbf{F} = Q [\mathbf{vB}], \quad (3, 2)$$

как это показывает опыт. Соотношение между направлениями величин \mathbf{F} , \mathbf{v} , \mathbf{B} , связанных векторным произведением, иллюстрируется фиг. 3, 1.

Связь между величиной и направлением вектора \mathbf{B} и силой $d\mathbf{F}$, испытываемой в магнитном поле элементом $d\mathbf{l}$ линейного проводника (фиг. 3, 2), по которому проходит ток I , может быть получена из (3, 2) следующим путем²:

¹ По стандарту $\frac{\text{ОСТ}}{\text{ВКС}}$ 5578 сокращенное обозначение гаусса G . Однако мы пользуемся здесь обозначением Gs , рекомендованным Международной электротехнической комиссией (1935 г.), которое, надо думать, в ближайшее время войдет и в наши стандарты.

² За направление элемента $d\mathbf{l}$ принимается положительное направление проходящего по нему тока.

Связь между плотностью тока \mathbf{j} , числом n свободных зарядов, приходящихся на единицу объема и своим движением создающих ток, величиной зарядов q и средней скоростью их движения \mathbf{v} может быть выражена посредством уравнения

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} \quad ^1.$$

Поэтому сила $d\mathbf{F}$, испытываемая элементарным объемом проводника dV , плотность тока в котором \mathbf{j} , равна

$$d\mathbf{F} = ndVq [\mathbf{v}\mathbf{B}] = dV [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (3, 3)$$

От выражения (3, 3) можно перейти к случаю линейного проводника, выбирая в качестве элемента объема dV элемент проводника сечением S и длиной dL .

Так как при этом $dV = S dL$, а $\mathbf{j}S = I$, мы можем (3, 3) заменить выражением

$$d\mathbf{F} = I [dL \mathbf{B}], \quad (3, 4)$$

в котором элементу длины dL приписано направление плотности тока (совпадающее с направлением оси элемента dL , ориентированным по положительному направлению тока).

Чтобы найти силу, действующую на конечный участок провода, нужно просуммировать силы $d\mathbf{F}$, испытываемые каждым элементом dL этого участка. Таким путем все следствия дифференциального закона (3, 4) могут быть проверены на опыте.

Если состояние среды в отношении сил, действующих на провод с током, не меняется вдоль всего прямолинейного участка l , иначе говоря, если магнитная индукция \mathbf{B} остается неизменной (поле однородно) во всех точках участка l линейного провода, несущего ток I , закон, выражаемый уравнением (3, 4), может быть записан и не в дифференциальной форме:

$$\mathbf{F} = I [l\mathbf{B}]. \quad (3, 5)$$

Переходя от векторов к абсолютным величинам (3, 4) и (3, 5), можно записать так:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} dF &= Idl B \sin \alpha = Idl B_n \\ F &= Il \cdot B \cdot \sin \alpha = Il B_n. \end{aligned} \right\} \quad (3, 6)$$

Произведение $B \sin \alpha = B_n$, входящее в последние равенства (3, 6), представляет собой слагающую вектора магнитной индукции, нормальную к направлению проводника. Как нетрудно видеть, на величину силы, испытываемой в магнитном поле проводом с током, влияет только нормальная слагающая вектора индукции ($B_n = B \sin \alpha$), тогда как вторая слагающая — тангенциальная ($B_t = B \cos \alpha$) — не оказывает на величину силы никакого влияния.

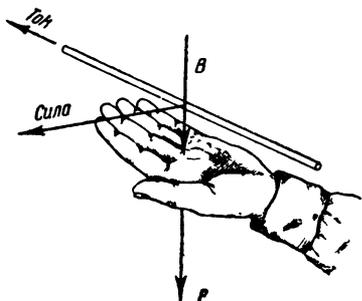
Приведенные выше уравнения определяют как величину, так и направление силы \mathbf{F} (или $d\mathbf{F}$), если известны положение отрезка l (или dL), ток I и если уже определено направление вектора \mathbf{B} (фиг. 3, 2). Напротив, по данной силе \mathbf{F} (или $d\mathbf{F}$) и данным l и l (или dL) можно опреде-

¹ Если нельзя считать величину всех движущихся зарядов одинаковой, произведение nqv следует понимать как усредненное выражение суммы $\sum n_i q_i v_i$.

лить направление и величину только нормальной слагающей вектора магнитной индукции $B_n = B \sin \alpha$, а не самого вектора \mathbf{B} . Лишь в том случае, когда $\alpha = 90^\circ$, значения B_n и B совпадают.

Положение проводника, при котором $\alpha = 90^\circ$, нетрудно определить. Действительно, в этом случае $\sin \alpha = 1$, т. е. имеет свое наибольшее значение. Следовательно, наибольшее значение имеет при этом и действующая на проводник сила. Наоборот, при $\alpha = 0$, т. е. в том случае, когда направление проводника совпадает с направлением вектора \mathbf{B} , $\sin \alpha = 0$, и вместе с ним равна нулю действующая на проводник сила. Таким образом определяется направление вектора магнитной индукции.

Существует целый ряд мнемонических правил, связывающих между собой направления: тока, действующей на проводник силы и магнитной индукции. Из таких правил наиболее простым и наиболее распространенным является правило левой руки (фиг. 3, 3).



Фиг. 3, 3.

Если расположить левую руку так, чтобы четыре вытянутых пальца совпадали с направлением тока в проводнике, а ладонь была повернута так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, то отогнутый большой палец будет указывать направление силы.

Следует иметь в виду, что название „магнитная индукция“, присвоенное вектору \mathbf{B} , не включает в себе никакого указания на физическую природу этой величины, происхождение этого названия объясняется причинами чисто исторического порядка.

Смысл или, точнее говоря, физическое содержание вектора магнитной индукции выяснится из дальнейших применений этого понятия. Отметим, однако, что в основном можно всегда исходить (как это и сделано в настоящем параграфе) из определения вектора индукции как величины, характеризующей состояние физического пространства (эфира) в отношении силы, испытываемой в данной точке пространства электрическим током (или движущимся электрическим зарядом).

Пример 3, 1. В равномерном магнитном поле, индукция которого $10\,000\text{ Gs}$ ($10^{-4}\text{ V} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$), перпендикулярно к вектору магнитной индукции расположен прямолинейный проводник длиной 50 cm с током $I = 20\text{ A}$. Определить силу (в kG), с которой магнитное поле действует на проводник.

Выражая все величины в практических единицах, получим

$$F = IB = 20 \cdot 50 \cdot 10^{-4} = 0,1\text{ J/cm.}$$

Но так как

$$1\text{ J/cm} = 10,2\text{ kG,}$$

то

$$F = 0,1 \cdot 10,2 = 1,02\text{ kG.}$$

3, 3. Магнитный поток

Мы определили магнитную индукцию, исходя из силы, действующей в магнитном поле на движущийся заряд или на проводник с током.

Рассматривая теперь работу, производимую при перемещении проводника с током в магнитном поле, мы приходим к другому основному понятию в учении о магнитном поле, а именно: к понятию потока вектора магнитной индукции, или, короче, „магнитного потока“.

На элементарный отрезок $d\mathbf{l}$ линейного проводника с током I (мы будем для краткости говорить: элемент линейного тока $I d\mathbf{l}$), находящийся в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , действует сила

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l} \mathbf{B}].$$

Если под действием этой силы элемент тока перемещается на расстояние ds (фиг. 3, 4), то, как известно из механики, производится работа dA , равная скалярному произведению силы на путь:

$$dA = d\mathbf{F} ds.$$

Подставляя в это уравнение вышеприведенное выражение силы $d\mathbf{F}$, получаем

$$dA = I ds [d\mathbf{l} \mathbf{B}] = I\mathbf{B} [ds d\mathbf{l}]. \quad (3, 7)$$

Но векторное произведение элемента перемещения ds на элемент длины $d\mathbf{l}$ есть не что иное, как векторное выражение площади dS , описанной элементом $d\mathbf{l}$ при его перемещении:

$$[ds d\mathbf{l}] = dS.$$

Таким образом

$$dA = I\mathbf{B} dS, \quad (3, 8)$$

т. е. работа, производимая при бесконечно малом перемещении элемента линейного тока в магнитном поле, равна току, умноженному на скалярное произведение вектора магнитной индукции на площадь, описанную элементом тока при его перемещении.

Исходя из дифференциального выражения (3, 8), можно найти работу, производимую и при конечном перемещении конечного отрезка линейного проводника. Для этого нужно найти сумму всех элементарных составляющих работы, производимой всем конечным отрезком проводника при его конечном перемещении.

Такая сумма выражается интегралом

$$A = I \int_S \mathbf{B} dS, \quad (3, 9)$$

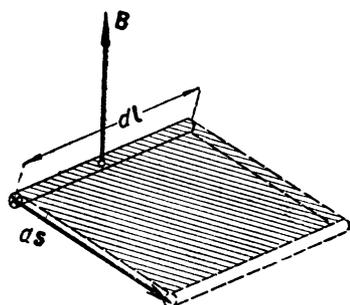
где I , как постоянное, вынесено за знак интеграла, символ \int_S обозначает интеграл по поверхности S , в данном случае по поверхности, образованной перемещением рассматриваемого отрезка линейного проводника, несущего ток I . Вектор магнитной индукции \mathbf{B} остается под интегралом, поскольку его значение и угол между \mathbf{B} и dS в разных точках поверхности могут быть различны.

Выражение $\int \mathbf{B} dS$ (а также $\mathbf{B} dS$)² носит название потока вектора магнитной индукции или магнитного потока через

¹ Третий член равенства получен из второго по правилу перемножения векторов $\mathbf{a} [\mathbf{bc}] = \mathbf{b} [\mathbf{ca}] = \mathbf{c} [\mathbf{ab}]$,

допускающему круговую перестановку множителей в векторно-скалярном произведении.

² Аналогичное выражению $\int \mathbf{E} dS$ или $\mathbf{E} dS$ в электростатике.



Фиг. 3, 4.

поверхность S (или соответственно dS). При этом термин „магнитный поток“ вовсе не указывает на то, что здесь происходит „какое-то течение чего-то магнитного“.

Пользуясь термином „магнитный поток“ и обозначая его Φ , так что

$$d\Phi = \mathbf{B} dS \quad \text{и} \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} dS, \quad (3,10)$$

мы можем на основании выражений (3,8) и (3,9) сказать, что механическая работа A , совершаемая при перемещении в магнитном поле проводника, по которому проходит неизменяющийся ток I , равна произведению тока на пересеченный этим проводником магнитный поток Φ :

$$A = I\Phi. \quad (3,11)$$

При этом под сокращенным выражением „магнитный поток, пересеченный проводником“ мы понимаем „поток вектора магнитной индукции через поверхность, описанную проводником при его перемещении“.

Таким образом магнитный поток может быть определен по работе, произведенной проводником при его перемещении в магнитном поле.

Если при перемещении в магнитном поле проводника с неизменяющимся током I производится работа A , то магнитный поток через поверхность, пройденную проводником при его перемещении, равен работе A , деленной на ток I :

$$\Phi = \frac{A}{I}. \quad (3,12)$$

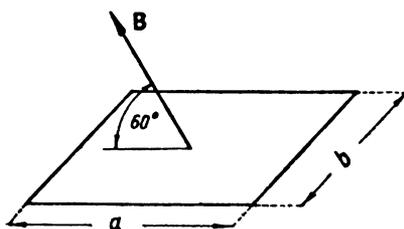
Взяв любое из равенств, определяющих магнитный поток, например, (3,10) или (3,12), легко установить, что единицей магнитного потока является вольтсекунда ($V \cdot \text{sec}$).

Действительно, по уравнению (3,10)

$$[\Phi] = [B] \cdot [S] = V \cdot \text{sec}/\text{cm}^2 \cdot \text{cm}^2 = V \cdot \text{sec}.$$

Более мелкая единица магнитного потока — максвелл — Mx ¹ составляет $10^{-8} V \cdot \text{sec}$. Таким образом

$$1 \text{ Gs} = 10^{-8} V \cdot \text{sec}/\text{cm}^2 = 1 \text{ Mx}/\text{cm}^2.$$



Фиг. 3, 5.

Пример 3, 2. Найти магнитный поток через прямоугольную плоскую площадку со сторонами $a = 10 \text{ cm}$ и $b = 15 \text{ cm}$ (фиг. 3, 5), если магнитная индукция B во всех точках поверхности равна $12\,000 \text{ Gs}$, причем вектор \mathbf{B} образует с плоскостью площадки угол 60° .

По определению магнитный поток

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS = \int_S B \cos(\mathbf{B} dS) dS = \int_S B_n dS,$$

где B_n — слагающая вектора магнитной индукции в направлении нормали к поверхности dS (нормальная слагающая вектора \mathbf{B}). В данном случае величина B_n , очевидно, одинакова для всех точек рассматриваемой поверхности и, следовательно, может быть, вынесена за знак интеграла, т. е.

$$\Phi = B_n \int_S dS,$$

¹ Сокращенное обозначение максвелла по $\frac{\text{ОСТ}}{\text{ВКС}}$ 5578 М. Мы отступаем здесь от стандарта по тем же соображениям, что и при обозначении гаусса (см. сноску на стр. 108).

но интеграл $\int_S dS$ равен непосредственно площади рассматриваемой поверхности, и следовательно, мы можем просто написать, что

$$\Phi = B_n S. \tag{3,13}$$

Подставляя данные нашего примера, получаем

$$B_n = B \cos(\text{Bd S}) = 12\,000 \cdot \cos 30^\circ = 10\,400 \text{ Gs};$$

$$S = a \cdot b = 10 \cdot 15 = 150 \text{ cm}^2,$$

откуда

$$\Phi = 10\,400 \cdot 150 = 15,6 \cdot 10^5 \text{ Mx} = 15,6 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{sec}.$$

Пример 3,3. Определить индукцию B в точках плоской прямоугольной поверхности $S = 500 \text{ cm}^2$, если магнитный поток через эту поверхность $\Phi = 6 \cdot 10^6 \text{ Mx}$ и вектор индукции во всех точках поверхности образует с ней угол 90° .

По формуле (3,13), выведенной при решении предыдущего примера, сразу находим

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{6 \cdot 10^6}{500} = 12\,000 \text{ Gs}.$$

Однако при таком решении мы делаем одно дополнительное предположение, а именно, что индукция B во всех точках поверхности S имеет одно и то же значение. Если этого предполагать нельзя, то полученный нами ответ дает лишь среднее значение индукции.

Отметим, что практически очень часто о величине индукции судят по значению магнитного потока, так как в целом ряде случаев, как мы увидим в дальнейшем, измерить непосредственно значение индукции не представляется возможным, в то время как величина магнитного потока поддается непосредственному измерению.

В тех случаях, когда индукция определяется по потоку, естественно рассматривать индукцию как плотность магнитного потока. Впрочем, это является очевидным обращением данного выше определения:

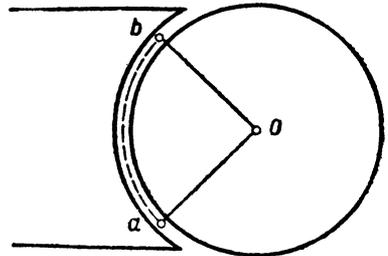
$$d\Phi = \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Представление индукции как плотности магнитного потока, естественно, напрашивается также при сравнении их единиц

$$\text{V} \cdot \text{sec} \quad \text{и} \quad \text{V} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2.$$

Пример 3,4. Определить магнитный поток через цилиндрическую поверхность, описанную проводником при его перемещении из положения a в положение b (фиг. 3,6). Аксиальная длина проводника $l = 5 \text{ cm}$, угол $aOb = 60^\circ$, радиус $Oa = Ob = 2 \text{ cm}$. Сила F , испытываемая проводником во всех точках пути между a и b , направлена перпендикулярно к радиусу, проведенному из центра O и равна $F = 0,458 \text{ mG}$ при токе в проводнике $i = 0,0001 \text{ A} = 0,1 \text{ mA}$.

Зная, что сила направлена перпендикулярно к радиусу, мы заключаем, что вектор магнитной индукции \mathbf{B} во всех точках рассматриваемой цилиндрической поверхности лежит в плоскости заданной проводником l и радиусом. (Однако мы ничего не можем сказать относительно угла, образуемого вектором \mathbf{B} с про-



Фиг. 3,6.

водником.) Для вычисления потока нам достаточно знать только составляющую вектора индукции B_n , нормальную к поверхности, образованной перемещением проводника, т. е. нормальную к самому проводнику, а ее величину мы можем определить по данной силе F , току и длине проводника (так как составляющая, параллельная проводнику, если бы она и существовала, не влияла бы ни на силу, действующую на проводник, ни на величину магнитного потока).

Определим сначала индукцию B_n , величина которой постоянна во всех участках рассматриваемой поверхности, так как постоянной по заданию является сила F .

По уравнению (3, 6)

$$F = IlB_n$$

непосредственно находим

$$B_n = \frac{F}{Il}$$

(сила F должна быть выражена в J/cm , l — в A и l — в cm , чтобы B_n была выражена в $V \cdot sec/cm^2$).

В нашем случае

$$F = 0,458 \text{ mG} = \frac{0,458}{10^6 \cdot 10,2} J/cm = 0,45 \cdot 10^{-7} J/cm,$$

а следовательно,

$$B_n = \frac{F}{Il} = \frac{0,45 \cdot 10^{-7}}{0,0001 \cdot 5} = 9 \cdot 10^{-6} V \cdot sec/cm^2 = 9 \text{ 000 Gs.}$$

Как и в предыдущем примере, в интегральном выражении магнитного потока

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS = \int_S B_n dS = B_n \int_S dS$$

мы можем вынести за знак интеграла величину B_n как постоянную. Выражение $\int_S dS = S$ представляет собой в данном примере величину цилиндрической поверхности, описанной проводником при рассматриваемом перемещении.

Поэтому

$$S = \frac{\alpha}{360} 2\pi r l = \frac{60}{360} 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 5 = 10,45 \text{ cm}^2$$

и

$$\Phi = B_n S = 9 \text{ 000} \cdot 10,45 = 9,42 \cdot 10^4 \text{ Mx} = 9,42 \cdot 10^{-4} V \cdot sec.$$

Пример 3, 5. Электрический двигатель обладает мощностью в 100 kW. Эта мощность развивается в результате движения ряда проводов, по которым проходит ток I (обмотка якоря), вращающихся вместе с валом в сильном магнитном поле (фиг. 3, 7). Число проводов $N = 200$, а ток в каждом из них 20 A. Требуется определить величину магнитного потока, пересекаемого каждым из этих проводов за 1 сек.

Работа, производимая двигателем в 1 сек., равна $A = 100 \text{ 000 J}$. Следовательно, на долю каждого из проводов приходится работа

$$A_1 = \frac{A}{N} = \frac{100 \text{ 000}}{200} = 500 \text{ J.}$$

По уравнению (3, 12)

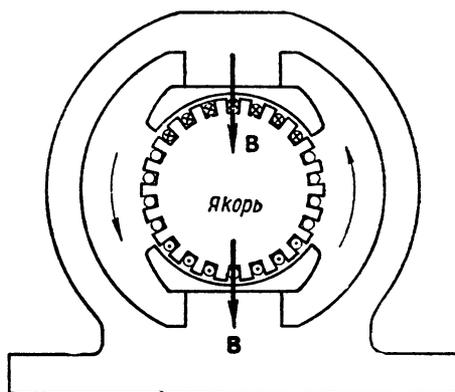
$$\Phi = \frac{A_1}{I} = \frac{500}{20} = 25 V \cdot sec.$$

Эту задачу можно продолжить, поставив еще такой вопрос: определить скорость движения проводов, если активная длина каждого из проводов (длина того участка, который расположен в магнитном поле) равна 50 см, а индукция в среднем равна 10 000 Gs.

Так как в 1 сек. каждый провод должен пересечь поток в $25 \text{ V} \cdot \text{сек}$, а при длине провода 50 см и среднем значении индукции 10 000 Gs каждый провод, перемещаясь на 1 м (100 см), пересечет поток

$$50 \cdot 100 \cdot 10\,000 = 5 \cdot 10^7 \text{ Mx} = 0,5 \text{ V} \cdot \text{сек},$$

то, следовательно, перемещение провода за 1 сек. должно составлять $\frac{25}{0,5} = 50 \text{ м}$, т. е. искомая скорость должна быть равна 50 м/сек.



Фиг. 3, 7.

3, 4. Знак магнитного потока

Значение магнитного потока $d\Phi = \mathbf{B} d\mathbf{S}$ положительно, когда угол между \mathbf{B} и $d\mathbf{S}$ меньше 90° , и отрицательно, когда этот угол больше 90° .

Обычно, если нет особых соображений относительно выбора направления вектора $d\mathbf{S}$, его принято выбирать таким образом, чтобы значение магнитного потока было положительно.

Направление вектора $d\mathbf{S}$ оказывается вполне определенным в тех случаях, когда определено положительное направление нормали к поверхности S . Положительное направление нормали мы будем выбирать согласно излагаемым ниже общепринятым правилам в случаях: 1) когда дана замкнутая поверхность и 2) когда поверхность не замкнута но ограничена контуром с заданным направлением обхода (например, контуром тока).

Когда поверхность замкнута, мы будем считать положительными нормали, направленные во внешнюю, а отрицательными — во внутреннюю область пространства, ограничиваемого данной поверхностью.

При этом внешняя сторона поверхности также рассматривается как положительная, а внутренняя как отрицательная.

Когда дан кольцевой контур с определенным направлением обхода (например, кольцевой контур тока) и плоская поверхность, им ограниченная, то положительное направление нормали к этой поверхности определяется по правилу правого винта (буравчика или штопора), если направление вращения винта совпадает с положительным направлением обхода по контуру, его поступательное движение будет указывать положительное направление нормали. В этом случае мы также будем различать положительную сторону поверхности (со стороны положительной нормали) и отрицательную (со стороны отрицательной нормали).

Выбрав согласно сказанному положительную сторону плоской поверхности, нетрудно перенести правило штопора и на более общий случай любой поверхности, ограниченной контуром любой формы с заданным направлением обхода, если иметь в виду, что этот контур и ограничиваемая им поверхность произвольной формы могут быть получены из рассмотренного простейшего случая (кольцо и плоская поверхность) путем непрерывной деформации. Положительная нормаль будет во всех случаях расположена с положительной стороны поверхности.

3.5. Магнитный поток через контур

Рассмотрим проводник с током, участок которого AB из положения ACB перемещается в положение $AC'B$ (фиг. 3,8). Если проводник находится в магнитном поле, то согласно выводам предыдущих параграфов им будет произведена работа $A = I\Phi$, где I — ток в проводнике, а Φ — магнитный поток через поверхность S , описанную перемещающимся проводником.

Ясно, что перемещение проводника из положения ACB в положение $AC'B$ можно произвести различными способами и что описанные при этом поверхности S будут различны и по величине и по виду. Однако для всех этих поверхностей будет оставаться общей граница, образуемая контуром $ACBC'A$.

Что касается работы, производимой при перемещении проводника из одного положения (ACB) в другое ($AC'B$), то, как показывает опыт, она остается одной и той же независимо от пути, по которому происходит перемещение проводника.

Другими словами, работа производимая при любом перемещении проводника с током, в данном магнитном поле и при данном токе зависит только от его начального и конечного положения (если ток все время остается постоянным).

Если обозначить через $A' = I\Phi'$ работу перемещения по одному пути, а через $A'' = I\Phi''$ — работу перемещения по другому пути, то равенство работ A' и A'' приводит к равенству магнитных потоков Φ' и Φ'' , а это значит, что магнитный поток через все возможные поверхности, имеющие общую (одну и ту же) границу, будет одним и тем же.

Благодаря этому свойству магнитного поля можно говорить о магнитном потоке через контур (пронизывающем контур) как о вполне определенной величине.

Пользуясь понятием магнитного потока через контур и основываясь на выводах предыдущих параграфов, мы можем формулировать следующее правило:

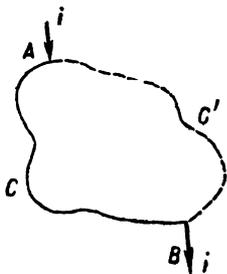
Работа, производимая при перемещении контура с неизменным по величине током в постоянном магнитном поле, равна произведению этого тока на увеличение пронизывающего контур магнитного потока:

$$A = I\Delta\Phi. \quad (3, 14)$$

Если происходит не увеличение, а уменьшение пронизывающего контур магнитного потока, мы должны его рассматривать как отрицательное увеличение. В таком случае будет отрицательным и значение производимой силами поля работы A , т. е. работа будет производиться посторонним источником энергии, и перемещение проводника будет происходить под действием сил, направленных против сил взаимодействия между магнитным полем и током.

Уравнение (3, 14) является видоизменением уравнения (3, 11), согласно которому работа при перемещении части контура с током равна произведению тока на пересеченный магнитный поток, который, очевидно, равен изменению магнитного потока, пронизывающего замкнутый контур.

Мы предполагаем, конечно, что в рассматриваемом случае изменение пронизывающего контур магнитного потока имеет своей причиной только перемещение контура, а не изменение самого магнитного поля.



Фиг. 3, 8.

Пример 3.6. По замкнутому плоскому контуру симметричному относительно некоторой оси проходит ток $I = 5\text{A}$. Этот контур поворачивается вокруг оси симметрии на угол 180° , производя при этом работу в 1000J . Определить величину магнитного потока Φ_0 , пронизывавшего контур в его начальном положении.

Так как контур вращается вокруг своей оси симметрии, то после поворота на 180° абсолютная величина пронизывающего контур магнитного потока останется прежней, но его знак (по отношению к току контура) будет обратным. Таким образом новое значение магнитного потока

$$\Phi = -\Phi_0,$$

а увеличение пронизывающего контур потока, равное разности алгебраических значений потока через контур до и после его перемещения,

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = -\Phi_0 - \Phi_0 = -2\Phi_0.$$

Таким образом согласно уравнению (3, 14) можно записать, что

$$A = I\Delta\Phi = -I2\Phi_0,$$

откуда

$$\Phi_0 = -\frac{A}{2I} = -\frac{1000}{2 \cdot 5} = -100\text{V} \cdot \text{sec}.$$

Так как мы предполагали, что работа произведена силами взаимодействия между магнитным полем и током, то увеличение потока ($-2\Phi_0$) должно быть положительным, а следовательно, магнитный поток Φ_0 при начальном положении контура был отрицательным.

3.6. Правило Максвелла о взаимодействии магнитного поля и тока

Из выражения работы $A = I\Delta\Phi$ можно вывести очень важное правило (правило Максвелла) о том, что силы, возникающие вследствие взаимодействия магнитного поля и тока, всегда стремятся так переместить контур тока, чтобы пронизывающий его магнитный поток увеличивался.

Действительно, работа A только в том случае будет положительной, т. е. только в том случае будет совершаться силами взаимодействия между полем и током, когда $\Delta\Phi$ положительно, т. е. когда поток Φ через контур увеличивается. Если же $\Delta\Phi$ отрицательно и поток через контур уменьшается, то и работа A будет отрицательной, т. е. она будет производиться не силами взаимодействия между полем и током, а посторонними силами противоположного направления.

Из правила Максвелла следует, что контур тока (например, кольцевой), внесенный в неравномерное магнитное поле, во-первых, будет как бы всасываться участками с наибольшей индукцией, а во-вторых, будет ориентироваться так, чтобы его ось совпала с направлением вектора индукции.

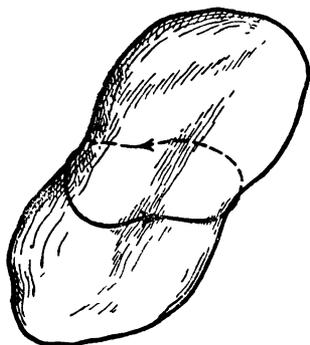
Если же поле в пределах контура равномерно и контур расположен так, что через него проходит наибольший возможный в данном поле магнитный поток, силы взаимодействия между полем и током уже не будут стремиться как-либо перемещать контур. Они будут только стремиться деформировать контур так, чтобы проходящий через него поток увеличился. Например, в случае кольцевого контура, ось которого совпадает с направлением магнитной индукции, силы поля будут стремиться его растянуть и будут направлены по радиусам, как непосредственно следует и из выражения силы

$$dF = I [dIB].$$

3.7. Магнитный поток через замкнутую поверхность

Магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это важное свойство магнитного поля является другим выражением того же закона, который нам позволил (см. § 3,5) ввести понятие о магнитном потоке через замкнутый контур.

Действительно, рассмотрим какую-либо замкнутую поверхность и проведем на этой поверхности какой-либо замкнутый контур, задав ему (произвольно) определенное направление обхода (фиг. 3,9). Очевидно, что этот контур разделит замкнутую поверхность на две части, имеющие одну и ту же границу. Имея это в виду, и определяя знак потока по отношению к направлению обхода контура, мы можем утверждать, что поток через обе части поверхности будет одинаковым.



Фиг. 3,9.

При этом, вычисляя поток по выражению $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, мы должны определить направление вектора $d\mathbf{S}$ (а направление $d\mathbf{S}$ определяет знак потока), исходя из принятого направления обхода контура.

Как нетрудно увидеть, для одной части поверхности это соответствует направлению нормалей во внутреннюю, а для другой — во внешнюю часть пространства, ограничиваемого замкнутой поверхностью. Но при определении потока через замкнутую поверхность мы условились (см. § 3,4) считать положительными нормали, направленные во внешнюю часть пространства. Следовательно, поток через всю замкнутую поверхность будет равен сумме потоков через две стороны рассматриваемой поверхности, причем эти два потока должны быть равны по величине, но обратны по знаку.

Такая сумма всегда будет равняться нулю.

Математически это выражается так:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3,15)$$

где символ \oint обозначает интегрирование по замкнутой поверхности.

На основании вышесказанного можно представлять, что через две поверхности, образующие вместе замкнутую оболочку, проходят потоки Φ_1 и Φ_2 , направление которых таково, что один из них выходит из внешнего пространства во внутреннее через одну из поверхностей, а другой через другую поверхность выходит во внешнее пространство. Поток Φ_1 равен потоку Φ_2 , поэтому алгебраическая сумма потоков через оболочку равна нулю, так как входящий поток мы можем рассматривать как отрицательный исходящий.

3.8. Индукционные линии и индукционные трубки

В электротехнике, как и в физике, очень часто применяется наглядное изображение магнитного поля с помощью индукционных трубок¹, заполняющих весь объем магнитного поля.

Индукционной линией называется линия, проведенная в магнитном поле так, что направление ее касательной в каждой точке совпадает

¹ Говорят также магнитные линии или магнитно-силовые линии.

с направлением вектора магнитной индукции \mathbf{B} в этой точке. Таким образом индукционные линии магнитного поля аналогичны силовым линиям электрического поля.

Индукционной трубкой называется часть магнитного поля, ограниченная трубчатой поверхностью, проведенной таким образом, чтобы ее не пересекала ни одна индукционная линия.

Это условие равносильно требованию, чтобы в любой точке трубчатой поверхности вектор индукции \mathbf{B} был направлен по одной из касательных к этой поверхности или, иначе говоря, чтобы в любой точке поверхности нормаль к ней была перпендикулярна вектору магнитной индукции: $\mathbf{B} \perp d\mathbf{S}$.

Основные свойства индукционной трубки, определенной таким образом, заключаются в том, что магнитный поток через любое сечение индукционной трубки есть величина постоянная.

Чтобы это доказать рассмотрим пересечение индукционной трубки двумя какими-либо поверхностями I и II (фиг. 3, 10). Получающиеся при этом сечения трубки обозначим ΔS_1 и ΔS_2 , а боковую поверхность трубки, лежащую между этими сечениями, обозначим S_0 .

Сумма потоков:

Через боковую поверхность трубки S_0

$$\Delta\Phi_0 = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

и через сечение ΔS_2

$$\Delta\Phi_2 = \int_{\Delta S_2} \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

должна равняться потоку $\Delta\Phi_1 = \int_{\Delta S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S}$ через сечение ΔS_1 , т. е.

$$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_0. \quad (3, 16)$$

Это следует из того, что поверхность ΔS_1 и совокупность поверхностей ΔS_2 и S_0 имеют одну и ту же границу в виде контура, образованного пересечением трубки с поверхностью I , а согласно § 3,5 магнитные потоки через любые поверхности, имеющие общую границу, равны между собой.

Но поток $\Delta\Phi_0$ равен нулю так как по условию построения трубки, в любой точке ее поверхности $\mathbf{B} \perp d\mathbf{S}$, а значит $\cos(\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0$ для всех точек поверхности S_0 и

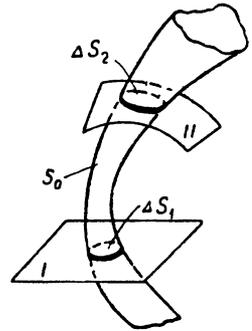
$$\Delta\Phi_0 = \int_{S_0} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \cos(\mathbf{B}, d\mathbf{S}) \int_{S_0} B dS = 0. \quad (3, 17)$$

Из (3, 16) и (3, 17) мы и получаем равенство, которое нужно было доказать:

$$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2. \quad (3, 18)$$

Отметим еще некоторые свойства индукционных линий и трубок, вытекающие из самого их определения и из свойств магнитного поля:

1. Две индукционные линии не могут пересекать друг друга. Действительно, допуская возможность их взаимного пересечения, мы должны были бы предполагать, что в точке их пересечения вектор магнитной индукции имеет два различных направления.



Фиг. 3, 10.

2. Индукционная трубка не имеет ни начала ни конца. Большой частью она замыкается на самое себя. В самом деле, предполагая, что индукционная трубка имеет конец, мы могли бы представить себе такую замкнутую поверхность, которая пересекалась бы этой трубкой только один раз. Поток через такую поверхность не был бы равен нулю (фиг. 3, 11), что противоречит установленным выше положениям.

3. Магнитный поток Φ через любую поверхность или контур можно измерять числом индукционных трубок n , проходящих через данную поверхность или пронизывающих данный контур:

$$\Phi = n \Delta\Phi, \quad (3, 19)$$

если вся область пространства, заключающая в себе данную поверхность или контур, разбита на индукционные трубки с одинаковым потоком $\Delta\Phi$.

То же самое можно сказать и о линиях индукции, если проводить их с таким расчетом, чтобы каждой индукционной трубке с потоком $\Delta\Phi$ соответствовала одна индукционная линия.

Все эти условия мы будем всегда предполагать выполненными, говоря в дальнейшем об индукционных линиях или трубках.

4. Среднее значение магнитной индукции в точках поверхности ортогональной к трубкам или линиям индукции пропорционально плотности проходящих через нее индукционных трубок или линий, т. е. числу линий или трубок, приходящихся на единицу площади.

Если каждая индукционная трубка заключает в себе поток, равный единице (одному масквеллу или одной вольтсекунде), мы имеем так называемые единичные трубки индукции и соответственно единичные линии индукции.

В этом случае индукция в какой-либо точке поверхности равна числу индукционных трубок (или линий), проходящих через площадку в 1 см^2 , расположенную перпендикулярно к этим трубкам (или линиям), а магнитный поток через данные поверхность или контур равен числу пронизывающих их индукционных трубок (или линий). Разумеется, речь идет здесь только о численном равенстве.

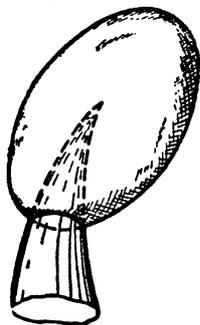
Вводя представление о линиях и трубках индукции, необходимо отметить, что хотя они и дают в большинстве случаев весьма наглядный способ изображения магнитного поля, однако встречаются и такие магнитные поля, которые не могут быть точно изображены с помощью линий или трубок индукции.

Пример 3, 6. На фиг. 3, 12 изображено магнитное поле между полюсным наконечником *П. Н.* и якорем *Я* динамомшины¹. Длина полюсной дуги $l_{\rho} = 20 \text{ см}$, каждая линия соответствует трубке с магнитным потоком $\Delta\Phi = 8000 \text{ Мх}$.

По картине поля требуется определить индукцию непосредственно под полюсным наконечником, поток, входящий через верхнюю половину якоря (изображенную на чертеже), и весь поток, исходящий из полюсного наконечника.

При этом можно считать, что по всей осевой длине якоря $l_{\text{я}} = 40 \text{ см}$ картина магнитного поля остается такой же и что потоком, проходящим через полюсный наконечник с торцевых сторон, можно пренебречь. На чертеже нанесены все линии индукции, приходящиеся на 1 см осевой длины якоря.

¹ Индукционные линии, изображенные на чертеже только в воздушном зазоре, на самом деле не обрываются, а проходят внутрь якоря и полюса. Однако в настоящем примере мы не будем рассматривать поле внутри якоря и полюса, поэтому продолжение линий не нанесено на чертеже.



Фиг. 3, 11.

По длине l_0 изображена 31 линия, причем крайние линии (оси трубок) проходят как раз по границе дуги l_0 . Следовательно, внутри дуги l_0 проходят только тридцать целых индукционных трубок. Тридцати трубкам соответствует магнитный поток в

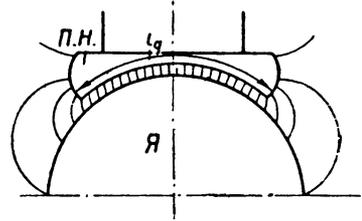
$$30 \cdot 8\,000 = 240\,000 \text{ Мх}$$

на 1 см осевой длины. Отсюда находят среднее значение индукции под полюсом, зная, что поток в 240 000 Мх приходится на поверхность в 20 см^2 (длина дуги $20 \text{ см} \cdot 1 \text{ см}$ в осевом направлении),

$$B = \frac{240\,000}{20} = 12\,000 \text{ Gs.}$$

Число всех линий, входящих в верхнюю половину якоря на 1 см его осевой длины, равно 37, следовательно, поток, входящий в верхнюю половину якоря, по всей его длине равен

$$\Phi_{\text{я}} = 37 \cdot 8\,000 \cdot 40 = 11,85 \cdot 10^6 \text{ Мх} = \\ = 0,1185 \text{ В} \cdot \text{сек.}$$



Фиг. 3. 12.

Весь поток $\Phi_{\text{я}}$, исходящий из полюсного наконечника, изображен 39 линиями, следовательно,

$$\Phi_{\text{н}} = 39 \cdot 8\,000 \cdot 40 = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Мх} = 0,125 \text{ В} \cdot \text{сек.}$$

В последнем вычислении, как уже говорилось, не учтен поток, исходящий из торцевых частей полюсного наконечника.

3.9. Закон Био и Савара

В начале этой главы мы говорили о том, что магнитное поле создается электрическим током. Поставим теперь своей задачей установить между ними количественное соотношение, т. е. определить значение вектора магнитной индукции \mathbf{B} в любой точке магнитного поля по заданному значению электрического тока, создающего, или, как говорят, возбуждающего, это магнитное поле.

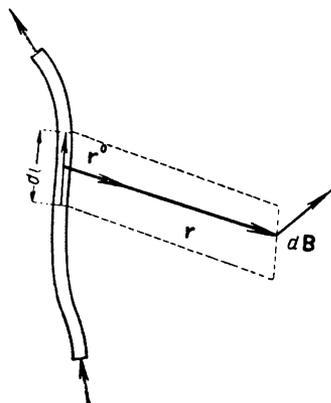
Когда все пространство, занимаемое магнитным полем, заполнено однородным веществом (или когда магнитное поле возбуждается в вакууме) и когда мы имеем дело с линейными токами, эта задача может быть решена с помощью дифференциального закона Био и Савара, выражающего индукцию магнитного поля $d\mathbf{B}$, создаваемого элементом линейного тока $I d\mathbf{l}$ в произвольной точке поля, определяемой вектором \mathbf{r} , который соединяет середину элемента $d\mathbf{l}$ с данной точкой (фиг. 3, 13), следующим образом:

$$d\mathbf{B} = \mu \frac{[I d\mathbf{l} \mathbf{r}^0]}{4\pi r^2}. \quad (3,20)$$

Выражение в квадратных скобках обозначает здесь векторное произведение элемента линейного тока $I d\mathbf{l}$ на единичный вектор \mathbf{r}^0 , совпадающий с вектором \mathbf{r} по направлению.

Множитель μ , входящий в уравнение (3,20) и называемый магнитной проницаемостью, представляет собой постоянную величину, зависящую от вещества, заполняющего пространство, в котором возбуждается магнитное поле, а также от единиц, в которых выражены все входящие в уравнение величины.

Как видно из этого уравнения, вектор $d\mathbf{B}$ направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r}^0 , и ориентирован по отношению к ним по правилу правоходового винта (штопора): вектор \mathbf{sB} направлен в сторону поступательного движения винта, вращаемого вместе с $d\mathbf{l}$ так, чтобы кратчайшим путем привести вектор $d\mathbf{l}$ в положение, при котором его направление совпадает с направлением вектора \mathbf{r}^0 (фиг. 3,13).



Фиг. 3, 13.

Для того чтобы по закону Био и Савара вычислить индукцию \mathbf{B} , создаваемую в данной точке данным конечным отрезком проводника или данным контуром тока, нужно взять сумму всех индукций ($d\mathbf{B}$), создаваемых каждым отдельным элементом рассматриваемого отрезка проводника или контура. Иначе говоря, нужно проинтегрировать уравнение (3,20).

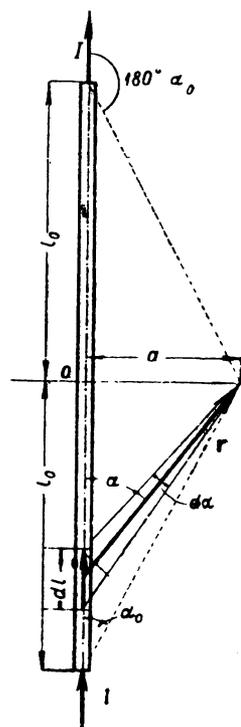
Рассмотрим процесс интегрирования этого уравнения на нижеследующих простейших примерах.

1°. Определим индукцию поля, создаваемого током I , проходящим по круглому прямолинейному проводу (длина которого $2l_0$), в точке, расположенной против середины этого провода на расстоянии a от его оси (фиг. 3,14). Длину провода $2l_0$ и расстояние a считаем большими по сравнению с радиусом провода, иначе говоря, считаем, что данный провод можно рассматривать как линейный проводник, не имеющий толщины.

Рассматриваемый прямолинейный участок провода длиной $2l_0$ является, очевидно, только частью некоторого замкнутого контура. Однако влияния остальной части контура на значение индукции в данной точке мы учитывать не будем.

Прежде всего заметим, что в данном случае \mathbf{r}^0 и $d\mathbf{l}$ всегда лежат в одной и той же плоскости и угол между ними всегда меньше 180° , а следовательно, направление всех элементарных слагающих векторов $d\mathbf{B}$ будет всегда одинаковым. Поэтому в настоящем случае суммирование векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить суммированием их абсолютных величин dB

$$dB = |d\mathbf{B}| = \left| \mu \frac{I[d\mathbf{l}r^0]}{4\pi r^2} \right| = \mu \frac{I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (3, 21)$$



Фиг. 3, 14.

Произведение $dl \cdot \sin \alpha$ есть проекция dl на направление, перпендикулярное к радиусу r , и потому при бесконечно малом dl может быть

принято совпадающим с элементом дуги $r d\alpha$, т. е.

$$dl \sin \alpha = r d\alpha. \tag{3, 22}$$

Подставляя выражение (3, 22) в уравнение (3, 21), получаем

$$dB = \mu \frac{I r d\alpha}{4\pi r^2} = \mu \frac{I d\alpha}{4\pi r}. \tag{3, 23}$$

Для того чтобы проинтегрировать это выражение, мы должны теперь выразить переменную r в функции α . Но как видно из чертежа,

$$r = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Имея это в виду, окончательно получаем

$$dB = \mu \frac{I \sin \alpha d\alpha}{4\pi a}. \tag{3, 24}$$

Это выражение может быть непосредственно проинтегрировано.

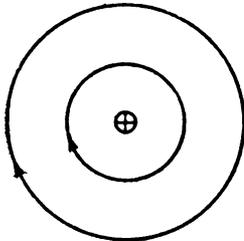
Нетрудно видеть, что, для того чтобы просуммировать индукцию, создаваемую всеми элементами прямолинейного провода длиной $2l_0$, выражение (3, 24) следует проинтегрировать в пределах от $\alpha = \alpha_0 = \arctg \left(\frac{a}{l_0} \right)$ до $\alpha = 180^\circ - \alpha_0$.

В результате интегрирования получаем

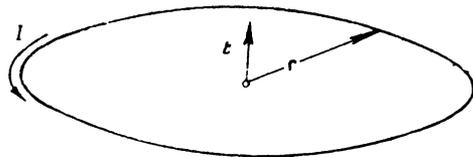
$$\begin{aligned} B &= \int_{\alpha_0}^{180^\circ - \alpha_0} \mu \frac{I \sin \alpha d\alpha}{4\pi a} = \frac{\mu I}{4\pi a} \int_{\alpha_0}^{180^\circ - \alpha_0} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu I}{4\pi a} [\cos \alpha_0 - \cos (180^\circ - \alpha_0)] = \\ &= \frac{\mu I}{2\pi a} \cos \alpha_0. \end{aligned}$$

Полученная формула

$$B = \mu \frac{I}{2\pi a} \cos \alpha_0 \tag{3, 25}$$



Фиг. 3, 15.



Фиг. 3, 16.

показывает, во-первых, что магнитная индукция прямо пропорциональна величине тока I , во-вторых, что во всех точках, одинаково удаленных от оси проводника и находящихся против его середины, значение индукции одинаково. Если при этом иметь в виду, что направление вектора магнитной индукции всюду перпендикулярно к радиусу r и к оси проводника (направление \mathbf{B} определяется векторным произведением $[\mathbf{dl} \mathbf{r}^0]$), то нетрудно видеть, что в данном случае индукционные линии представляют собой ряд концентрических окружностей (фиг. 3, 15), плотность которых обратно пропорциональна расстоянию точки от оси. Направление магнитной индукции для каждой из индукционных линий на фиг. 3, 15 изображено стрелками, оно может быть найдено или по векторному произведению $[\mathbf{dl} \mathbf{r}^0]$ или по правилу правоходового винта (правило штопора): если вращать винт так, чтобы его поступательное движение совпадало с направлением тока в проводе, направление вращения будет указывать направление индукции.

2°. Определим индукцию поля в центре кольцевого контура с радиусом R , когда по контуру проходит ток I (фиг. 3,16).

В этом случае \mathbf{r}^0 и $d\mathbf{l}$ лежат все время в одной плоскости, угол между ними остается во всех точках равным 90° , и кроме того, расстояние r от любого элемента тока до центра кольца также постоянно. Из этого следует, что любой элемент кольца $l d\mathbf{l}$ создает в его центре одинаковую индукцию

$$dB = \mu \frac{I dl}{4\pi r^3}. \quad (3, 26)$$

Суммируя действие всех элементов $d\mathbf{l}$ контура, длина которого $l = 2\pi r$, находим, что

$$B = \int_0^{2\pi r} \mu \frac{I dl}{4\pi r^3} = \mu \frac{I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} dl = \mu \frac{I}{2r} = \mu \frac{I}{d}, \quad (3, 27)$$

следовательно, индукция B ($V \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$) будет численно равна μ в центре такого кольцевого контура, для которого отношение тока в контуре (в А) к диаметру контура $d = 2r$ (в см) численно равно единице.

3, 10. Магнитная проницаемость

В выражениях, связывающих магнитную индукцию с током и рассмотренных в предыдущем параграфе оставалась пока неопределенной магнитная проницаемость μ . Займемся теперь ее изучением. Магнитная проницаемость характеризует собой как бы податливость среды к воздействию электрического тока, возбуждающего магнитное поле. Ее величина может быть определена только экспериментально¹. Ее размерность вытекает непосредственно из уравнения (3, 20), выражающего закон Био и Савара, а также из уравнений (3, 25) или (3, 27), выведенных из этого закона.

Остановимся на уравнении (3, 27) как наиболее простом и определим из него магнитную проницаемость

$$\mu = \frac{Bd}{I},$$

откуда

$$[\mu] = \frac{V \cdot \text{sec} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2 \cdot \text{A}} = \frac{V \cdot \text{sec}}{\text{A} \cdot \text{cm}} = \frac{\Omega \cdot \text{sec}}{\text{cm}}. \quad (3, 28)^2$$

Что касается числового значения магнитной проницаемости, то самые точные измерения показывают, что в вакууме магнитная проницаемость равна $1,2560 \cdot 10^{-8}$ Н/см.

Эта величина, являющаяся универсальной постоянной, обыкновенно обозначается символом μ_0 .

Когда ток возбуждается в пространстве, равномерно заполненном каким-либо веществом, величина магнитной проницаемости, вообще говоря, отлична от μ_0 . Однако для большинства веществ это отличие чрезвычайно мало, так для платины магнитная проницаемость равна $1,00036\mu_0$, для жидкого кислорода $1,00340\mu_0$, для воздуха в нормальных условиях $1,00000038\mu_0$, для висмута $0,999824\mu_0$.

Отношение магнитной проницаемости данного вещества к магнитной проницаемости вакуума называется относительной (или удельной) магнитной проницаемостью данного вещества и обозначается μ_r .

¹ См. также § 3,33 в конце настоящей главы

² $\Omega \cdot \text{sec}$ является единицей индуктивности (не смешивать с индукцией), о которой речь будет идти в дальнейшем. Этой единице присвоено название генри (обозначение Н). Имея это в виду, можно обозначить единицу проницаемости как Н/см.

В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, прилагательное „относительная“ часто опускают, называя величину μ_r просто магнитной проницаемостью того или иного вещества.

Все вещества в отношении их магнитной проницаемости могут быть разделены на три группы. Вещества, магнитная проницаемость которых несколько меньше магнитной проницаемости вакуума ($\mu_r < 1$), называются диамагнитными (например, висмут, для которого $\mu_r = 0,999824$). Вещества, магнитная проницаемость которых несколько больше магнитной проницаемости вакуума, называются парамагнитными (например, платина, для которой $\mu_r = 1,00036$).

Наконец, некоторые вещества, обладающие исключительно большой магнитной проницаемостью, к которым принадлежит в первую очередь железо (ferrum), называются ферромагнитными (т. е. подобными по своим магнитным свойствам железу). Ферромагнитными кроме железа и большинства его сплавов являются также кобальт и никель (в чистом виде и в виде различных сплавов), а также сплавы некоторых металлов, которые сами по себе не являются ферромагнитными (например, сплав марганца, меди и олова).

Ферромагнитные вещества занимают совершенно исключительное положение по своей магнитной проницаемости. В то время как для пара- и диамагнитных веществ μ_r лишь немного отличается от единицы, для технически чистого железа наибольшее значение μ_r имеет порядок 2600, а для сплавов железа с никелем (гиперник) μ_r может достигнуть величины порядка 70 000.

Кроме исключительно большой магнитной проницаемости ферромагнитные вещества обладают целым рядом особых свойств, к которым мы еще вернемся.

Магнитная проницаемость всех веществ, вообще говоря, не остается постоянной, она зависит от физического состояния, в котором находится вещество, т. е. от температуры, давления, магнитной индукции и т. п. Однако в технических расчетах для всех тел, кроме ферромагнитных, можно принимать $\mu_r = 1 = \text{const}$, так как возможные отклонения величины μ_r от единицы крайне ничтожны. (В приведенных выше примерах пара- и диамагнитных веществ взяты вещества с относительно большим отклонением μ_r от единицы.)

Для тел анизотропных, т. е. обладающих по различным направлениям различной структурой и различными физическими свойствами (кристаллы), магнитная проницаемость может быть различна по разным направлениям, в этом случае относительную магнитную проницаемость μ_r уже нельзя рассматривать как скалярную величину.

Однако в нашем изложении мы не будем касаться вопроса о магнитном поле в анизотропной среде.

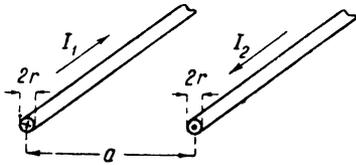
Когда магнитное поле возбуждается в пространстве, заполненном каким-либо веществом, носителем магнитного поля, как и в случае эвакуированного пространства, является само физическое пространство. Роль вещества сводится к тому, что оно в определенной мере усиливает или ослабляет действие электрического тока, возбуждающего магнитное поле. В общих чертах процесс заключается в том, что орбиты движущихся электронов и сами электроны, входящие в состав атомов, под влиянием магнитного поля изменяют свое положение. В результате появляются определенным образом ориентированные движения электронов, которые мы можем рассматривать как внутриатомные или внутримолекулярные электрические токи. В зависимости от их направления они усиливают или ослабляют действие тока в проводнике, возбуждающего магнитное поле.

3.11. Механическое взаимодействие параллельных проводов

С помощью положений, изложенных в предыдущих параграфах (3,25 и 3,26), можно определить механическую силу, действующую на единицу длины (1 см) каждого из двух параллельных цилиндрических прямолинейных проводов, по которым проходят в противоположных направлениях равные токи I_1 и I_2 (фиг. 3,17). Эти провода можно, очевидно, рассматривать как принадлежащие к одной цепи.

Будем предполагать, что расстояние a между осями проводов велико по сравнению с их радиусами r , что длина проводов l по обе стороны от рассматриваемого участка очень велика по сравнению с расстоянием между проводами a и что провода окружены воздухом.

Найдем сначала индукцию поля, создаваемого током первого провода в точках пространства, занятых вторым проводом. Так как $a \gg r$, то можно считать, что индукция во всех точках второго провода одна и та же и согласно уравнению (3,25) равна



Фиг. 3,17.

$$B = \mu \frac{I_1}{2\pi a} \cos \alpha_0 = \mu \frac{I_1}{2\pi a},$$

так как $\cos \alpha_0 = 1$ ($\alpha_0 = 0$) при $l \gg a$.

Направление вектора индукции \mathbf{B} перпендикулярно к плоскости, в которой лежат оси обоих проводов, и определяется по правилу штопора.

Теперь можно найти силу, испытываемую единицей длины второго провода, пользуясь уравнением (3,5), связывающим значение индукции B и силы F , испытываемой участком l линейного тока I_2 , расположенным в магнитном поле:

$$F = I_2 l B \sin(\mathbf{B}, \mathbf{l}) = I_2 l \mu \frac{I_1}{2\pi a}. \quad (3,29)$$

В правой стороне этого равенства подставлено значение из предыдущего уравнения и опущен $\sin(\mathbf{B}, \mathbf{l})$ равный единице, так как в данном случае угол между направлениями вектора индукции и участка линейного тока равен 90° .

Подставляя в уравнение (3,29) $I_2 = I_1 = I$ (токи в проводах одинаковы), $l = 1$ см (мы ищем силу, испытываемую единицей длины) и $\mu = 1,256 \cdot 10^{-8}$ В · сек/А · см (воздух), получаем окончательно

$$\begin{aligned} F &= \mu \frac{I^2}{2\pi a} \cdot 1 = 1,256 \cdot 10^{-8} (\text{В} \cdot \text{сек}/\text{А} \cdot \text{см}) \frac{I^2 (\text{А}^2)}{2\pi a (\text{см})} \cdot 1 (\text{см}) \approx \\ &\approx \frac{2I^2}{a} 10^{-9} \text{ВА} \cdot \text{сек}/\text{см} = \frac{2I^2}{a} \cdot 10^{-9} \text{J}/\text{см} = 2,04 \cdot 10^{-8} \frac{I^2}{a} \text{кГ}. \end{aligned} \quad (3,30)^1$$

Определяя направление вектора магнитной индукции (\mathbf{B}) по правилу штопора, направление силы, действующей на провод с током, по правилу левой руки, мы найдем, что при взаимно противоположном направлении токов параллельные провода отталкиваются друг от друга.

В общем случае, когда токи I_1 и I_2 в проводах неодинаковы, сила (в кГ), испытываемая участком провода длиной l , выразится уравнением

$$F = 2,04 \cdot 10^{-8} \frac{I_1 I_2}{a} l. \quad (3,31)$$

Формула (3,29) указывает на один из возможных способов экспериментального определения магнитной проницаемости. Действительно, если

¹ Отсутствие десятичных знаков у коэффициента 2 в формуле (3,30) не является случайным, а вызвано самим выбором единицы тока.

определить из опыта величину силы F (в J/cm), действующей на отрезок провода строго определенной длины l при данном расстоянии между проводами a и данных токах I_1 и I_2 , то магнитная проницаемость μ может быть вычислена по формуле

$$\mu = \frac{2\pi a F}{I_1 I_2 l}. \quad (3, 32)$$

Пример 3,7. Три параллельных провода расположены, как изображено на фиг. 3,18 (на фигуре дано сечение проводов плоскостью, перпендикулярной их осям), расстояния между ними $a = 15$ см, $b = 20$ см, $c = 25$ см; токи в проводах $I_1 = 10\ 000$ А, $I_2 = 5\ 000$ А, $I_3 = 5\ 000$ А, их направления указаны на фиг. 3,18¹. Требуется найти величину и направление силы, действующей на опоры, поддерживающие провод 1, если расстояние между соседними опорами равно 1 м.

Сила, испытываемая проводом 1 от действия тока в проводе 2.

$$F_{21} = 2,04 \cdot 10^{-8} \frac{10\ 000 \cdot 5\ 000}{15} 100 = 6,8 \text{ кГ.}$$

Эта сила направлена вертикально вверх.

Сила, испытываемая проводом 1 от действия тока в проводе 3,

$$F_{31} = 2,04 \cdot 10^{-8} \frac{10\ 000 \cdot 5\ 000}{25} 100 = 4,07 \text{ кГ}$$

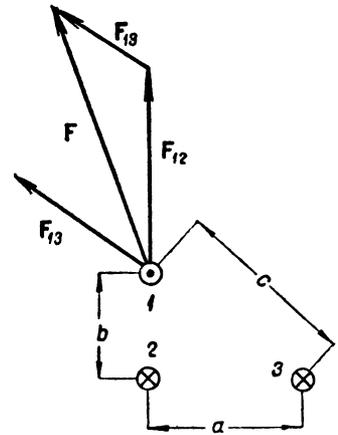
и имеет указанное на чертеже направление, образуя с силой F_{21} угол $36^\circ 50'$.

По правилу сложения векторов находим результирующую силу

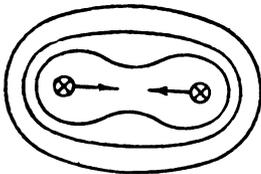
$$F = 9,80 \text{ кГ,}$$

образующую с вертикалью угол $19^\circ 30'$.

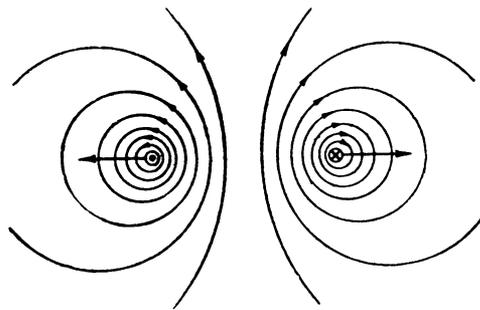
Чтобы вычислить индукцию в любой точке поля, создаваемого двумя параллельными проводами, можно снова воспользоваться дифференциальным законом Био и Савара, распространив интегрирование не только на весь первый, но и на весь второй провод. Если в какой-



Фиг. 3, 18.



Фиг. 3, 19.



Фиг. 3, 20.

нибудь точке пространства индукция поля, создаваемого током первого провода, равна B_1 , а индукция поля, создаваемого током второго провода равна B_2 , то индукция результирующего поля

$$B = B_1 + B_2.$$

¹ \otimes (хвост стрелки) обозначает ток, направленный за плоскость чертежа, \odot (острие стрелки)—ток, направленный из-за плоскости чертежа.

В результате такого наложения полей, создаваемых двумя проводниками, получаются картины поля, изображенные на фиг. 3,19 для случая, когда токи I_1 и I_2 равны, и направлены в одну сторону, и на фиг. 3,20— для случая, когда токи I_1 и I_2 равны, но направлены в противоположные стороны; на фиг. 3,19 и 3,20 указаны также направления силы F механического взаимодействия проводов.

Как видно из этих схематических изображений поля, направление механической силы может быть получено непосредственно из картины поля, если приписать индукционным трубкам стремление сокращаться по своей длине и, напротив, расширяться по своему поперечному сечению. Приписывая трубкам индукции такое свойство, можно правильно определять характер механического взаимодействия токов любой конфигурации, пользуясь графическим изображением создаваемого им магнитного поля.

3.12. Напряженность магнитного поля

В рассмотренных формулах для вычисления индукции, а также и в самом законе Био и Савара выражение индукции состоит из двух множителей, один из которых — магнитная проницаемость μ — выражает влияние среды на интенсивность создаваемого током магнитного поля, другой же зависит только от величины тока и пространственного расположения соответствующих проводников. Этот второй множитель в выражении индукции называется напряженностью магнитного поля и обозначается буквой H . Таким образом

$$B = \mu H, \quad (3, 33)$$

откуда

$$H = \frac{B}{\mu}. \quad (3, 34)$$

Напряженность магнитного поля, возбуждаемого в данной точке пространства каким-либо линейным током, при условии, что все пространство, в котором возбуждается магнитное поле, эвакуировано или равномерно заполнено тем или иным веществом, может быть вычислена на основании закона Био и Савара для напряженности магнитного поля:

$$dH = \frac{dB}{\mu} = \frac{[i dl r^0]}{4\pi r^2}, \quad (3, 35)$$

непосредственно вытекающего из формул (3, 34) и (3, 20).

Совершенно подобно тому как по закону Био и Савара мы вычислили индукцию поля, создаваемого током прямолинейного или кольцевого проводника, можно для этих случаев вычислить и напряженность магнитного поля.

Мы не будем, однако, проводить здесь это вычисление, так как наличие или отсутствие постоянного множителя μ в интегрируемой функции отразится на результате интеграции только тем, что в него будет или не будет входить этот же множитель μ , поэтому на основании (3, 25) можно прямо написать выражение напряженности магнитного поля на расстоянии a от оси прямолинейного цилиндрического провода с током I :

$$H = \frac{I}{2\pi a}, \quad (3, 36)$$

если длина провода очень велика по сравнению с радиусом провода и расстоянием a .

Точно так же из (3,26) получаем выражение напряженности поля в центре кольца, по которому проходит ток I :

$$H = \frac{I}{2r} = \frac{I}{d}, \quad (3,37)$$

где $d = 2r$ — диаметр кольца.

Необходимо отметить, что данное выше определение понятия напряженности магнитного поля применимо без дополнительных оговорок только в тех случаях, когда магнитное поле возбуждается в вакууме или в однородной среде, заполняющей все пространство, на которое распространяется магнитное поле, иначе говоря, когда применим закон Био и Савара.

Напряженность поля, как видно из уравнений (3,34) и (3,35), есть векторная величина. Направление вектора напряженности магнитного поля совпадает с направлением вектора индукции в данной точке во всех случаях, когда магнитная проницаемость μ является скаляром, т. е. во всех случаях однородной некристаллической среды (для кристаллов, как уже было указано, μ может и не быть скаляром).

Введение понятия напряженности магнитного поля позволяет характеризовать магнитное состояние в данной области пространства с точки зрения причины, возбуждающей это состояние, а также дает критерии для сравнения усиливающего или ослабляющего действия различных веществ на магнитное поле, т. е. для определения доли участия этих веществ в создании магнитного поля.

Разделение выражения индукции на напряженность поля и магнитную проницаемость среды оправдывается также тем обстоятельством, что, вычислив не зависящую от среды напряженность поля, мы получаем возможность быстро определить соответствующую индукцию при заполнении занятого магнитным полем пространства тем или иным веществом. Такое разделение оказывается совершенно необходимым при расчете магнитных полей в неоднородной среде, содержащей ферромагнитные тела, а с расчетом таких полей больше всего приходится иметь дело в электротехнике (железо машин и трансформаторов).

Следует заметить, что характеристика состояния среды тремя величинами, из которых одна не зависит от свойств среды (H), другая характеризует только среду (μ), а третья является объединяющей их характеристикой состояния данной среды ($B = \mu H$), очень часто встречается в физике и технике.

Так, например, до известной степени аналогичным уравнению (3,33) является уравнение

$$e = kp,$$

которым в сопротивлении материалов характеризуется состояние растянутого стержня. В этом уравнении обозначают: e — относительное удлинение, т. е. деформацию (аналогично B), $k = \frac{1}{E}$ — величину, обратную модулю упругости, являющуюся характеристикой материала (аналогично μ), а p — напряжение стержня, равное приложенной нагрузке, деленной на сечение стержня (аналогично H). Укажем еще на одну общую черту: напряженность поля H может быть только вычислена (или на основании получающейся индукции B при известной проницаемости μ или в некоторых случаях по закону Био и Савара), тогда как индукция B может быть измерена, например, по непосредственному силовому действию на элемент тока. Точно так же напряжение в стержне может быть только вычислено (или по деформации стержня при данном модуле упругости

или как частное нагрузки и сечения), тогда как величина деформации может быть непосредственно измерена.

Единицей напряженности магнитного поля в практической системе единиц является ампер, деленный на сантиметр (А/см). Эту размерность можно вывести по любому из уравнений, связывающих напряженность поля с возбуждающим это поле током.

Например, по уравнению (3,37) получаем

$$[H] = \frac{[i]}{[d]} = \text{А/см}. \quad (3,38)$$

Мы получим конечно ту же единицу для напряженности поля, если будем исходить из уравнения (3,34). Действительно

$$[H] = \frac{[B]}{[\mu]} = \frac{\text{В} \cdot \text{сек} \cdot \text{А} \cdot \text{см}}{\text{см}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{сек}} = \frac{\text{А}}{\text{см}}.$$

На практике иногда пользуются единицей напряженности магнитного поля, принадлежащей к абсолютной магнитной системе единиц (см. § 3,33). Эта единица носит название эрстед (Ое). $1 \text{ Ое} = 0,795 \text{ А/см}$. Единица напряженности поля в этой системе выбрана так, что в вакууме (а в первом приближении и в воздухе) индукция численно равна напряженности.

Пример 3,8. Найти напряженность магнитного поля в центре кольцевого проводника, диаметр которого $d = 1 \text{ м}$ и по которому проходит ток $I = 100 \text{ А}$. По уравнению (3,37) находим

$$H = \frac{I}{d} = \frac{100 \text{ А}}{100 \text{ см}} = 1 \text{ А/см} = 1,256 \text{ Ое}.$$

Пример 3,9. Даны два прямолинейных параллельных провода, расстояние между которыми $d = 2 \text{ м}$ мало по сравнению с их длиной и велико по сравнению с их радиусом. Найти значение магнитной индукции и напряженности магнитного поля в точке, лежащей в плоскости, проходящей через оси проводов и удаленной от оси одного из проводов на 50 см , а от оси другого на 150 см . Ток в каждом из проводов равен 20 А . Направление тока в проводах различно. Окружающая среда — воздух.

По уравнению (3,36) находим напряженности поля H_1 и H_2 , создаваемые первым и вторым проводами:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi a_1} = \frac{20}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 0,0636 \text{ А/см};$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi a_2} = \frac{20}{2 \cdot 3,14 \cdot 150} = 0,0212 \text{ А/см}.$$

Применяя для определения направления напряженности поля правило штурмана и имея в виду, что ток в проводах направлен различно, находим, что результирующая напряженность магнитного поля H равна арифметической сумме напряженностей поля H_1 и H_2 , т. е.

$$H = H_1 + H_2 = 0,0848 \text{ А/см} = 0,107 \text{ Ое}.$$

По уравнению (3,33) находим, что индукция

$$B = \mu H = 1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0848 = 0,107 \cdot 10^{-8} \text{ В} \cdot \text{сек/см}^2 = 0,107 \text{ Гс}.$$

3,13. Закон полного тока

При вычислении напряженности магнитного поля часто бывает удобно пользоваться законом Био и Савара в обобщенной форме или так называемым законом полного тока. Этот закон формулируется следующим

образом: линейный интеграл напряженности магнитного поля (\mathbf{H}) по любому замкнутому контуру равен полному току, проходящему через поверхность, ограниченную этим контуром.

Выражение полный ток через какую-либо поверхность обозначает в случае линейных токов алгебраическую сумму токов, пересекающих рассматриваемую поверхность. Таким образом для линейных токов

$$\oint \mathbf{H} ds = \sum I. \quad (3, 39)$$

При этом за положительные считаются токи, входящие с отрицательной стороны поверхности и выходящие с ее положительной стороны.

В более общем случае, когда токи, пересекающие поверхность, нельзя рассматривать как линейные, выражение „полный ток“ обозначает поток вектора плотности тока через данную поверхность, т. е.

$$\int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Второе определение полного тока включает в себя как частный случай и первое определение.

В общем случае закон полного тока выражается уравнением

$$\oint \mathbf{H} ds = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (3, 40)$$

где интеграл правой части равенства распространяется на поверхность S , ограниченную контуром, по которому берется интеграл в левой части равенства.

Для линейных токов закон полного тока может быть выведен из закона Био и Савара. Рассмотрим какой-либо контур K , несущий ток I . По закону Био и Савара каждый элемент $d\mathbf{l}$ этого контура создает в точке, отстоящей от этого элемента на расстояние \mathbf{r} , магнитное поле, напряженность которого

$$d\mathbf{H} = \frac{I [d\mathbf{l}r^0]}{4\pi r^2}.$$

Результирующая напряженность поля \mathbf{H} , создаваемого в данной точке всем контуром тока, будет получена, если мы просуммируем действие всех остальных элементов контура, иначе говоря, если мы возьмем интеграл от выражения $d\mathbf{H}$ по всему контуру K :

$$\mathbf{H} = \oint_K \frac{I [d\mathbf{l}r^0]}{4\pi r^2}. \quad (3, 41)$$

Умножим левую и правую части этого равенства скалярно на $d\mathbf{s}$ — бесконечно малый элемент длины второго контура, по которому будет вычисляться $\oint \mathbf{H} ds$. В результате умножения получаем:

$$\mathbf{H} ds = H_S \cdot ds = \oint_K I \frac{ds [d\mathbf{l}r^0]}{4\pi r^2} = - \frac{I}{4\pi} \oint_K \frac{(-ds) [d\mathbf{l}r^0]}{r^2}. \quad (3, 42)$$

Здесь ds введено под знак интеграла как постоянная, что же касается изменения знаков, цель этой операции выяснится в дальнейшем.

Согласно правилам векторного анализа в скалярно-векторном произведении трех векторов множители могут быть переставлены в порядке круговой замены.

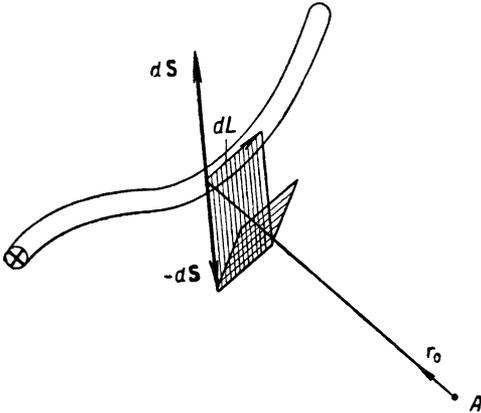
Пользуясь этим, представим выражение $-ds [d\mathbf{l}r^0]$ в виде $r^0 [-ds \cdot d\mathbf{l}]$.

Выясним теперь геометрическое значение выражений

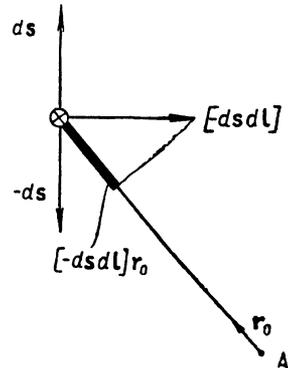
$$\mathbf{r}^0 [-\mathbf{ds} \cdot \mathbf{dl}] \quad \text{и} \quad \frac{\mathbf{r}^0 [-\mathbf{ds} \cdot \mathbf{dl}]}{r^2}.$$

Произведение $[-\mathbf{ds} \cdot \mathbf{dl}]$ (фиг. 3,21) есть вектор, выражающий величину элементарной поверхности, образованной перемещением элемента \mathbf{dl} на расстояние $-\mathbf{ds}$ (вертикально заштрихованная площадка).

Скалярное произведение этого вектора на единичный вектор \mathbf{r}^0 есть проекция указанной элементарной поверхности на плоскость, перпендикулярную к вектору \mathbf{r}^0 (горизонтально заштрихованная площадка).



Фиг. 3,21.



Фиг. 3,22.

На фиг. 3,22 изображены те же величины в проекции на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{dl} .

Что касается отношения

$$\frac{[-\mathbf{ds} \mathbf{dl}] \mathbf{r}^0}{r^2},$$

то оно выражает пространственный угол $d^2\Omega$, под которым площадка $[-\mathbf{ds} \mathbf{dl}]$ видна из точки A , отстоящей на расстоянии r от середины этой площадки (или от середины элемента \mathbf{dl} , что безразлично при бесконечно малых \mathbf{dl} и \mathbf{ds}). Индекс ² у знака дифференциала обозначает, что пространственный угол ($d^2\Omega$) является бесконечно малой величиной второго порядка, так как в определение этого угла входит произведение двух бесконечно малых величин \mathbf{ds} и \mathbf{dl} .

Интегрируя выражение

$$d^2\Omega = \frac{[-\mathbf{ds} \mathbf{dl}] \mathbf{r}^0}{r^2}$$

по всему замкнутому контуру K , мы, очевидно, получим величину пространственного угла

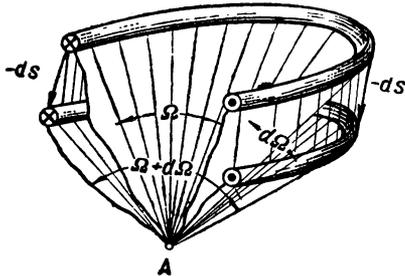
$$d\Omega = \oint_K \frac{[-\mathbf{ds} \mathbf{dl}] \mathbf{r}^0}{r^2}, \quad (3,43)$$

под которым из точки A видна полоска, образованная всем контуром K при его перемещении на $-\mathbf{ds}$. При этом угол, под которым из точки A виден сам контур K в своем новом положении, будет на величину $d\Omega$ больше пространственного угла Ω , под которым из точки A был виден этот же контур в его исходном положении (фиг. 3,23).

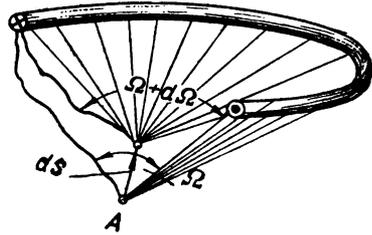
На основании сказанного мы можем написать уравнение (3,42) в такой форме:

$$\mathbf{H}ds = H_s ds = - \frac{I}{4\pi} d\Omega. \quad (3,44)$$

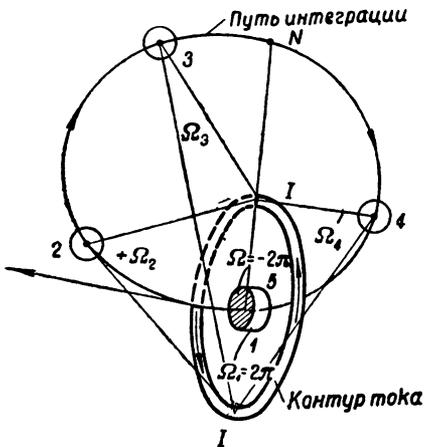
Но перемещение контура K на расстояние $-ds$ относительно неподвижной точки A эквивалентно перемещению точки A на $+ds$ при неподвижном контуре, так как величина угла Ω и его изменение зависят только от относительного положения точки A и контура K (ср. фиг. 3, 23 и 3, 24).



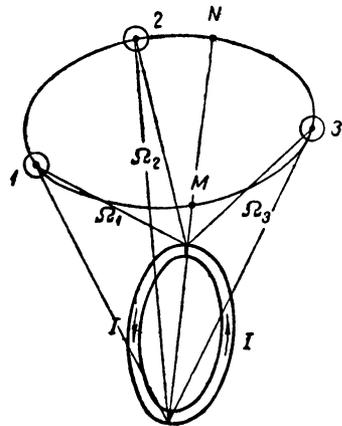
Фиг. 3, 23.



Фиг. 3, 24.



Фиг. 3, 25.



Фиг. 3, 26.

Таким образом скалярное произведение вектора напряженности поля \mathbf{H} , создаваемого в данной точке замкнутым контуром тока I на элементарный отрезок ds , пропорционально уменьшению пространственного угла, под которым виден контур из этой точки при ее перемещении на ds . Множителем пропорциональности при этом является величина тока в контуре, деленная на 4π .

Из (3,44) следует, что

$$\oint \mathbf{H}ds = - \frac{I}{4\pi} \oint d\Omega. \quad (3,45)$$

Но полное изменение пространственного угла $\oint d\Omega$ при обходе контура по замкнутому пути будет равно или $\pm 4\pi$ или нулю, в зависимости от того, будет ли сцеплен наш замкнутый путь с контуром тока или нет. Чтобы в этом убедиться, достаточно проследить за изменением пространственного угла при перемещении по пути, изображенному на фиг. 3, 25, и по пути, изображенному на фиг. 3, 26. Рассмотрим сначала первый случай.

За исходное положение возьмем точку I , лежащую в плоскости контура тока. Для этой точки пространственный угол равен $+2\pi$, если считать, что мы смотрим на положительную сторону контура тока. Переходя в точку 2 и затем в точку 3 , мы будем наблюдать непрерывное уменьшение пространственного угла.

Перемещаясь в том же направлении, мы вскоре придем в точку N , лежащую в плоскости контура тока. Для этой точки пространственный угол равен нулю.

Дойдя до этой точки, мы получили уменьшение угла от 2π до 0 , т. е. на 2π .

Перемещаясь дальше в том же направлении, мы будем получать уже отрицательные значения угла, так как из дальнейших точек будет видна отрицательная сторона контура тока.

При этом от точки к точке абсолютная величина угла будет возрастать, и когда мы дойдем до точки 5 , угол будет равен -2π .

Таким образом, пройдя замкнутый путь, мы получили увеличение угла Ω на -4π (сначала от $+2\pi$ до 0 , а потом от 0 до -2π), и следовательно

$$\oint d\Omega = -4\pi.$$

Нетрудно убедиться в том, что если бы мы выбрали обратный путь обхода, мы получили бы, что

$$\oint d\Omega = +4\pi.$$

Таким образом уравнение (3, 45) при обходе по замкнутому пути, сцепленному с контуром тока (фиг. 3, 25), дает для направления обхода 12345

$$\oint \mathbf{H} ds = -\frac{I}{4\pi} (-4\pi) = +I, \quad (3, 46)$$

а для направления обхода 54321

$$\oint \mathbf{H} ds = -\frac{I}{4\pi} 4\pi = -I. \quad (3, 47)$$

Положительный знак тока I соответствует при этом тому случаю, когда ток, пересекая поверхность, ограниченную путем интеграции, входит в нее с отрицательной стороны (фиг. 3, 25), а отрицательный — тому случаю, когда ток, пересекая ту же поверхность, входит в нее с положительной стороны.

Перейдем к случаю, изображенному на фиг. 3, 26. Теперь путь интеграции не сцеплен с контуром тока. Выбрав за исходную — точку I с углом Ω и перемещаясь по указанному на фигуре направлению, мы придем в точку 2 с меньшим углом. Перемещаясь дальше в том же направлении, мы вскоре придем в точку N , лежащую в плоскости контура тока. Для этой точки пространственный угол будет равен нулю. За этой точкой углы будут отрицательными, так как из следующих точек будет видна отрицательная сторона контура тока.

Пространственный угол будет отрицателен и будет некоторое время увеличиваться по абсолютной величине, скажем до точки 3 , но при дальнейшем перемещении угол снова будет уменьшаться по абсолютной величине, и наконец, в точке M , лежащей опять в плоскости контура тока, угол снова обратится в нуль. На участке пути между точками M и I угол снова будет положителен и возрастет от нуля до Ω_1 . Результирующее изменение угла, таким образом, равно нулю: действительно на участке IN угол уменьшился с Ω_1 до 0 , на участке N — от нуля до Ω_3 , на участке $3M$ от Ω_3 снова до 0 и, наконец, на участке MI от 0 до Ω .

Таким образом

$$\oint d\Omega = 0,$$

а следовательно, и

$$\oint \mathbf{H} ds = 0, \quad (3, 48)$$

если путь интеграции не сцеплен с контуром тока.

Результат, полученный нами для плоского контура, может быть обобщен для контура любой формы.

Уравнения (3, 46), (3, 47) и (3, 48) выражают закон полного тока.

Рассмотрим несколько характерных случаев применения этого закона.

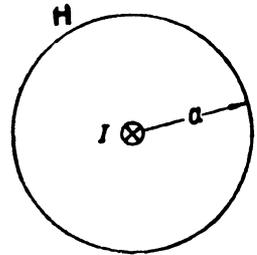
1. Если взять в качестве контура интегрирования окружность с радиусом a , расположенную симметрично относительно оси прямолинейного цилиндрического провода, по которому проходит ток I (фиг. 3, 27), то из соображений симметрии легко получить, что

$$\oint \mathbf{H} ds = H 2\pi a = \pm I$$

(знак зависит от выбранного направления обхода) и, следовательно,

$$H = \frac{\pm I}{2\pi a}$$

(здесь знак указывает на совпадение или несовпадение направления обхода с направлением напряженности поля).



Фиг. 3, 27.

2. До сих пор мы рассматривали магнитное поле только вне проводника с током. Теперь, пользуясь законом полного тока, мы можем вычислить распределение напряженности магнитного поля внутри прямолинейного цилиндрического проводника, длина которого велика по сравнению с его радиусом.

Предполагая, во-первых, что магнитное поле создается только током этого проводника, т. е. что другие проводники с током достаточно удалены, и никакого постороннего магнитного поля внутри проводника не существует, во-вторых, считаем ток распределенным по всему сечению проводника равномерно с плотностью

$$j = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{I}{S},$$

где r — радиус сечения, а S — его площадь, причем направление вектора плотности тока \mathbf{j} всюду параллельно оси цилиндра, в-третьих, предполагаем на основании симметрии, что напряженность магнитного поля одинакова во всех точках проводника, отстоящих на одинаковом расстоянии x от его оси.

Если за путь интегрирования взять окружность с радиусом x , симметричную относительно оси проводника, то закон полного тока

$$\oint \mathbf{H} ds = \int_S \mathbf{j} dS$$

приводит к равенству

$$H 2\pi x = \frac{I}{2\pi r^2} \pi x^2,$$

откуда

$$H = \frac{I}{2\pi r^2} x, \quad (3, 50)$$

т. е. напряженность магнитного поля внутри цилиндра, по всему сечению которого равномерно распределен ток I , прямо пропорциональна расстоянию x от оси цилиндра.

Для поверхности цилиндра ($x=r$) уравнение (3,50) дает то же значение напряженности поля, которое было получено раньше по закону Био и Савара:

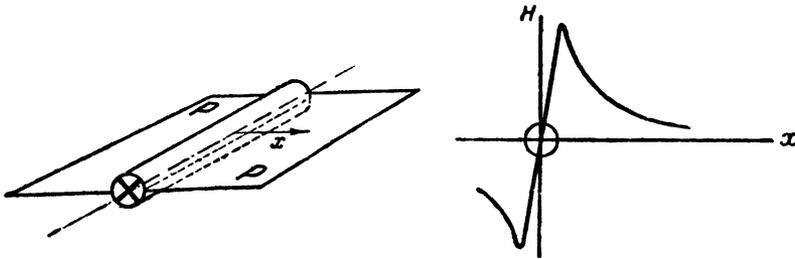
$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Значение напряженности поля не претерпевает разрыва на поверхности проводника.

Изображая графически напряженность поля в плоскости $P-P$, проходящей через ось проводника, мы получим кривую, изображенную на фиг. 3, 28, где по оси ординат отложены значения напряженности поля, а по оси абсцисс — расстояние от оси проводника.

Напряженность поля на оси проводника равна нулю, затем она возрастает по закону $H = \frac{I}{2\pi r^2} x$ (прямая) до $x=r$ и дальше убывает по закону $H = \frac{I}{2\pi x}$ (гипербола).

3. Исходя из закона полного тока, легко определить напряженность магнитного поля, создаваемого катушкой, намотанной на кольцо (тороид). Обозначим R — радиус кольца (фиг. 3, 29), r — радиус катушки, w — число ее витков, I — ток в цепи катушки, т. е. в каждом ее витке.



Фиг. 3, 28.

По соображениям симметрии мы и здесь можем утверждать, что на равных расстояниях от оси кольца напряженность поля будет одинакова, а силовые линии (линии индукции) представляются в виде concentric окружностей. Обозначая расстояние от оси x и интегрируя вдоль силовой линии, мы получим

$$\oint \mathbf{H} ds = H 2\pi x = I w,$$

если только контур интегрирования с радиусом x проходит внутри катушки, так как при этом сумма токов, пронизывающих ограниченную этим контуром поверхность, равна $I w$.

Отсюда

$$H = \frac{I w}{2\pi x} = \frac{I w}{l}, \quad (3,51)$$

где l обозначает длину окружности, взятой в качестве контура интегрирования.

Напротив, если контур интегрирования лежит вне кольцевой катушки, то полный ток, проходящий через любую из ограниченных им поверхностей, равен нулю. Действительно, представляя себе различного вида поверхности, нетрудно убедиться, что провода с током или вовсе их не пересекают или пересекают обязательно в двух направлениях, так что алгебраическая сумма токов через поверхность останется равной нулю.

В последнем случае закон полного тока дает

$$H 2\pi x = 0,$$

откуда

$$H = 0,$$

т. е. поле вне катушки равно нулю.

По аналогии с электрическим полем, где линейный интеграл от напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру ($\oint \mathbf{E} ds$) называется э. д. с., при рассмотрении магнитных явлений $\oint \mathbf{H} ds$, равный полному току, часто называется магнитодвижущей силой (м. д. с.), хотя в данном случае нет речи ни о силах, ни о движении¹.

3, 14. Индуктированная э. д. с.

Сила, действующая в электрическом поле \mathbf{E} на электрический заряд Q , была выражена нами (§ 2, 1) формулой

$$\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E},$$

а напряженность электрического поля \mathbf{E} была определена как отношение действующей на заряд силы к величине заряда. Если теперь рассмотреть движение заряда в пространстве, в котором имеет место не только электрическое, но и магнитное поле, и принять во внимание, что магнитное поле действует на движущийся заряд с силой, определяемой по формуле (3,2)

$$\mathbf{F}_m = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

то следует прийти к выводу, что результирующая сила, действующая на заряд, выразится уравнением

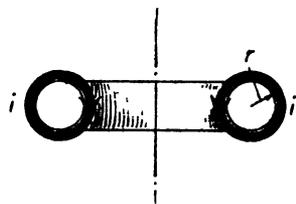
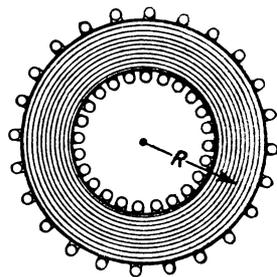
$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]), \quad (3, 52)$$

которое было впервые получено Лорентцем, благодаря чему выражаемая им сила получила название „лорентцовой силы“. Соответственно сила, действующая в этом случае на единичный заряд (или отношение силы к величине заряда), будет равна

$$\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (3, 53)$$

Эту величину можно рассматривать как напряженность некоторого эквивалентного или результирующего электрического поля, действующего на движущийся заряд.

Рассматривая действие магнитного и электрического полей на движущийся заряд, мы выбрали систему координат (систему отсчета) таким образом, чтобы по отношению к ней поле было неподвижно, а заряд имел скорость \mathbf{v} . Однако направление и величина действующей на заряд силы не изменятся, если пользоваться такой системой отсчета, относительно которой заряд неподвижен, а поле движется со скоростью $-\mathbf{v}$ (т. е. в обратную сторону).



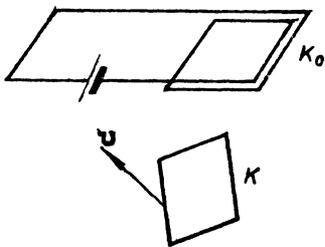
Фиг. 3, 29.

¹ Выражение $\oint \mathbf{H} ds$ называется также циркуляцией вектора напряженности поля или магнитным напряжением обхода.

Представим себе теперь, что в постоянном магнитном поле, созданном, например, неподвижным контуром K_0 постоянного тока, движется с некоторой скоростью \mathbf{v} замкнутый на себя проволочный контур K (фиг. 3, 30). Вместе с ним перемещаются в магнитном поле положительные ионы, составляющие его кристаллический скелет, и блуждающие между ними свободные электроны, их средняя скорость равна при этом скорости движения контура \mathbf{v} . Как те, так и другие оказываются поэтому под воздействием лорентцовой силы

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

перпендикулярной как к \mathbf{v} , так и к \mathbf{B} (слагающая силы $E\mathbf{Q}$ в этом случае отсутствует). При определении направления силы должен быть, конечно,



Фиг. 3, 30.

принят во внимание знак заряда Q , положительный — для ионов и отрицательный — для электронов. Под действием лорентцовой силы заключенные в проводнике свободные электроны придут в движение, образуя электрический ток. Сила же, приложенная к положительным ионам, имеющая противоположное направление, проявится в виде механической силы, действующей на весь контур.

Плотность возникшего в контуре тока может быть определена с помощью дифференциального закона Ома:

$$\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}, \text{ или } \rho\mathbf{j} = \mathbf{E},$$

где $\rho = \frac{1}{\gamma}$ — удельное сопротивление проводника, а \mathbf{E} — действующая на электроны напряженность электрического поля, которая в данном случае должна быть заменена результирующей напряженностью поля $\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]$. При появлении тока распределение свободных электронов в контуре, вообще говоря, изменится, и это может стать причиной возникновения в проводе электрического поля \mathbf{E} , которое и войдет в состав результирующего поля. Таким образом

$$\rho\mathbf{j} = \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Взяв от обеих частей этого равенства линейный интеграл по замкнутому контуру проводника, получим

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} + \oint [\mathbf{v}\mathbf{B}]d\mathbf{l} = \oint \rho\mathbf{j}d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{l}$ — элемент длины контура. Первый интеграл в левой части этого равенства равен нулю как линейный интеграл напряженности электростатического поля по замкнутому контуру. Интеграл в правой части равенства для линейного проводника, в котором плотность тока в любой точке совпадает по направлению с элементом контура, может быть преобразован следующим образом:

$$\oint \rho\mathbf{j}d\mathbf{l} = \rho \oint \mathbf{j}d\mathbf{l} = \rho \oint \frac{I}{S}d\mathbf{l} = I \frac{\rho}{S} \oint d\mathbf{l} = I \frac{\rho l}{S} = IR,$$

где I — ток в контуре, а R — его сопротивление.

Таким образом мы приходим к равенству

$$\oint [\mathbf{v}\mathbf{B}]d\mathbf{l} = IR, \tag{3, 54}$$

правая часть которого по закону Ома для замкнутой цепи равна действующей в ней э. д. с. Следовательно, при перемещении замкнутого контура в магнитном поле в нем возникает индуктированная э. д. с.

$$e = \oint [\mathbf{v}\mathbf{B}] dl. \quad (3, 55)$$

Этому уравнению может быть придана еще и другая форма, приводящая к найденной Максвеллом наиболее общей формулировке закона электромагнитной индукции. Выразим с этой целью скорость \mathbf{v} как производную по времени от перемещения на ds данного элемента контура

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}.$$

Тогда уравнение (3, 55) примет вид

$$e = \oint \left[\frac{d\mathbf{s}}{dt} \mathbf{B} \right] dl = - \oint \mathbf{B} \left[\frac{d\mathbf{s}}{dt} \cdot d\mathbf{l} \right].$$

Подинтегральное выражение

$$\mathbf{B} \left[\frac{d\mathbf{s}}{dt} \cdot d\mathbf{l} \right]$$

представляет собой не что иное, как отнесенный к единице времени магнитный поток, пересеченный элементом контура $d\mathbf{l}$ при его перемещении на $d\mathbf{s}$, а самый интеграл — отнесенный к единице времени магнитный поток, пересеченный всем контуром при его перемещении, т. е. производную по времени от магнитного потока, охватываемого данным замкнутым контуром:

$$\oint \mathbf{B} \left[\frac{d\mathbf{s}}{dt} \cdot d\mathbf{l} \right] = \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3, 56)$$

т. е. индуктированная в контуре э. д. с. равна скорости убывания магнитного потока, связанного с контуром. В этом и состоит закон электромагнитной индукции.

Необходимо обратить внимание на то, что следует понимать под убыванием магнитного потока и как определить направление индуктированной э. д. с. Как уже говорилось (3, 4), знак магнитного потока зависит от выбранного направления обхода контура. В выражении (3, 56) направление обхода контура определяется тем, какое из двух возможных направлений э. д. с. принято в качестве положительного.

Если происходит убывание магнитного потока, т. е. уменьшение потока по абсолютной величине при его положительном значении (или увеличение потока по абсолютной величине при его отрицательном значении), то направление э. д. с. будет совпадать с выбранным направлением положительного обхода по контуру, относительно которого был определен знак потока. Нетрудно формулировать такое же правило и для случая возрастания магнитного потока.

В конечной формулировке закона электромагнитной индукции [уравнение (3, 56)] отсутствует указание на то, в результате чего происходит убывание пронизывающего контур магнитного потока. Это дает основание считать, что если изменение магнитного потока будет происходить не вследствие движения контура, а например, вследствие изменения индукции магнитного поля при неподвижном контуре, то в контуре также

будет возникать э. д. с. Опыт полностью подтверждает такое предположение.

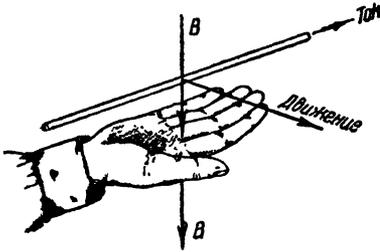
Напротив, если при наличии движения контура пронизывающий его магнитный поток остается без изменения, индуцируемая в нем э. д. с. будет равна нулю.

При расчетах э. д. с., индуцируемых в прямолинейных проводниках (составляющих часть какого-то контура), движущихся в однородном магнитном поле, удобно пользоваться следующей формулой, вытекающей из уравнения (3,55):

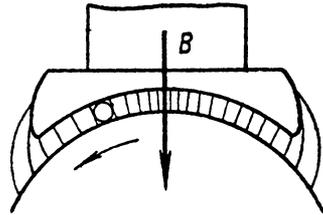
$$e = \int Bv \sin(\mathbf{B}, \mathbf{v}) dl = Bvl \sin(\mathbf{B}, \mathbf{v}), \quad (3,57)$$

или, если движение происходит в направлении, перпендикулярном к вектору индукции, т. е. $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$ и, следовательно, $\sin(\mathbf{B}, \mathbf{v}) = 1$,

$$e = Bvl. \quad (3,58)$$



Фиг. 3, 31.



Фиг. 3, 32.

Когда э. д. с. индуцируется в прямолинейном отрезке проводника, движущегося в магнитном поле, направление э. д. с. удобно определять, пользуясь следующим мнемоническим правилом, носящим название правила правой руки (фиг. 3,31): если расположить правую руку так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, а отогнутый большой палец совпадал с направлением движения проводника, то направление остальных четырех пальцев будет указывать направление индуцированной э. д. с.¹

Пример 3,10. Под полюсом динамомшины (фиг. 3, 32) индукция магнитного поля направлена по радиусам, проведенным из центра вращающегося якоря. Величина индукции $B = 10\,000$ Gs. На якоре лежит проводник длиной $l = 1,5$ m (аксиальная длина якоря и полюса), вращающийся вместе с якорем с окружной скоростью $v = 3$ m/sec. Требуется найти э. д. с., индуцируемую в этом проводе.

Так как и в данном случае движение происходит в направлении, перпендикулярном к направлению индукции, находим непосредственно по формуле (3, 58)

$$e = Bvl = 10^{-4} (\text{V} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2) 300 (\text{cm}/\text{sec}) 150 (\text{cm}) = 4,5 \text{ V}.$$

В данном случае, как и при других вычислениях, все величины приведены нами к системе вольт-ампер-сантиметр-секунда. На практике часто вместо пере-

¹ Это правило может быть распространено и на случай неподвижного контура, э. д. с. в котором наводится вследствие изменения магнитной индукции. Для этого нужно только представлять себе исчезновение и возникновение магнитного потока, происходящим в результате стягивания в точку (и исчезновения) магнитных линий или, наоборот, в результате их развертывания. Если при этом представлять себе магнитные линии все время остающимися неразрывными и замкнутыми, легко определить направление индуцируемой э. д. с. При этом отогнутый большой палец должен быть направлен навстречу набегающим линиям.

счета индукции из Gs в $V \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$ в формулу (3, 58) вводят множитель 10^{-8} , что приводит к тому же результату:

$$e = 10^{-8} B v l = 10^{-8} 10\,000 (\text{Gs}) \cdot 300 (\text{cm}/\text{sec}) 150 (\text{cm}) = 4,5 \text{ V.}$$

Что касается направления индуктированной э. д. с., оно легко находится по правилу правой руки.

Пример 3.11. В равномерном магнитном поле $B = \text{const}$ вращается плоская проволочная рамка, замкнутая через контактные кольца (фиг. 3, 33) на прибор O , регистрирующий величину приложенного к нему напряжения в функции времени (осциллограф). Определить показания прибора, если площадь рамки $S = 800 \text{ cm}^2$, скорость вращения $n = 50$ об/сек., а величина индукции $B = 1\,000 \text{ Gs}$.

Здесь удобнее пользоваться уравнением (3, 56)

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитный поток в данном случае может быть вычислен по формуле

$$\Phi = B_n S' = BS \cos(\mathbf{B}, \mathbf{S}),$$

где B и S — постоянные величины, а $\cos(\mathbf{B}, \mathbf{S})$ является функцией времени, так как угол между векторами \mathbf{B} и \mathbf{S} все время изменяется вследствие вращения рамки. В произвольный момент t

$$\angle \mathbf{B}, \mathbf{S} = 2\pi n t = \omega t,$$

где ω — угловая скорость рамки, если мы примем за начало счета времени ($t = 0$) тот момент, когда угол \mathbf{B}, \mathbf{S} равен нулю.

Подставляя найденное выражение угла в выражение потока, получаем, что

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(BS \cdot \cos \omega t)}{dt} = BS \omega \sin \omega t.$$

Электродвижущая сила, индуктируемая в контуре, изменяется во времени по закону синуса, и следовательно, записываемая осциллографом кривая будет синусоидой. Максимальное значение э. д. с.

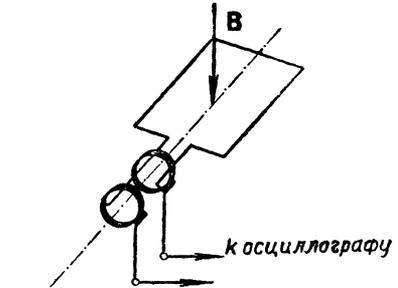
$$e_{\text{max}} = BS \omega = BS 2\pi n = 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2 800 \text{ cm}^2 2\pi 50 \frac{1}{\text{sec}} = 2,51 \text{ V.}$$

Для определения направления э. д. с., индуктированной изменяющимся магнитным потоком, очень удобно пользоваться правилом Ленца, согласно которому индуктированная э. д. с. всегда имеет такое направление, что создаваемый ею (в замкнутом контуре) ток противодействует изменению магнитного потока.

Рассмотрим применение этого правила для двух случаев, изображенных на фиг. 3, 34 и 3, 35.

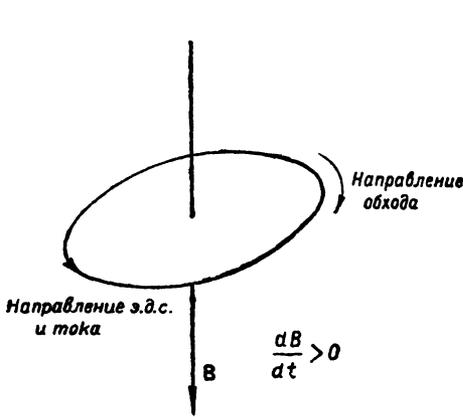
В первом случае (фиг. 3, 34) магнитная индукция возрастает, следовательно, ток, вызываемый индуктированной э. д. с., должен иметь такое направление, чтобы создаваемая им магнитная индукция была направлена навстречу возрастающей индукции \mathbf{B} .

Пользуясь правилом штопора, находим, что ток в контуре должен быть направлен именно в том направлении, в каком на фиг. 3, 35 стрелкой показано направление э. д. с.

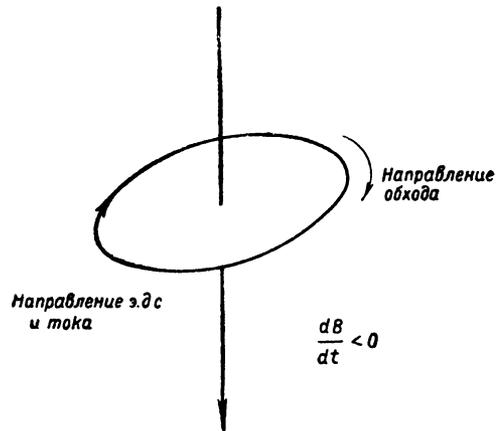


Фиг. 3, 33.

Напротив, во втором случае (фиг. 3,35) магнитная индукция \mathbf{B} убывает, следовательно, индукция магнитного поля тока, вызываемого индук-



Фиг. 3,34.



Фиг. 3,35.

тированной э. д. с., должна быть направлена в ту же сторону, что и индукция основного поля.

Применяя опять правило штопора, найдем, что направление возникающего в контуре тока должно быть по правилу Ленца именно таким, как указано стрелкой на фиг. 3,35.

3,15. Потокосцепление

Рассмотрим явление электромагнитной индукции в замкнутом контуре, образованном свернутым в катушку проводом.

На фиг. 3,36 дано схематическое изображение такой катушки в виде трех сильно отодвинутых друг от друга витков, что сделано для наглядности рисунка.

Предположим, что наша трехвитковая катушка внесена в однородное магнитное поле с индукцией B , равномерно увеличивающейся во времени со скоростью $\frac{dB}{dt} = \text{const}$. Пусть, кроме того, катушки расположены так, что вектор B перпендикулярен к плоскости каждого из витков катушки и параллелен плоскости S_0 , в которой лежат провода, последовательно соединяющие между собой все витки. Наконец, пусть размеры всех витков одинаковы, т. е. площади

$$S_1 = S_2 = S_3 = S.$$

Величину э. д. с., индуцируемой во всем замкнутом контуре, мы можем определить по формуле

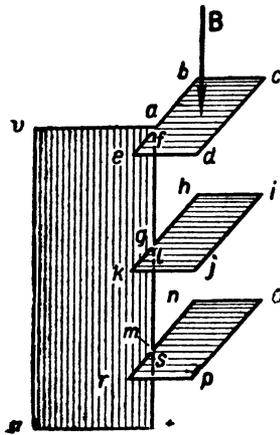
$$e = - \frac{d\Phi}{dS},$$

где

$$\Phi = \int \mathbf{B} dS$$

есть магнитный поток, пронизывающий всю поверхность, ограниченную проводниковым контуром, т. е. поверхность

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_0.$$



Фиг. 3,36.

Но поток $\Phi_1 = BS_1$ через часть S_1 всей поверхности равен потоку $\Phi_2 = BS_2$ через поверхность S_2 , представляющую собой также часть общей поверхности. Точно так же

$$\Phi_2 = \Phi_3 = BS_3.$$

Что касается потока через поверхность S_0 , то он равен нулю, так как эта поверхность нами принята параллельной направлению \mathbf{B} .

Таким образом весь поток

$$\Phi = \int \mathbf{B}d\mathbf{S} = BS_1 + BS_2 + BS_3 + 0 = 3BS = 3\Phi_0.$$

Здесь через $\Phi_0 = BS$ мы обозначили поток, пронизывающий в отдельности каждый из витков.

Если бы наша катушка состояла не из трех, а из w витков, охватывающих одинаковый поток, то полный поток, пронизывающий контур, был бы равен

$$\Phi = w\Phi_0. \quad (3, 59)$$

Удобство выражения потока в форме произведения числа витков на поток, пронизывающий каждый из витков в отдельности, становится особенно ясным, когда индукционные трубки, пронизывающие один из витков, являются продолжением индукционных трубок, пронизывающих другие витки.

Магнитный поток, сцепленный со всем многовитковым контуром, часто называется потокосцеплением в отличие от потока Φ_0 , пронизывающего каждый из витков в отдельности.

Когда нужно подчеркнуть различие между потоком и потокосцеплением, последнее обозначают буквой Ψ . Вводя это обозначение в формулу (3,59), мы должны переписать ее так:

$$\Psi = w\Phi. \quad (3, 60)$$

В том случае, когда поток через различные витки различен, вместо (3,60), следует писать

$$\Psi = \sum \Phi, \quad (3, 61)$$

где суммирование производится по всем w виткам.

Важно отметить, что $\int \mathbf{B}d\mathbf{S}$, распространенный на всю поверхность, ограниченную многовитковым контуром, дает непосредственно потокосцепление, поэтому в формулу индуктированной э. д. с. в случае многовиткового контура нужно вводить не поток, а потокосцепление:

$$e = - \frac{d\Psi}{dt} = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3, 62)$$

Последнее выражение

$$e = - w \frac{d\Phi}{dt}$$

верно, разумеется, только в случае равенства потоков, проходящих через каждый из витков в отдельности.

Формулу (3,62) можно получить также путем следующего рассуждения: в отдельном витке, рассматриваемом как независимый контур, индуктируется э. д. с. $e_1 = - \frac{d\Phi}{dt}$, но в катушке мы имеем w последовательно включенных витков, следовательно, общая величина индуктиро-

ванной э. д. с. будет равна сумме э. д. с., индуцированных в отдельных витках, $e = - \sum \frac{d\Phi}{dt}$, что, в случае w витков, пронизываемых одинаковым потоком Φ , приводит к формуле

$$e = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Пример 3, 12. Пусть дана катушка, сечение которой $S = 600 \text{ см}^2$, а число витков $w = 1\,000$. Индукция внутри катушки изменяется со скоростью $\frac{dB}{dt} = 50\,000 \text{ Gs/sec}$ ¹.

Направление вектора индукции параллельно оси катушки.

Найти величину э. д. с., индуцируемой во всей катушке и в каждом из ее витков в отдельности.

Зная S и $\frac{dB}{dt}$, легко находим

$$e_1 = - \frac{d\Phi}{dt} = - S \frac{dB}{dt} = - 600 \text{ см}^2 \cdot 50\,000 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vsec}}{\text{cm}^2\text{sec}} = - 0,3 \text{ V}.$$

Это и есть э. д. с., индуцируемая в одном витке; э. д. с., индуцируемая во всей катушке,

$$e = - \frac{d\Psi}{dt} = - w \frac{d\Phi}{dt} = - 1\,000 \cdot 0,3 = - 300 \text{ V}.$$

Знак минус указывает, что направление э. д. с. в каждом из витков противоположно тому направлению обхода, относительно которого возрастающий магнитный поток положителен (фиг. 3, 34).

Если бы индукция не возрасла, а убывала с той же скоростью, т. е. если бы $\frac{dB}{dt} = - 50\,000 \text{ Gs/sec}$, индуцированная э. д. с. была бы равна

$$e = - w \frac{d\Phi}{dt} = - w S \frac{dB}{dt} = - 1\,000 \cdot 600 \text{ см}^2 (- 50\,000 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vsec}}{\text{cm}^2\text{sec}}) = + 300 \text{ V}.$$

Знак плюс указывает, что направление э. д. с. в каждом из витков совпадало бы с направлением обхода, относительно которого убывающий магнитный поток положителен (фиг. 3, 36).

3, 16. Самоиндукция

Электрический ток, проходя по контуру, всегда создает больший или меньший магнитный поток, пронизывающий этот контур. Изменение тока в контуре вызывает изменение связанного с ним магнитного потока, а следовательно, индуцирует в контуре э. д. с. Наведение (индукция) э. д. с. в контуре вследствие изменения тока в этом же самом контуре носит название явления самоиндукции.

Магнитная индукция B в любой точке поля пропорциональна силе тока i^2 , создающего это поле (если только $\mu = \text{const}$). Поэтому и магнит-

¹ Отметим во избежание недоразумения, что скорость изменения магнитной индукции $\frac{dB}{dt} = 50\,000 \text{ Gs/sec}$ отнюдь не указывает на то, что в данном случае магнитная индукция достигает столь больших значений как $50\,000 \text{ Gs}$. Если, например, индукция меняется равномерно с $+ 1\,000 \text{ Gs}$ на $- 1\,000 \text{ Gs}$ за интервал времени $0,04 \text{ сек.}$, мы как раз будем иметь указанную скорость изменения $50\,000 \text{ Gs/sec}$.

² Изменяющиеся токи и напряжения принято обозначать малыми буквами i и U .

ный поток $\Phi = \int_s \mathbf{B} d\mathbf{S}$, пронизывающий контур, прямо пропорционален току, т. е.

$$\Phi = Li, \quad (3, 63)$$

здесь L — коэффициент пропорциональности.

Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

и следовательно, э. д. с. самоиндукции

$$e_L = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (3, 64)$$

прямо пропорциональна скорости изменения тока.

В том случае, когда мы имеем дело с многовитковым контуром, для определения э. д. с. нужно пользоваться не потоком Φ , а потокосцеплением Ψ . Но так как потокосцепление $\Psi = \sum \Phi$ также пропорционально току, т. е.

$$\Psi = Li, \quad (3, 65)$$

то

$$e_L = - \frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (3, 66)$$

Коэффициент пропорциональности L между потокосцеплением и током

$$L = \frac{\Psi}{i}, \quad (3, 67)$$

равный для однозвиткового контура отношению магнитного потока к току, носит название индуктивности, собственной индуктивности или коэффициента самоиндукции контура.

В целом ряде случаев индуктивность контура может быть вычислена по его геометрическим размерам и по магнитной проницаемости среды.

Примеры подобных вычислений будут приведены в § 3, 21. Кроме того, индуктивность может быть определена и экспериментально.

Размерность индуктивности может быть определена по выражению (3, 67):

$$[L] = \frac{[\Psi]}{[i]} = \text{V} \cdot \text{sec}/\text{A} = \Omega \cdot \text{sec}. \quad (3, 68)$$

Единица индуктивности $\Omega \cdot \text{sec}$ носит название г е н р и (сокращенное обозначение *гн* или *Н*).

Благодаря явлению самоиндукции к контуру, в котором величина тока изменяется, нельзя применять простой закон Ома $i = \frac{e}{R}$, так как кроме э. д. с. генератора e в контуре действует э. д. с. самоиндукции $e_L = - \frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$, следовательно, связь между током, сопротивлением и э. д. с. в этом случае должна выражаться равенством

$$i = \frac{e + e_L}{R} = \frac{e - \frac{d\Psi}{dt}}{R} = \frac{e - L \frac{di}{dt}}{R}, \quad (3, 69)$$

или

$$e = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (3, 70)$$

Как видно из уравнений (3, 69) и (3, 70) при нарастании тока ($\frac{di}{dt} > 0$) ток в контуре будет меньше, а при убывании тока ($\frac{di}{dt} < 0$) больше, чем следовало бы из закона Ома для неизменяющегося (постоянного) тока.

Сказанное хорошо согласуется с приведенным выше правилом Ленца: э. д. с. самоиндукции противодействует изменению магнитного потока. Действительно, индуктированная э. д. с. противодействует как увеличению тока (а следовательно, и возрастанию магнитного потока), так и уменьшению тока (а следовательно, и уменьшению потока). Это противодействие тем сильнее, чем больше индуктивность L .

При изучении явлений, происходящих в электрической цепи, приходится иногда рассматривать не целый замкнутый контур, а отдельный участок и вводить в расчет сопротивление и индуктивность этого участка.

Понятие—индуктивность участка цепи—становится вполне определенным, когда известна часть магнитного потока, связанная именно с этим участком.

В подобных случаях приходится говорить не об э. д. с., действующей во всем контуре, а о напряжении между концами данного участка:

$$u = iR + L \frac{di}{dt}, \quad (3, 71)$$

где R и L —индуктивность и сопротивление участка цепи, заключенного между двумя данными точками.

Пример 3,13. Катушка обладает сопротивлением $R = 5 \text{ } \Omega$ и индуктивностью $L = 0,5 \text{ Н}$, через нее проходит ток, возрастающий со скоростью $\frac{di}{dt} = 50 \text{ А/сек}$. Найти мгновенное значение напряжения (u) на зажимах катушки в тот момент, когда абсолютная величина тока $i = 10 \text{ А}$.

По формуле (3, 71) находим

$$u = iR + L \frac{di}{dt} = 10 \cdot 5 + 0,5 \cdot 50 = 50 + 25 = 75 \text{ В}.$$

Пример 3,14. Если в предыдущем примере предположить, что ток не возрастает, а убывает со скоростью

$$\left| \frac{di}{dt} \right| = 50 \text{ А/сек}, \text{ т. е. } \frac{di}{dt} = -50 \text{ А/сек},$$

то искомое напряжение, определяемое по той же формуле,

$$u = iR + L \frac{di}{dt} = 10 \cdot 5 + 0,5(-50) = 50 - 25 = 25 \text{ В}.$$

Пример 3,15. Ток в контуре равномерно изменяется с $+100 \text{ А}$ на -100 А в течение $0,5 \text{ сек}$. Определить, чему равна индуктивность контура, если в тот момент, когда ток проходит как раз через нулевое значение ($i = 0$), напряжение, приложенное к контуру, равно 4 В .

По той же формуле (3, 71) находим

$$4 = 0 + L \frac{100 - (-100)}{0,5} = L \cdot 400,$$

откуда

$$L = \frac{4}{400} = 0,01 \text{ Н}.$$

Пример 3,16. В катушке с числом витков $\varpi = 1000$ при токе $I = 10 \text{ А}$ устанавливается поле с индукцией, среднее значение которой $B_{cp} = 5000 \text{ Гс}$.

Поперечное сечение катушки $S = 30 \text{ см}^2$.

Найти индуктивность L этой катушки.

Определяем потокосцепление:

$$\Psi = \omega\Phi = \omega B_{cp} S = 1000 \cdot 5000 \cdot 10^{-8} \cdot 30 = 1,5 \text{ В} \cdot \text{сек.}$$

Зная ток, находим L :

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{1,5}{10} = 0,15 \text{ Н.}$$

3,17. Энергия магнитного поля

Магнитное поле, создаваемое проходящим по цепи током, обладает определенным запасом энергии, зависящим от силы тока и индуктивности цепи. Для выяснения этого составим цепь из аккумуляторной батареи $A. B.$ (фиг. 3,37) и катушки с индуктивностью L и сопротивлением R . В катушке установится ток i , величина которого может быть найдена по закону Ома

$$i = \frac{e}{R},$$

где e — э. д. с. батареи (сопротивлением соединительных проводов и самой батареи пренебрегаем).

Посмотрим, что произойдет, если отключить катушку от батареи, одновременно замкнув ее накоротко (что может быть осуществлено по схеме, изображенной на фиг. 3,37, переводом переключателя Π из положения 1 в положение 2).

Ток в катушке после ее отключения от батареи должен исчезнуть, т. е. измениться от i до 0. Изменение тока связано с появлением индуктированной э. д. с. $-L \frac{di}{dt}$.

Применяя к данному случаю уравнение (3,69) и приравнявая в нем e нулю (так как источник тока отключен), получаем для тока в катушке выражение

$$i = \frac{e - L \frac{di}{dt}}{R} = - \frac{L}{R} \frac{di}{dt}. \quad (3,72)$$

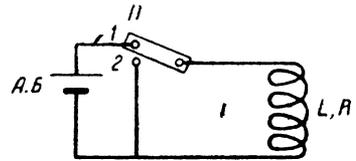
Это уравнение показывает, что после произведенного переключения ток не сразу спадет до нуля, но продолжает поддерживаться в прежнем направлении э. д. с. самоиндукции (подобно движению по инерции после исчезновения движущей силы). Убывающий ток сохраняет при этом прежнее направление. Это ясно из того, что по уравнению (3,72) ток оказывается положительным, так как $\frac{di}{dt} < 0$.

Но наличие тока i в цепи, обладающей сопротивлением R , сопряжено с выделением энергии (джоулево тепло) в этом сопротивлении.

Возникает вопрос, откуда берется эта энергия, превращающаяся в тепло уже после отключения батареи, и чему равняется общее количество энергии, которое выделится за все время после отключения источника до полного исчезновения тока.

Ответим сначала на второй вопрос. Количество энергии, выделяемое за элемент времени dt ,

$$dW = i^2 R dt,$$



Фиг. 3,37.

или, подставляя сюда из уравнения (3,72) значение $dt = -\frac{L}{R} \frac{di}{i}$,

$$dW = i^2 R \left(-\frac{L}{R} \frac{di}{i} \right) = -Li di.$$

Интегрируя последнее выражение элементарной энергии в пределах от i до 0, получаем

$$W = \int_i^0 -Li di = \frac{Li^2}{2}, \quad (3,73)$$

или, имея в виду, что $Li = \Psi$,

$$W = \frac{i\Psi}{2}. \quad (3,74)$$

Таким образом количество выделенного тепла, а следовательно, и равный ему запас энергии в цепи оказывается зависящим от потокосцепления, т. е. от магнитного поля, создаваемого проходящим по цепи током. Если эта цепь такова, что проходящий по ней ток не создает сколько-нибудь значительного магнитного поля ($\Psi \approx 0$), то и запас энергии в цепи будет практически равен нулю. Это приводит нас к выводу, что выражаемый формулами (3,73) и (3,74) запас энергии сосредоточен в магнитном поле нашей цепи и должен рассматриваться как энергия магнитного поля.

Эта энергия была получена от аккумуляторной батареи при включении катушки. В этом нетрудно убедиться, если проанализировать выражение тока

$$i = \frac{e - L \frac{di}{dt}}{R}$$

при нарастании его от 0 до i . Действительно, источник тока за промежуток времени dt отдает энергию

$$dW_1 = ei dt,$$

где согласно уравнению (3,70)

$$e = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Следовательно,

$$dW_1 = i^2 R dt + Li di.$$

Часть этой энергии

$$dW_2 = i^2 R dt$$

превращается в тепло, другая же часть

$$dW = Li di = d\left(\frac{Li^2}{2}\right)$$

представляет собой увеличение энергии магнитного поля.

Энергия магнитного поля может быть выражена также и через основные величины, характеризующие магнитное поле в каждой его точке, т. е. через \mathbf{B} и \mathbf{H} .

Сделаем это сначала для частного случая энергии магнитного поля тороида.

Радиус средней линии тороида R предполагаем большим по сравнению с радиусом его сечения r (фиг. 3,38). Объем пространства, заключенного внутри тороида, можно принять при этом равным произведению из длины его средней линии $l = 2\pi R$ на площадь поперечного сечения $S = \pi r^2$. Имея в виду, что r мало по сравнению с R , мы можем считать,

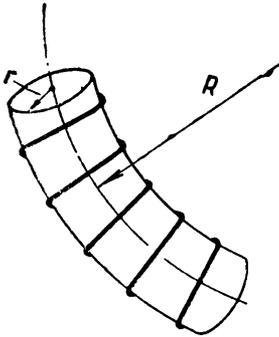
что как напряженность поля H , так и индукция $B = \mu H$ внутри тороида одинаковы во всех его точках, причем напряженность поля H по закону полного тока равна $\frac{i\omega}{l}$.

Выражая потокосцепление Ψ через произведение потока Φ на число витков тороида ω , мы можем записать, что

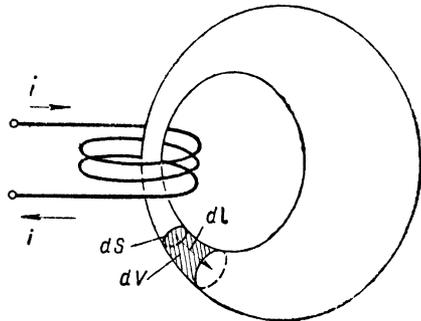
$$\Psi = \Phi\omega = BS\omega.$$

Таким образом энергия магнитного поля тороида может быть выражена уравнением

$$W = \frac{\Psi i}{2} = \frac{BS\omega i}{2}.$$



Фиг. 3, 38.



Фиг. 3, 39.

Заменим теперь (по закону полного тока) произведение $i\omega$ через Hl . Имея в виду, что Sl равно объему V тороида, получаем окончательно такое выражение энергии

$$W = \frac{BSHl}{2} = \frac{BH}{2} V, \tag{3, 75}$$

т. е. энергия магнитного поля тороида прямо пропорциональна произведению магнитной индукции на напряженность поля и на объем пространства, занятого полем (вне тороида поля нет).

При этом выражение $\frac{BH}{2}$ представляет собой количество энергии, приходящееся на 1 см³ объема поля, т. е. плотность энергии магнитного поля

$$W_0 = \frac{BH}{2} \equiv \frac{\mathbf{BH}}{2}. \tag{3, 76}$$

Нетрудно видеть, что это выражение имеет как раз требуемую размерность

$$[W_0] = \frac{V \cdot \text{sec}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{A}{\text{cm}} = \frac{VA \cdot \text{sec}}{\text{cm}^3} \text{ или } \frac{J}{\text{cm}^3}.$$

Докажем теперь применимость найденного выражения плотности энергии для самого общего случая магнитного поля, созданного каким-либо контуром тока. С этой целью найдем $\int \frac{BH}{2} dV$ по всему объему поля и убедимся в том, что он выражает общий запас энергии поля $\frac{i\Psi}{2}$. Разобьем все поле на ряд элементарных индукционных трубок. Поток внутри какой-либо трубки (фиг. 3, 39)

$$d\Phi = B dS,$$

где dS — поперечное сечение трубки. Очевидно, что для каждой индукционной трубки $d\Phi = \text{const}$. Кроме того, заметим, что линейный интеграл напряженности поля, взятый вдоль всей замкнутой индукционной трубки,

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i\omega,$$

где $i\omega$ — полный ток, проходящий через поверхность, ограниченную средней линией индукционной трубки.

В пределах одной элементарной трубки

$$\frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dSd\mathbf{l} = \frac{\mathbf{B}dS\mathbf{H}d\mathbf{l}}{2} = \frac{d\Phi}{2} \mathbf{H}d\mathbf{l},$$

где $dV = dSd\mathbf{l}$ — объем элементарного отрезка трубки длиной $d\mathbf{l}$.

Имея в виду то, что при интегрировании вдоль замкнутой трубки (по объему ΔV) постоянная $\frac{d\Phi}{2}$ может быть вынесена за знак интеграла, получаем

$$\int_{\Delta V} \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV = \int_{\Delta V} \frac{d\Phi\mathbf{H}d\mathbf{l}}{2} = \frac{d\Phi}{2} \oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{i\omega d\Phi}{2}.$$

Распространяя теперь интеграцию на все индукционные трубки, найдем

$$\int \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV = \frac{\Phi i\omega}{2} = \frac{i\Psi}{2}, \quad (3,77)$$

так как для всех трубок $i\omega = \text{const}$, а $\int d\Phi$, взятый по всем трубкам (по всему пространству занятому полем), равен потоку Φ .

Таким образом в общем случае

$$\mathcal{W} = \int \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV, \quad (3,78)$$

чем и подтверждается применимость в этом общем случае найденного выше выражения плотности энергии магнитного поля.

3,18. Взаимоиндукция

В том случае, когда два проводниковых контура расположены сравнительно близко один от другого, часть магнитного потока, создаваемого током одного из контуров, может проходить через другой контур (фиг. 3,40).

При этом изменение тока в одном контуре (k_1) будет вызывать изменение магнитного потока, пронизывающего второй контур (k_2), вследствие чего во втором контуре будет индуцироваться э. д. с. Это явление носит название взаимной индукции.

Как и в случае самоиндукции, скорость изменения магнитного потока пропорциональна скорости изменения тока, создающего этот магнитный поток (если $\mu = \text{const}$). Следовательно, скорость изменения той части магнитного потока, которая сцеплена со вторым контуром, а создается током первого контура, также пропорциональна скорости изменения первого тока, а это позволяет выразить э. д. с. e_2 , наводимую вследствие взаимной индукции, уравнением

$$e_2 = -M_{12} \frac{di}{dt}. \quad (3,79)$$

Коэффициент пропорциональности M_{12} , входящий в это уравнение, носит название взаимной индуктивности или коэффициента взаимоиנדукции двух контуров.

Как видно из аналогии между уравнениями (3,79) и (3,64), взаимная индуктивность M имеет ту же размерность, что и собственная индуктивность L . Единицей взаимоиנדуктивности служит, следовательно, генри.

Если в контуре k_2 также протекает изменяющийся ток i_2 , в этом контуре будет наводиться как э. д. с. взаимоиנדукции, так и э. д. с. самоиндукции

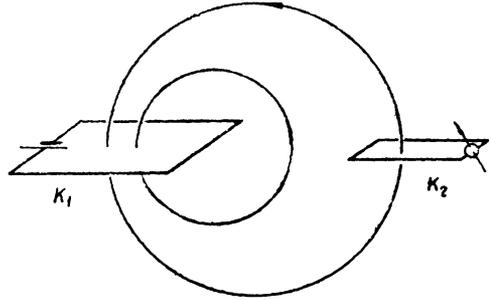
$$e_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (3,80)$$

Для того чтобы отчетливо разобраться в явлениях взаимоиנדукции и самоиндукции двух магнитно связанных между собой контуров, рассмотрим случай, схематически представленный на фиг. 3,41, *a, b, c*. На этих фигурах изображены две катушки, первая из которых состоит из w_1 витков и обладает сопротивлением R_1 , а вторая — из w_2 витков и обладает сопротивлением R_2 . Для наглядности сопротивления катушек представлены в виде сосредоточенных сопротивлений R_1 и R_2 , включенных последовательно с катушками.

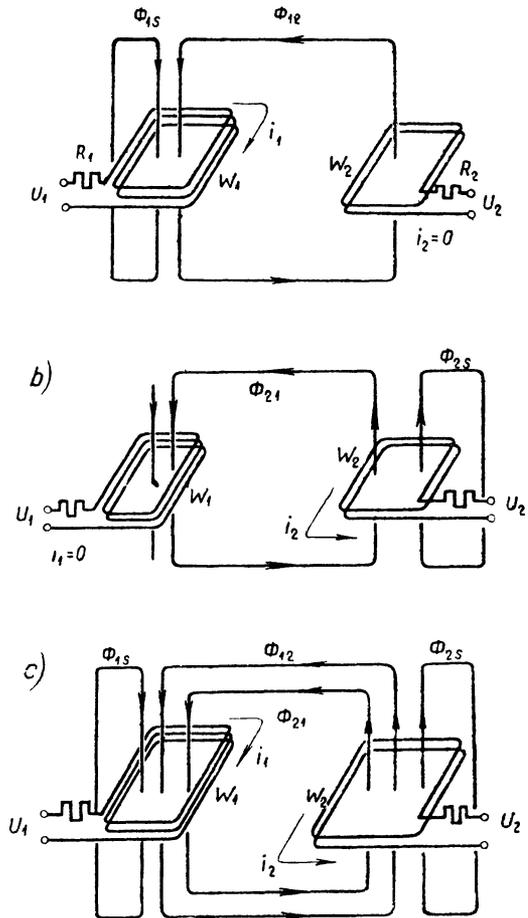
Будем предполагать, что отдельные витки каждой из катушек одинаковы и расположены настолько близко один к другому, что магнитный поток, проходящий внутри одного из витков, охватывает и все остальные витки данной катушки.

Каждая из рассматриваемых катушек представляет собой только часть замкнутой цепи, которая может содержать еще целый ряд сопротивлений, источников тока и т. п. Поэтому, рассматривая явления в этих двух индуктивно связанных между собой катушках, мы будем говорить о напряжениях u_1 и u_2 на их зажимах, а не об э. д. с. замкнутых контуров.

На фиг. 3,41, *a* представлен случай, когда ток во второй катушке равен нулю (например, цепь второй катушки разомкнута), а по первой проходит ток i_1 .



Фиг. 3.40.



Фиг. 3,41.

Весь магнитный поток создается теперь только током i_1 . Этот магнитный поток схематически разделен на две части:

Φ_{12} — поток, созданный током первой катушки и пронизывающий вторую катушку;

Φ_{1s} — поток, созданный током первой катушки и пронизывающий только первую катушку (этот поток называется потоком рассеяния первой катушки).

Весь поток, пронизывающий первую катушку, когда ток второй катушки равен нулю, мы обозначим через Φ_{11}

$$\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{1s}. \quad (3,81)$$

Для того чтобы определить э. д. с., наводимые в первой и во второй катушках, нужно определить их потокосцепления. Очевидно, что потокосцепление первой катушки (когда ток второй катушки равен нулю)

$$\Psi_{11} = \omega_1 \Phi_{11} = \omega_1 \Phi_{12} + \omega_1 \Phi_{1s}.$$

Потокосцепление второй катушки при том же условии ($i_2 = 0$)

$$\Psi_{12} = \omega_2 \Phi_{12}.$$

Очевидно, что как потоки, так и потокосцепления в этом случае (при $\mu = \text{const}$) будут пропорциональны току i_1 , т. е.

$$\Psi_{11} = \omega_1 \Phi_{12} + \omega_1 \Phi_{1s} = L_1 i_1; \quad (3,82)$$

$$\Psi_{12} = \omega_2 \Phi_{12} = M_{12} i_1.$$

Коэффициенты L_1 и M_{12} носят название собственной индуктивности первой цепи L_1 и взаимной индуктивности второй цепи относительно первой M_{12} .

Теперь мы без труда можем найти связь между напряжениями и током i_1 (для случая $i_2 = 0$):

$$u_1 = i_1 R_1 + \frac{d\Psi_{11}}{dt} = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

и

$$u_2 = e_2 = - \frac{d\Psi_{12}}{dt} = - M_{12} \frac{di_1}{dt}, \quad (3,83)$$

Во второй катушке напряжение равно э. д. с., так как ток в ней $i_2 = 0$.

Перейдем теперь ко второму случаю (фиг. 3,41, б), когда $i_2 \neq 0$, но $i_1 = 0$.

Аналогично обозначаем:

Φ_{21} — поток, созданный током второй катушки и пронизывающий первую катушку (мы изменили порядок индексов $\Phi_{21} \neq \Phi_{12}$);

Φ_{2s} — поток, созданный током второй катушки и пронизывающий только вторую катушку (этот поток называется потоком рассеяния второй катушки).

Весь поток, пронизывающий вторую катушку, когда ток первой катушки равен нулю, мы будем обозначать

$$\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{2s}. \quad (3,84)$$

Переходя к потокосцеплениям, имеем: потокосцепление второй катушки при $i_1 = 0$

$$\Psi_{22} = \omega_2 \Phi_{22} = \omega_2 \Phi_{21} + \omega_2 \Phi_{2s}.$$

Потокоцепление первой катушки при $i_1 = 0$

$$\Psi_{21} = \omega_1 \Phi_{21}.$$

Очевидно, что рассмотренные теперь потокоцепления и потоки пропорциональны току i_2 , т. е. что

$$\Psi_{22} = \omega_2 \Phi_{21} + \omega_2 \Phi_{22} = L_2 i_2; \quad \Psi_{21} = \omega_1 \Phi_{21} = M_{21} i_2. \quad (3,85)$$

Коэффициенты L_2 и M_{21} носят название собственной индуктивности второй цепи L_2 и взаимной индуктивности M_{21} первой цепи относительно второй.

Переходим теперь к самому общему случаю (фиг. 3,41, *c*), когда по обеим катушкам проходят токи i_1 и i_2 .

В этом случае магнитные потоки могут быть представлены как результат наложения потоков, рассмотренных в двух предыдущих случаях.

Теперь общий поток

$$\Phi = \Phi_{12} + \Phi_{21} \quad (3,86)$$

создается как током первой, так и током второй катушки.

Подставляя сюда выражения Φ_{12} и Φ_{21} из уравнений (3,82) и (3,85)

$$\Phi_{12} = \frac{M_{12}}{\omega_2} i_1 \quad \text{и} \quad \Phi_{21} = \frac{M_{21}}{\omega_1} i_2,$$

получим

$$\Phi = \frac{M_{12}}{\omega_2} i_1 + \frac{M_{21}}{\omega_1} i_2 = \frac{M_{12} i_1 \omega_1 + M_{21} i_2 \omega_2}{\omega_1 \omega_2}. \quad (3,87)$$

С другой стороны, поток Φ охватывает полный ток $i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2$ и должен быть пропорционален этому току, т. е.

$$\Phi = K (i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2) = K i_1 \omega_1 + K i_2 \omega_2. \quad (3,88)$$

Сравнивая выражения (3,87) и (3,88), которые должны быть равны между собой при любых значениях $i_1 \omega_1$ и $i_2 \omega_2$, видим, что

$$K = \frac{M_{12}}{\omega_1 \omega_2} = \frac{M_{21}}{\omega_1 \omega_2},$$

откуда

$$M_{12} = M_{21}. \quad (3,89)$$

Это дает возможность обозначать оба коэффициента буквой M без всяких индексов. Таким образом

$$\Phi = \frac{M}{\omega_1 \omega_2} (i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2). \quad (3,90)$$

Полный поток, пронизывающий первую катушку,

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = \Phi_{1s} + \Phi_{12} + \Phi_{21} = \Phi_{1s} + \Phi$$

состоит из общего потока Φ и потока рассеяния первой катушки Φ_{1s} .

Полный поток, пронизывающий вторую катушку,

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} = \Phi_{2s} + \Phi_{21} + \Phi_{12} = \Phi_{2s} + \Phi$$

также состоит из общего потока Φ и потока рассеяния второй катушки Φ_{2s} .

Потокоцепление первой катушки

$$\Psi_1 = \omega_1 \Phi_1 = \omega_1 \Phi_{11} + \omega_1 \Phi_{21} = \Psi_{11} + \Psi_{21} = L_1 i_1 + M i_2. \quad (3,91)$$

Аналогично потокоцепление второй катушки

$$\Psi_2 = \omega_2 \Phi_2 = \omega_2 \Phi_{22} + \omega_2 \Phi_{12} = \Psi_{22} + \Psi_{12} = L_2 i_2 + M i_1. \quad (3,92)$$

Последние два уравнения позволяют установить связи между напряжениями и токами в общем случае двух индуктивно связанных контуров:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= i_1 R_1 + \frac{d\Psi_1}{dt} = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ u_2 &= i_2 R_2 + \frac{d\Psi_2}{dt} = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3,93)$$

Для выявления роли потока рассеяния последним уравнениям нужно придать несколько иной вид.

Из уравнений (3,82) находим, что

$$\omega_1 \Phi_{1s} = \Psi_{11} - \omega_1 \Phi_{12} = L_1 i_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} M i_1 = \left(L_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} M \right) i_1, \quad (3,94)$$

так как по второму из уравнений (3,82)

$$\Phi_{12} = \frac{M}{\omega_2} i_1.$$

Аналогично из уравнений (3,85) находим, что

$$\omega_2 \Phi_{2s} = \Psi_{22} - \omega_2 \Phi_{21} = L_2 i_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} M i_2 = \left(L_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} M \right) i_2, \quad (3,95)$$

так как по второму из уравнений (3,85)

$$\Phi_{21} = \frac{M}{\omega_1} i_2.$$

Как видно из уравнений (3,94) и (3,95), потокосцепления рассеяния первой и второй катушек прямо пропорциональны проходящим по ним токам i_1 и i_2 . Обозначая коэффициенты пропорциональности одной буквой:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} L_{1s} &= L_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} M, \\ L_{2s} &= L_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} M, \end{aligned} \right\} \quad (3,96)$$

мы можем написать, что

$$\omega_1 \Phi_{1s} = L_{1s} i_1 \quad \text{и} \quad \omega_2 \Phi_{2s} = L_{2s} i_2. \quad (3,97)$$

Коэффициенты L_{1s} и L_{2s} носят название индуктивностей рассеяния первой и второй катушек.

Полные потокосцепления первой (Ψ_1) и второй (Ψ_2) катушек с помощью (3,80) можно теперь выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= L_1 i_1 + M i_2 = L_{1s} i_1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} M i_1 + M i_2 = L_{1s} i_1 + \frac{M}{\omega_2} (i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2); \\ \Psi_2 &= L_2 i_2 + M i_1 = L_{2s} i_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1} M i_2 + M i_1 = L_{2s} i_2 + \frac{M}{\omega_1} (i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (3,98)$$

Определяя напряжения u_1 и u_2 так же, как мы это делали раньше, но выражая Ψ_1 и Ψ_2 по (3,98), получаем

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= i_1 R_1 + \frac{d\Psi_1}{dt} = i_1 R_1 + L_{1s} \frac{di_1}{dt} - e_1; \\ u_2 &= i_2 R_2 + \frac{d\Psi_2}{dt} = i_2 R_2 + L_{2s} \frac{di_2}{dt} - e_2, \end{aligned} \right\} \quad (3,99)$$

где в соответствии с уравнением (3,90)

$$e_1 = - \frac{d(\omega_1 \Phi)}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[\frac{M}{\omega_2} (\omega_1 i_1 + \omega_2 i_2) \right] = \frac{M}{\omega_2} \left(\omega_1 \frac{di_1}{dt} + \omega_2 \frac{di_2}{dt} \right) \quad (3,100)$$

обозначает э. д. с., индуцируемую в первой катушке общим потоком Φ , а

$$e_2 = - \frac{d(\omega_2 \Phi)}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[\frac{M}{\omega_1} (\omega_1 i_1 + \omega_2 i_2) \right] = - \frac{M}{\omega_1} \left(\omega_1 \frac{di_1}{dt} + \omega_2 \frac{di_2}{dt} \right) \quad (3,101)$$

— э. д. с., индуцируемую общим потоком Φ во второй катушке.

Из сравнения (3,100) и (3,101) видно, что

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (3,102)$$

Пример 3,17. Дано $M = 0,665$ Н, $\omega_1 = 600$, $\omega_2 = 20$, $L = 0,025$ Н, $L_{2s} = 0,0278$ мН, $R_1 = 10$ Ω , $R_2 = 0,011$ Ω , $i_1 = 10,5$ А, $i_2 = -300$ А, $\frac{di_1}{dt} = -3150$ А/сек, $\frac{di_2}{dt} = 90000$ А/сек. Требуется найти напряжения u_1 и u_2 , а также индуктивности L_1 и L_2 и все частичные потоки: Φ_{12} , Φ_{21} , $\Phi = \Phi_{12} + \Phi_{21}$, Φ_{1s} , Φ_{2s} и потокосцепления Ψ_1 и Ψ_2 .

Прежде всего по уравнению (3,91) находим:

$$u_1 = i_1 R_1 + L_{1s} \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{\omega_2} \left(\omega_1 \frac{di_1}{dt} + \omega_2 \frac{di_2}{dt} \right) = 10,5 \cdot 10 - 0,025 \cdot 3150 + \frac{0,665}{20} (-600 \cdot 3150 + 20 \cdot 90000) = 105 - 79 - 2990 = -2964 \text{ В.}$$

$$u_2 = i_2 R_2 + L_{2s} \frac{di_2}{dt} + \frac{M}{\omega_1} \left(\omega_1 \frac{di_1}{dt} + \omega_2 \frac{di_2}{dt} \right) = -300 \cdot 0,011 + 0,0000278 \cdot 90000 + \frac{0,665}{600} (-600 \cdot 3150 + 20 \cdot 90000) = -3,3 + 2,5 - 99,5 = -100,3 \text{ В.}$$

Подсчитаем теперь индуктивности L_1 и L_2 по уравнениям (3,96):

$$L_1 = L_{1s} + \frac{\omega_1}{\omega_2} M = 0,025 + \frac{600}{20} 0,665 = 20 \text{ Н;}$$

$$L_2 = L_{2s} + \frac{\omega_2}{\omega_1} M = 0,278 \cdot 10^{-4} + \frac{20}{600} 0,665 = 0,0222 \text{ Н.}$$

По данным индуктивностям, числам витков и токам находим частичные потоки.

Из уравнений (3,82) и (3,85) определяем

$$\Phi_{12} = \frac{M}{\omega_2} i_1 = \frac{0,665}{20} 10,5 = 0,349 \text{ В} \cdot \text{сек} = 34910000 \text{ Мх}$$

и

$$\Phi_{21} = \frac{M}{\omega_1} i_2 = \frac{0,665}{600} (-300) = -0,3325 \text{ В} \cdot \text{сек} = -33250000 \text{ Мх.}$$

Общий поток представляет собой алгебраическую сумму потоков Φ_{12} и Φ_{21} .

$$\Phi = \Phi_{12} + \Phi_{21} = 34910000 - 33250000 = 1660000 \text{ Мх.}$$

Потоки рассеяния найдем по уравнениям (3,97)

$$\Phi_{1s} = \frac{L_{1s}}{\omega_1} i_1 = \frac{0,025}{600} \cdot 10,5 = 4,35 \cdot 10^{-4} \text{ В} \cdot \text{сек} = 43500 \text{ Мх;}$$

$$\Phi_{2s} = \frac{L_{2s}}{\omega_2} i_2 = \frac{0,0000278}{20} (-300) = -4,16 \cdot 10^{-4} \text{ В} \cdot \text{сек} = 41700 \text{ Мх.}$$

Полное потокоцепление первой катушки

$$\Psi_1 = \Phi_1 \cdot \omega_1 = (\Phi + \Phi_{1s}) \omega_1 = (0,0166 + 0,000435) 600 = 0,01703 \cdot 500 = 10,2 \text{ V} \cdot \text{sec},$$

$$\text{а второй } \Psi_2 = \Phi_2 \omega_2 = (\Phi + \Phi_{2s}) \omega_2 = (0,0166 - 0,00041) 20 = 0,0162 \cdot 20 = 0,324 \text{ V} \cdot \text{sec}.$$

3,19. Коэффициент связи и коэффициент рассеяния

Магнитная связь двух контуров тока может быть более или менее сильной. Степень этой связи характеризуется двумя отношениями

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{12} + \Phi_{1s}} \quad \text{и} \quad \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{22}} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{21} + \Phi_{2s}}, \quad (3,103)$$

каждое из которых показывает, какая часть магнитного потока, создаваемого одним из контуров при отсутствии тока в другом, проходит через второй контур.

Коэффициентом связи называется среднее геометрическое из этих двух отношений:

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \cdot \Phi_{21}}{(\Phi_{12} + \Phi_{1s})(\Phi_{21} + \Phi_{2s})}}. \quad (3,104)$$

Если два контура имеют сильную магнитную связь, то почти весь поток, создаваемый одним из контуров, проходит через другой контур, потоки рассеяния Φ_{1s} и Φ_{2s} близки к нулю, знаменатель подкоренного выражения почти не превышает числителя, и коэффициент связи равен единице, которая таким образом представляет собой верхний предел значений k .

Связь между двумя контурами отсутствует вовсе, если магнитный поток, создаваемый любым из контуров, сцепляется только с витками этого самого контура. При этом $\Phi_{12} = \Phi_{21} = 0$, и коэффициент связи обращается в нуль.

Если выразить значения всех частичных потоков, входящих в выражение (3,104), через соответствующие индуктивности, т. е. подставить в (3,104) значения

$$\Phi_{12} + \Phi_{1s} = \frac{L_1 i_1}{\omega_1}, \quad \Phi = \frac{M i_1}{\omega_2},$$

$$\Phi_{21} + \Phi_{2s} = \frac{L_2 i_2}{\omega_2}, \quad \Phi_{21} = \frac{M i_2}{\omega_1},$$

то после сокращения на $\omega_2 \omega_1$ получим новое выражение коэффициентов связи

$$k = \sqrt{\frac{M^2 i_1 i_2 \omega_1 \omega_2}{\omega_1 \omega_2 L_1 L_2 i_1 i_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (3,105)$$

Иногда для характеристики взаимной связи контуров пользуются так называемым коэффициентом рассеяния

$$\sigma = 1 - k^2. \quad (3,106)$$

Очевидно, при отсутствии связи ($k = 0$) коэффициент рассеяния обращается в единицу, а при наибольшей теоретически возможной связи ($k = 1$) $\sigma = 0$.

Отметим кстати как следствие (3,105), что произведение индуктивностей L_1 и L_2 никогда не может быть меньше квадрата взаимной индуктивности:

$$L_1 L_2 \geq M^2. \quad (3,107)$$

Пример 3,18. Определим в качестве примера коэффициенты связи и рассеяния для рассмотренного в примере § 3,17 случая двух индуктивно связанных катушек.

По значениям $M = 0,665$ Н, $L_1 = 20$ Н, $L_2 = 0,0222$ Н находим

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0,665}{20 \cdot 0,0222} = 0,998$$

и соответственно

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{0,665^2}{20 \cdot 0,0222} = 0,004.$$

3,20. Энергия двух магнитно связанных контуров тока

Для определения энергии поля в этом случае (фиг. 3,42) можно воспользоваться общим выражением энергии магнитного поля в элементе объема ¹

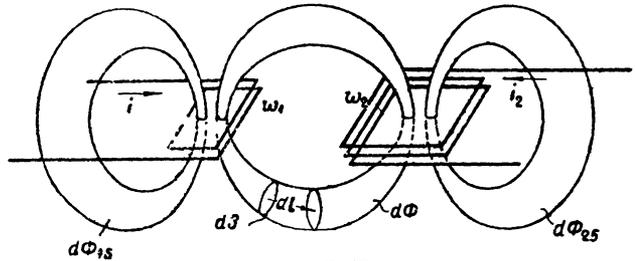
$$dW = W_0 dV = \frac{BH}{2} dV = \frac{BH}{2} dV$$

и тем или иным способом произвести интегрирование этого выражения по всему объему поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V BH dV. \quad (3,108)$$

Объем поля в этом случае может быть разбит на индукционные трубки трех видов. Трубки первого вида пронизывают оба контура тока, образуя их общий поток Φ , а трубки второго и третьего вида пронизывают только один какой-нибудь контур, образуя потоки рассеяния Φ_{1s} и Φ_{2s} . Элемент объема каждой из трубок

$$dV = dS dl.$$



Фиг. 3, 42.

Производя сначала интегрирование (3,108) в пределах объема какой-либо индукционной трубки с бесконечно малым поперечным сечением dS , получим

$$dW = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} BH \cdot dS \cdot dl.$$

Но произведение $B dS$ представляет собой магнитный поток $d\Phi$ данной индукционной трубки, одинаковый для всех ее сечений. Поэтому

$$dW = \frac{1}{2} d\Phi \int H dl, \quad (3,109)$$

¹ Мы не рассматриваем здесь случаев, когда векторы \mathbf{H} и \mathbf{B} имеют различное направление, т. е. имеем в виду только поле в изотропной среде при $\mu = \text{const}$.

где интеграл берется по замкнутому контуру силовой трубки. Для любой трубки первого вида по закону полного тока

$$\oint H \, dl = i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2,$$

и следовательно,

$$dW_{\text{общ}} = \frac{1}{2} d\Phi (i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2),$$

а для всей совокупности трубок первого вида

$$W_{\text{общ}} = \frac{1}{2} (i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2) \int d\Phi,$$

где интеграл распространяется на все трубки первого вида и дает общий поток обоих контуров. Таким образом

$$W_{\text{общ}} = \frac{1}{2} \Phi (i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2). \quad (3,110)$$

Для индукционных трубок потока рассеяния

$$\oint H \, dl = i_1 \omega_1 \quad \text{или} \quad i_2 \omega_2,$$

и следовательно,

$$dW_{1s} = \frac{1}{2} d\Phi_{1s} i_1 \omega_1,$$

$$dW_{2s} = \frac{1}{2} d\Phi_{2s} i_2 \omega_2,$$

откуда аналогично предыдущему

$$W_{1s} = \frac{1}{2} \Phi_{1s} i_1 \omega_1, \quad (3,111)$$

$$W_{2s} = \frac{1}{2} \Phi_{2s} i_2 \omega_2. \quad (3,112)$$

Складывая (3,110), (3,111) и (3,112), получим выражение энергии во всем объеме поля

$$W = \frac{1}{2} [\Phi i_1 \omega_1 + \Phi i_2 \omega_2 + \Phi_{1s} i_1 \omega_1 + \Phi_{2s} i_2 \omega_2].$$

Имея в виду, что $\Phi + \Phi_{1s}$ представляет собой суммарный поток Φ_1 , проходящий сквозь первый контур, а $\Phi + \Phi_{2s}$ — суммарный поток Φ_2 , проходящий сквозь второй контур, придадим выражению энергии вид

$$W = \frac{i_1 \omega_1 \Phi_1}{2} + \frac{i_2 \omega_2 \Phi_2}{2}. \quad (3,113)$$

Далее примем во внимание, что согласно (3,91) и (3,92)

$$\omega_1 \Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

и

$$\omega_2 \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

Подставив эти выражения в (3,113), получим

$$W = \frac{i_1}{2} (L_1 i_1 + M i_2) + \frac{i_2}{2} (L_2 i_2 + M i_1),$$

или

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2. \quad (3,114)$$

Первый член полученного выражения представляет собой энергию магнитного поля первого контура при отсутствии второго (или при $i_2 = 0$), второй — энергию поля второго контура при отсутствии первого (или при $i_1 = 0$), а третий — энергию, связанную с взаимным расположением обоих контуров и равную той работе, которая будет произведена силами поля, если при неизменных токах i_1 и i_2 контуры будут отодвинуты друг от друга на бесконечно большое расстояние. В зависимости от направления токов (а следовательно, от их знаков) энергия взаимного расположения токов может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому общая энергия системы может оказаться и больше и меньше, чем сумма энергий обоих контуров, взятых отдельно.

Пример 3.19. Два контура имеют индуктивности: $L_1 = 20$ Н и $L_2 = 5$ Н и коэффициент связи $k = 0,5$. Определить энергию поля, создаваемого этими контурами при токах $i_1 = 40$ А и $i_2 = -20$ А, и выяснить, как она изменится, если контуры раздвинуть на весьма большое расстояние.

Энергия каждого из контуров, взятых по отдельности, составляет

$$\frac{L_1 i_1^2}{2} = \frac{20 \cdot 40^2}{2} = 16\,000 \text{ Дж}$$

и

$$\frac{L_2 i_2^2}{2} = \frac{5 \cdot (-20)^2}{2} = 1\,000 \text{ Дж}.$$

Взаимная индуктивность контуров

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,5\sqrt{20 \cdot 5} = 5 \text{ Н},$$

а энергия их взаимного расположения

$$M i_1 i_2 = 5 \cdot 40 \cdot (-20) = -4\,000 \text{ Дж}.$$

Энергия магнитного поля при заданном расположении контуров

$$W = 16\,000 + 1\,000 - 4\,000 = 13\,000 \text{ Дж},$$

а при удалении их друг от друга на весьма большое расстояние

$$W' = 16\,000 + 1\,000 = 17\,000 \text{ Дж}.$$

Разность

$$W' - W = 4\,000 \text{ Дж}$$

представляет собой работу внешних сил, которые должны быть приложены к контурам, чтобы их сблизить, так как при заданном направлении токов ($i_1 > 0$, $i_2 < 0$) контуры отталкиваются друг от друга (см. § 3, 22).

3.21. Вычисление индуктивностей

Рассмотрим способы вычисления собственной и взаимной индуктивности в некоторых наиболее важных простейших случаях.

1. Индуктивность тороида. Обозначим R — радиус средней линии тороида, r — радиус его сечения и w — число витков. По закону полного тока мы нашли (3,51), что напряженность поля внутри тороида

$$H = \frac{iw}{l} = \frac{iw}{2\pi R},$$

и следовательно,

$$B = \mu H = \mu \frac{iw}{2\pi R}.$$

Магнитный поток тороида Φ равен произведению индукции на площадь сечения тороида:

$$\Phi = BS = B\pi r^2 = \mu \frac{i\omega r^2}{2R},$$

а так как этот поток охватывает все ω витков тороида, то его потоко-сцепление

$$\psi = \Phi\omega = \mu \frac{i\omega^2 r^2}{2R},$$

откуда

$$L = \frac{\psi}{i} = \mu \frac{\omega^2 r^2}{2R},$$

или, так как

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = \mu_r \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \text{ Н/см},$$

то

$$L = \mu_r \cdot 0,628 \frac{\omega^2 r^2}{R} \cdot 10^{-8} \text{ Н.} \quad (3,115)$$

Имея в виду, что πr^2 равно площади сечения S , а $2\pi R$ — длине тороида l , получим, что

$$\frac{r^2}{R} = \frac{2\pi r^2}{2\pi R} = 2 \frac{S}{l},$$

а следовательно,

$$L = 1,256 \mu_r \frac{\omega^2 S}{l} 10^{-8} \text{ Н.} \quad (3,116)$$

Пример 3,20. При $\omega = 3000$, $r = 3$ см, $R = 25$ см и $\mu = 1$, находим по (3,115)

$$L = 0,628 \cdot \frac{3000^2 \cdot 3^2}{25} \cdot 10^{-8} = 8,15 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

2. Взаимная индуктивность коаксиальных тороидов. Вычислим теперь взаимную индуктивность двух коаксиальных тороидов, имеющих общую среднюю линию с радиусом R и концентрические сечения с радиусами r_1 и r_2 . Будем предполагать при этом, что r_1 больше, чем r_2 , т. е. что второй тороид заключен внутри первого. Число витков первого тороида обозначим ω_1 , а второго ω_2 . Поток Φ_{12} , создаваемый при $i_2 = 0$, первым тороидом, пронизывающий второй, выражается соотношением

$$\Phi_{12} = B_1 S_2 = \mu \frac{i_1 \omega_1}{2\pi R} \pi r_2^2 = \mu \frac{i_1 \omega_1}{2R} r_2^2,$$

а соответствующее потоко-сцепление первого тороида со вторым

$$\Psi_{12} = \omega_2 \Phi_{12} = \mu \frac{i_1 \omega_1}{2R} r_2^2 \omega_2.$$

Согласно (3,82) взаимная индуктивность

$$M = \frac{\psi_{12}}{i_1},$$

откуда

$$M = \mu \frac{\omega_1 \omega_2}{2R} r_2^2. \quad (3,117)$$

Что касается потока, создаваемого при $i_1 = 0$ вторым внутренним тороидом, он весь связан как с ним самим, так и с первым внешним тороидом, т. е.

$$\Phi_{22} = \Phi_{21} = \mu \frac{i_2 \omega_2}{2\pi R} \pi r_2^2 = \mu \frac{i_2 \omega_2}{2R} r_2^2,$$

а соответствующее потокоцепление второго тороида с первым

$$\Psi_{21} = \omega_2 \Phi_{21} = \mu \frac{i_2 \omega_2 \omega_1}{2R} r_2^2.$$

Согласно (3,85) взаимная индуктивность

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \mu \frac{\omega_2 \omega_1}{2R} r_2^2,$$

как мы уже и получили выше другим путем (3,117).

Этим еще раз подтверждается правильность выведенного нами в § 3,18 соотношения

$$M_{12} = M_{21}.$$

Пример 3,21. При $R = 40$ см, $r_1 = 8$ см, $r_2 = 7$ см, $\omega_1 = 10\,000$, $\omega_2 = 3\,000$ и $\mu_r = 1$ находим по (3,117)

$$M = \mu \cdot \mu_r \frac{\omega_1 \omega_2 r_2^2}{2R} = 1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot \frac{10\,000 \cdot 3\,000 \cdot 7^2}{2 \cdot 40} = 0,234 \text{ Н.}$$

Как видно из найденных формул, собственная индуктивность катушки прямо пропорциональна квадрату числа витков, а взаимная индуктивность — произведению числа витков первой и второй катушек. Это имеет место во всех тех случаях, когда все витки каждой из катушек связаны с одним и тем же потоком, и объясняется тем, что по закону полного тока напряженность поля (следовательно, и индукция и поток) прямо пропорциональна числу витков, а потокоцепление равно произведению потока на число витков той же или другой катушки.

3. Индуктивность цилиндрической катушки. Прямую цилиндрическую катушку можно рассматривать как отрезок тороида с бесконечно большим радиусом R . Поэтому, если длина катушки очень велика по сравнению с радиусом ее сечения, индуктивность катушки может быть определена по формуле (3,116) для индуктивности тороида

$$L_\infty = \frac{\mu \pi r^2 \omega^2}{l}, \tag{3,118}$$

где значок ∞ , поставленный у символа L , обозначает, что $l \gg r$.

В тех случаях, когда длина катушки не очень велика по сравнению с радиусом ее сечения, можно пользоваться той же формулой, вводя поправочный множитель m , величина которого в зависимости от отношения $\frac{2r}{l}$ (или $\frac{l}{2r}$) приведена в следующей таблице:

ТАБЛИЦА

$\frac{2r}{l}$	m	$\frac{l}{2r}$	m
0,00	1,0000	1,00	0,6884
0,10	0,9000	0,80	0,6381
0,20	0,9201	0,60	0,5637
0,40	0,8499	0,40	0,4719
0,60	0,7885	0,20	0,3198
0,80	0,7351	0,10	0,2033
1,00	0,6884		

Индуктивность цилиндрической катушки любой длины выразится тогда формулой

$$L = mL_\infty. \tag{3,119}$$

Пример 3,22. Катушка имеет $r = 15$ см, $l = 1,5$ м, $w = 450$. Находим сначала по формуле (3,118)

$$L_{\infty} = \frac{1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 3,14 \cdot 225 \cdot 202\,500}{150} = 0,012 \text{ Н} = 12 \text{ мН.}$$

Затем определяем отношение

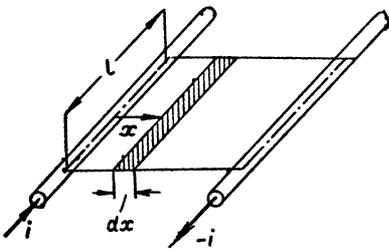
$$\frac{2r}{l} = \frac{30}{150} = 0,2,$$

для которого находим в таблице $m \approx 0,92$. Окончательно получаем, что индуктивность катушки

$$L = mL_{\infty} = 0,92 \cdot 12 \approx 11 \text{ мН.}$$

В тех случаях, когда $\frac{2r}{l} > 1$, коэффициент определяется по обратному отношению $\frac{l}{2r}$.

4. Индуктивность двухпроводной линии. В электротехнике очень часто приходится иметь дело с контуром в форме длинной петли, образованной двумя параллельными цилиндрическими проводами (линия передачи, кабель, телефонная линия).



Фиг. 3,43.

Чтобы вывести расчетную формулу для индуктивности такой петли, подсчитаем сначала, чему будет равен магнитный поток, проходящий в пространстве между двумя проводами.

В плоскости, проходящей через оси обоих проводов (фиг. 3,43), индукция магнитного поля, создаваемого током первого провода, направлена перпендикулярно к этой плоскости и может быть определена по формуле

$$B_1 = \mu \frac{i}{2\pi x}.$$

Поэтому магнитный поток, создаваемый током первого провода и проходящий сквозь элементарную площадку $l dx$,

$$d\Phi_1 = \mu \frac{i}{2\pi x} l dx.$$

Весь поток, создаваемый током первого провода и проходящий сквозь часть плоскости проводов длиной l между осью второго провода и поверхностью первого, т. е. поток, создаваемый внутри участка петли длиной l током первого провода, будет равен

$$\Phi_1 = \int d\Phi_1 = \mu \frac{i}{2\pi} l \int_{x=r}^a \frac{dx}{x} = \mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{a}{r}, \quad (3,120)$$

где r — радиус сечения провода.

По соображениям симметрии легко заключить, что поток такой же величины будет создаваться внутри того же участка петли и током второго провода (ток второго провода равен и направлен противоположно току первого провода). Поэтому находим, что общий поток внутри петли

$$\Phi = 2\mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{a}{r}. \quad (3,121)$$

В данном случае мы имеем одновитковый контур и можем поэтому из (3,121) непосредственно определить индуктивность участка петли

длиной l

$$L = \frac{\Phi}{i} = 2\mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{a}{r} = \mu_r \cdot 1,256 \frac{l}{\pi} \ln \frac{a}{r} 10^{-8} = 4\mu_r l \cdot \ln \frac{a}{r} \cdot 10^{-9}. \quad (3,122)$$

Подставляя для воздуха или другой изолирующей среды $\mu_r = 1$, получим

$$L = 4l \cdot \ln \frac{a}{r} \cdot 10^{-9}. \quad (3,123)$$

Так как обычно длина линии составляет несколько километров, удобно пользоваться формулой, выражающей индуктивность линии на 1 km ее длины. Имея в виду, что в формуле (3,123) l следует выражать в см и что $1 \text{ km} = 10^5 \text{ см}$, получаем индуктивность 1 km линии

$$L_0 = 4 \ln \frac{a}{r} 10^{-4} \text{ Н/km}. \quad (3,124)$$

В предыдущих выводах не учитывалось то поле, которое каждый из токов создает внутри своего провода и напряженность которого выражается формулой (3,50)

$$H = \frac{i}{2\pi r^2} x,$$

а следовательно, магнитная индукция

$$B = \mu H = \mu \frac{i}{2\pi r^2} x. \quad (3,125)$$

Для определения той дополнительной индуктивности $L_{\text{внутр}}$, которая обязана своим происхождением полю внутри провода, будем исходить из выражения энергии

$$W = \frac{Li^2}{2}.$$

Энергию магнитного поля внутри провода можно определить следующим образом: вырежем внутри провода трубку длиной l , радиусом x и толщиной dx .

Объем такой трубки

$$dV = l2\pi x dx.$$

Энергия поля в объеме такой трубки

$$dW = \frac{1}{2} BH dV = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{i}{2\pi r^2} x \right)^2 l2\pi x dx = \frac{1}{2} \mu \frac{i^2}{2\pi r^4} l x^3 dx,$$

энергия же в объеме всего провода

$$W_{\text{провод}} = \int dW = \mu \frac{i^2}{4\pi r^4} l \int_{x=0}^{x=r} x^3 dx = \mu \frac{i^2}{4\pi r^4} l \int_0^r \frac{x^4}{4} = \mu \frac{i^2}{16\pi} l.$$

Такой же энергией обладает и поле внутри второго провода. Следовательно, энергия магнитного поля внутри обоих проводов

$$W_{\text{внутр}} = \mu \frac{i^2}{8\pi} l, \quad (3,126)$$

откуда внутренняя индуктивность обоих проводов

$$L_{\text{внутр}} = \frac{2W_{\text{внутр}}}{i^2} = \frac{2\mu i^2 l}{8\pi i^2} = \frac{\mu_r 1,256 \cdot 10^{-8} l}{4\pi} \approx \mu_r l 10^{-9} \text{ Н},$$

или

$$L_{0\text{внутр}} = \mu_r \cdot 10^{-4} \text{ Н/km}. \quad (3,127)$$

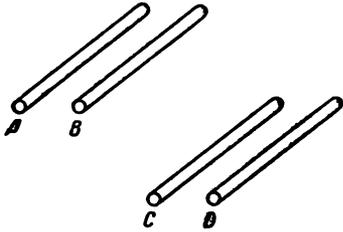
Добавляя к (3,124) внутреннюю индуктивность проводов, получим полную индуктивность двухпроводной линии

$$L_0 = \left(4 \ln \frac{a}{r} + \mu_r\right) \cdot 10^{-4} \text{ Н/км.} \quad (3,128)$$

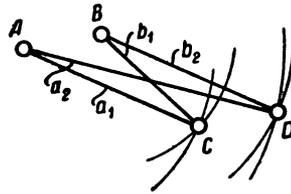
Входящая в это выражение относительная магнитная проницаемость μ_r материала проводов может быть принята за единицу для всех проводов кроме железных. В тех случаях, когда $\mu_r = 1$, им можно пренебречь. Напротив, в случае железных проводов внутренняя индуктивность весьма заметна в общей индуктивности.

Однако непосредственное пользование формулой (3,128) затрудняется здесь тем обстоятельством, что для железа μ_r не является постоянной величиной, а зависит от магнитной индукции, различной на разных расстояниях от оси провода.

5. Взаимная индуктивность двухпроводных линий. Определим взаимную индуктивность двух параллельно идущих двухпроводных линий (фиг. 3,44), каждая из которых представляет собой независи-



Фиг. 3, 44.



Фиг. 3, 45.

мую петлю. Одна из них может быть, например, телефонной линией связи, а другая — линией электропередачи.

Для определения величины их взаимной индуктивности (на 1 км длины) нам нужно узнать, какой магнитный поток пронизывает

участок петли CD длиной в 1 км при токе i в проводах AB .

Найдем сначала ту часть этого потока, которая создается током провода A . Так как линии индукции образуют замкнутые окружности, имеющие центр на оси провода A , то поток через поверхность CD (фиг. 3,45) будет равен аналогично (3,120)

$$\Phi_A = \mu \frac{il}{2\pi} \int_{x=a_1}^{x=a_2} \frac{dx}{x} = \mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

Подобным же образом находим поток, создаваемый током провода B в той же петле CD :

$$\Phi_B = \mu \frac{(-i)l}{2\pi} \int_{x=b_1}^{x=b_2} \frac{dx}{x} = \mu \frac{(-i)l}{2\pi} \ln \frac{b_2}{b_1} = \mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{b_1}{b_2}.$$

Перед током i во втором случае взят знак минус, так как мы предполагаем, что AB — два провода линии электропередачи и, следовательно, токи в двух ее проводах равны и прямо противоположны.

Беря сумму Φ_A и Φ_B , найдем полный поток взаимной индукции

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B = \mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1}, \quad (3,129)$$

откуда взаимная индуктивность

$$M = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1}. \quad (3,130)$$

При $\mu = 1,256 \cdot 10^{-8}$ Н/см, $\mu_r = 1$ и $l = 1 \text{ км} = 10^5 \text{ см}$ это дает

$$M_0 = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} \text{ Н/км.}$$

Пример 3,23. Вычислим индуктивность 1 км двухпроводной линии при расстоянии между проводами $a = 5 \text{ м}$ и радиусе их сечения $r = 5 \text{ мм}$. По формуле (3,127), подставляя в нее a и r в любых одинаковых единицах, получаем, что

$$L_0 = \left(4 \ln \frac{a}{r} + \mu r \right) 10^{-4} = \left(4 \cdot 2,3 \lg \frac{5000}{5} + 1 \right) 10^{-4} = (27,6 + 1) 10^{-4} = 2,86 \cdot 10^{-3} \text{ Н/км} = 2,86 \text{ мН/км.}$$

Пример 3,24. Найдем, чему будет равна э. д. с. взаимной индукции, наводимая в 1 км длины телефонной линии (фиг. 3,44), если скорость изменения тока в проводах линии электропередачи достигает $\frac{di}{dt} = 3 \cdot 10^5 \text{ А/сек}$, а расстояния между проводами $a_1 = 2,4 \text{ м}$, $a_2 = 3,3 \text{ м}$, $b_1 = 3,7 \text{ м}$, $b_2 = 4,4 \text{ м}$.

По формуле (3,130) находим

$$M_0 = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,3 \lg \frac{3,7 \cdot 3,3}{4,4 \cdot 2,4} = 2,85 \cdot 10^{-5} \text{ Н/км.}$$

По уравнению

$$e = -M \frac{di}{dt}$$

находим, что в нашем случае абсолютная величина э. д. с.

$$e_0 = 2,85 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^5 = 8,55 \text{ В/км.}$$

Если бы эта телефонная линия шла параллельно с линией передачи на протяжении около 20 км, величина э. д. с. взаимной индукции достигла бы значения

$$e = e_0 \cdot l = 8,55 \cdot 20 = 171 \text{ В.}$$

3,22. Баланс энергии при движении контура с неизменяющимся током в магнитном поле

Рассмотрим сначала петлю, состоящую из двух параллельных проводов. При равных токах противоположного направления сила взаимного отталкивания таких проводов при $\mu_r = 1$ выражается равенством

$$F = \mu \frac{i^2}{2\pi x} l = 2 \cdot 10^{-9} \frac{i^2}{x} l \text{ Дж/см,}$$

где x — расстояние между проводами.

Предполагая один из проводов неподвижным, другому дадим возможность перемещаться под действием силы F . При перемещении на dx провод совершает механическую работу

$$dA = F dx = 2 \cdot 10^{-9} i^2 l \frac{dx}{x} \text{ Дж.} \quad (3,131)$$

С другой стороны, магнитное поле нашей петли обладает запасом энергии:

$$W = \frac{Li^2}{2} = \frac{i^2}{2} l 10^{-9} \left(4 \ln \frac{x}{r} + 1 \right) \text{ Дж.}$$

При увеличении расстояния между проводами на dx этот запас энергии увеличится на

$$dW = d \left[\frac{i^2}{2} l \cdot 10^{-9} \left(4 \ln \frac{x}{r} + 1 \right) \right] = 2i^2 l 10^{-9} \frac{dx}{x} \text{ Дж.} \quad (3,132)$$

Как увеличение энергии магнитного поля (dW), так и произведенная механическая работа (dA) имеют своим источником генератор, поддерживающий в цепи неизменный ток i . При раздвигании проводов происходит увеличение магнитного потока, и следовательно, в контуре наводится э. д. с. $e = -\frac{d\Phi}{dt}$. На поддержание неизменного тока затрачивается при этом энергия

$$iudt = i \left(iR + \frac{d\Phi}{dt} \right) dt = i^2 R dt + i d\Phi,$$

где $i^2 R dt$ представляет собой ту часть затраченной энергии, которая превращается в тепло в сопротивлении проводника. Остальная часть затраченной энергии ($i d\Phi$) частью превращается в механическую работу, частью идет на увеличение энергии магнитного поля, так что по закону сохранения энергии

$$i d\Phi = dA + dW. \quad (3,133)$$

Но увеличение магнитного потока $d\Phi$ при перемещении проводника на dx равно

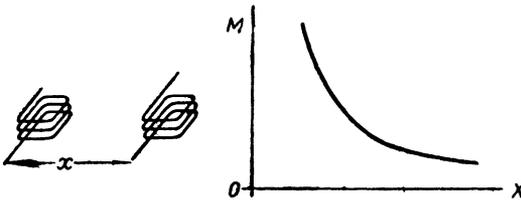
$$d\Phi = d(Li) = i dL = i d \left[l \cdot 10^{-9} \left(4 \ln \frac{x}{r} + 1 \right) \right] = il \cdot 10^{-9} \cdot 4 \frac{dx}{x},$$

а следовательно,

$$i d\Phi = 4i^2 l 10^{-9} \frac{dx}{x}, \quad (3,134)$$

что вполне согласуется с уравнениями (3,131) — (3,133).

Таким образом при неизменном токе величина механической работы, произведенной проводником с током, перемещающимся в магнитном поле, в точности равна увеличению энергии магнитного поля, причем величина энергии, подводимой от источника тока (не считая расхода энергии на нагревание проводника), равна удвоенной величине произведенной механической работы или удвоенному значению увеличения энергии магнитного поля системы.



Фиг. 3,46.

Это положение является общим для любого проводника, движущегося в магнитном поле токов, и может быть получено аналитически как следствие основных законов электромагнетизма¹.

На основании указанного соотношения между механической работой и увеличением энергии магнитного поля можно определять силу взаимодействия между двумя контурами тока по какому-либо направлению x , если известна зависимость взаимной индуктивности M этих контуров от x . Покажем это на примере определения силы взаимодействия между двумя катушками, изображенными на фиг. 3,46.

На той же фигуре изображена кривая взаимной индуктивности в функции x .

При неизменном токе увеличение энергии магнитного поля dW должно быть равно производимой механической работе

$$dA = F_x \cdot dx,$$

где F_x — есть сила, действующая в направлении x , а dx — изменение расстояния между катушками.

¹ См. В. Ф. Миткевич, Физические основы электротехники.

Увеличение энергии магнитного поля системы при неизменных токах i_1 и i_2 и при неизменной конфигурации каждого контура в отдельности (т. е. при $L_1 = \text{const}$ и $L_2 = \text{const}$) равно

$$dW = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L_1 i_1^2}{2} + L_2 \frac{i_2^2}{2} + M i_1 i_2 \right) dx = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x} dx.$$

Поэтому

$$F_x dx = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

или

$$F_x = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (3,135)$$

Имея кривую, выражающую зависимость M от x , значение производной $\frac{\partial M}{\partial x}$ нетрудно найти графически.

Сила F_x в формуле (3,135) выражается в J/см, если остальные величины выражены — в А, Н и см.

3,23. Ферромагнитные вещества

В ряду других веществ совершенно особое положение по своим магнитным свойствам занимают железо, никель, кобальт, большая часть их сплавов и как исключение сплавы некоторых других веществ.

По главному представителю этой группы — железу (ferrum) все вещества, принадлежащие к ней, носят название ферромагнитных веществ, или ферромагнетиков.

Для тех ферромагнитных материалов и в пределе тех полей, с которыми приходится иметь дело в своей практике электротехнику, особенности ферромагнитных веществ сводятся к следующему:

1) Относительная магнитная проницаемость ферромагнитных материалов μ_r значительно больше единицы, тогда как для всех остальных веществ можно, как правило, принимать $\mu_r \approx 1$.

2) Магнитная проницаемость ферромагнетиков резко зависит от магнитной индукции, т. е. $\mu \neq \text{const}$.

3) Функция

$$B = f(H),$$

как будет выяснено дальше, неоднозначна, т. е. данному значению поля H может соответствовать несколько значений индукции B .

4) Наконец, в ферромагнитных телах индукция может не быть равной нулю при отсутствии внешних возбудителей поля. Другими словами, ферромагнетики сами могут являться возбудителями магнитного поля.

Для объяснения последнего явления Ампер предложил гипотезу о существовании внутримолекулярных кольцевых токов, оси которых под действием внешнего магнитного поля располагаются в одинаковом направлении, в результате чего их действие оказывается эквивалентным действию проводникового тока. До тех пор, пока молекулярные токи ориентированы беспорядочно, их действие взаимно уничтожается.

После создания электронной теории, согласно которой в состав атомов и молекул входят движущиеся электроны, молекулярные токи Ампера были отождествлены с электронами, вращающимися по орбитам вокруг центрального ядра атома и вокруг своих собственных осей.

Не касаясь в настоящем курсе теории внутриатомных процессов, объясняющей поведение различных веществ в магнитном поле, отметим

лишь то, что совершенно исключительное положение в отношении магнитных свойств, занимаемое ферромагнетиками, объясняется, разумеется, особенностями расположения электронов в их атомах и молекулах.

3,24. Намагниченность

Между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля в вакууме имеет место соотношение

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}.$$

В какой-нибудь другой среде с магнитной проницаемостью μ при том же значении H магнитная индукция имеет другую величину, определяемую соотношением

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (3,136)$$

Причиной изменения индукции являются элементарные ориентированные токи.

Мерой плотности этих ориентированных токов может служить дополнительно создаваемая ими напряженность магнитного поля \mathbf{J} , называемая намагниченностью.

Вместо того чтобы оперировать с магнитной проницаемостью среды μ_r , можно вводить ее намагниченность, связывая магнитную индукцию с суммарной напряженностью поля $\mathbf{H} + \mathbf{J}$ соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}). \quad (3,137)$$

Сравнивая между собой (3,136) и (3,137), находим

$$\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu \mathbf{H}$$

или

$$\mathbf{H} + \mathbf{J} = \mu_r \mathbf{H},$$

откуда

$$\mathbf{J} = (\mu_r - 1) \mathbf{H}. \quad (3,138)$$

Так как для всякой среды кроме ферромагнитной можно считать $\mu_r \approx 1$, то намагниченность \mathbf{J} практически равна нулю для всех тел кроме ферромагнитных.

Для диамагнитных тел ($\mu_r < 1$) намагниченность представляет собой очень близкую к нулю отрицательную величину.

Отношение

$$\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{H}} = \mu_r - 1$$

носит название магнитной восприимчивости и обозначается буквой χ . Вводя это обозначение, получаем

$$\chi = \mu_r - 1 \quad (3,139)$$

и

$$\mu_r = 1 + \chi.$$

Введение понятия намагниченности имеет особенно большое значение для изучения магнитного поля в неоднородной среде.

3,25. Кривая первоначального намагничивания

Если в ферромагнитной среде, до этого не подвергавшейся действию магнитных полей, постепенно увеличивать напряженность магнитного поля от нуля до некоторой величины H и измерять возбуждаемую при этом индукцию B , а потом графически представить зависимость между этими

двумя величинами B и H , то мы получим кривую, подобную изображенной на фиг. 3, 47. Такого рода кривая носит название кривой первоначального намагничивания.

Для разных ферромагнетиков будут, конечно, получаться разные кривые. Однако во всех кривых остаются следующие характерные черты:

а) Отношение $\frac{B}{H}$ (равное магнитной проницаемости μ) сначала возрастает, достигая максимума в определенной точке M , а затем начинает падать. Положение точки M можно определить по графику, если из начала координат O провести прямую, касательную к кривой $B = f(H)$.

б) Крутизна кривой, измеряемая отношением $\frac{dB}{dH}$ сначала возрастает, а затем, достигнув максимума в точке перегиба N , начинает падать. Пройдя точку M , в которой $\frac{dB}{dH} = \frac{B}{H} = \mu$, отношение $\frac{dB}{dH}$ стремится к постоянной величине $\frac{dB}{dH} = \mu_0$, т. е. кривая $B = f(H)$ переходит в прямую линию, тангенс угла наклона которой равен μ_0 .

При постепенном возрастании от нуля напряженности поля H оси вращения электронов начинают поворачиваться, стремясь ориентироваться по направлению H , и создают, таким образом, намагниченность J , вследствие чего индукция возрастает до величины

$$B = \mu_0 (H + J).$$

Однако в слабом магнитном поле намагниченность относительно мала (отношение $\frac{J}{H}$ мало). При увеличении напряженности поля отношение вновь ориентируемых электронов к увеличению напряженности поля ($\frac{dJ}{dH}$) сначала возрастает, а затем, пройдя максимум в точке N^1 , начинает уменьшаться: наступает „насыщение“.

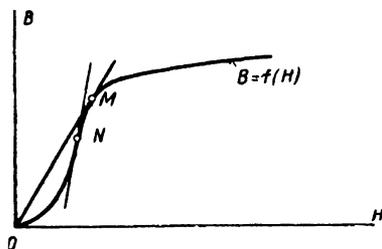
При дальнейшем увеличении H отношение вновь ориентируемых электронов к увеличению напряженности поля становится все меньше и меньше, пока, наконец, оси всех электронов, которые могли быть повернуты действием магнитного поля, не совпадут по направлению с H . Тогда новое увеличение напряженности поля уже не будет вызывать увеличения намагниченности, достигшей наибольшего возможного для данного материала значения. Иначе говоря, $\frac{dJ}{dH}$ будет теперь равно нулю и, следовательно,

$$\frac{dB}{dH} = \frac{d(J + H)\mu_0}{dH} = \mu_0 = \text{const.}$$

Произошло полное насыщение. Кривая намагничивания $B = f(H)$ перешла в наклонную прямую.

¹ $\frac{dJ}{dH}$ имеет максимум для того же значения H , что и $\frac{dB}{dH}$, так как $B = \mu_0 (H + J)$, и следовательно,

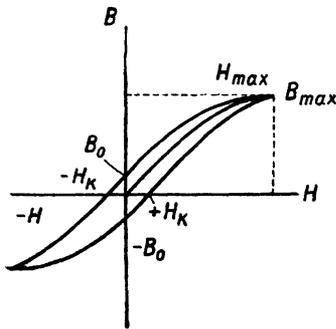
$$\frac{dB}{dH} = \mu_0 \left(1 + \frac{dJ}{dH} \right).$$



Фиг. 3, 47.

3,26. Петля гистерезиса

Рассмотрим теперь следующий процесс. Доведа намагничение железа до какого-либо определенного значения B_{\max} , соответствующего определенной напряженности поля H_{\max} , начнем уменьшать напряженность поля H , вследствие чего начнет уменьшаться и индукция B . Строя для этого случая кривую $B=f(H)$ при уменьшении H от H_{\max} до нуля, мы увидим, что она не совпадает с кривой первоначального намагничивания (фиг. 3,48). При рассматриваемом обратном ходе любому значению напряженности поля соответствует большая индукция, чем при первоначальном намагничивании. Это объясняется тем, что раз созданная намагниченность вещества продолжает сохраняться при ослаблении поля вследствие известной устойчивости того нового структурного состояния микроструктуров железа, которое они приняли после того, как оси вращения электронов были



Фиг. 3,48.

ориентированы действием внешнего поля. Здесь мы имеем явление, аналогичное остаточной деформации материала при исчезновении вызвавшей деформацию силы.

При уменьшении напряженности поля до нуля магнитная индукция будет иметь определенное положительное значение B_0 , носящее название остаточной индукции. Эта индукция создается остаточной намагниченностью J_0 железа. В том случае, когда все пространство, занятое магнитным полем, заполнено однородной средой, остаточная индукция

$$B_0 = \mu_0 J_0.$$

Для того чтобы довести индукцию B до нуля, нужно, как показывает опыт, создать поле напряженности H_k , направленное противоположно остаточной индукции и потому рассматриваемое как отрицательное.

Напряженность поля $-H_k$, требуемая для приведения индукции к нулю, называется коэрцитивной силой.

Следует отметить, что нулевое значение индукции при $H = -H_k$ вовсе не указывает на полное исчезновение намагниченности. Напротив, так как $B = \mu_0 (J + H)$, то при $H = -H_k$

$$J - H_k = 0,$$

и следовательно,

$$J = H_k.$$

Действительно, опыт показывает, что стоит устранить размагничивающее поле $-H_k$, как индукция снова примет некоторое определенное положительное значение.

Чтобы совершенно уничтожить намагниченность, нужно еще усилить отрицательную напряженность поля, доводя ее до такого значения $-H'_k$, при котором индукция B будет равна $-\mu_0 H'_k$. Действительно, в этом случае

$$B = \mu_0 (J - H'_k) = -\mu_0 H'_k,$$

откуда

$$J - H'_k = -H'_k,$$

или

$$J = 0.$$

Продолжая увеличивать отрицательную напряженность поля и доводя ее до значения, равного по абсолютной величине той наибольшей поло-

жительной напряженности, до которой поле было доведено при первоначальном намагничивании, мы получим индукцию $-B_{\max}$, в точности равную (по абсолютной величине) положительному значению B_{\max} , существовавшему при соответствующем H_{\max} .

Вновь ослабляя напряженность поля от H_{\max} до 0, мы получим изменение индукции от $-B_{\max}$ до $-B_0$, симметричное положительному участку кривой от B_{\max} до B_0 . Снова увеличивая напряженность поля в положительном направлении до H_{\max} , мы получим ход изменения кривой B от $-B_0$ до $+B_{\max}$, симметричный с участком от $+B_0$ до $-B_{\max}$. Кривая намагничивания образует, таким образом, замкнутую симметричную петлю, если намагничение производится в пределах $\pm H_{\max}$.

Характерными точками этой кривой являются точки

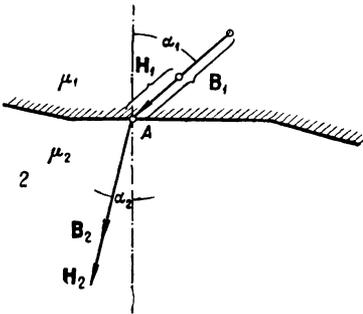
$$(H_{\max}, B_{\max}) \text{ и } (-H_{\max}, -B_{\max}),$$

затем точки пересечения петли с осью ординат $(0, +B_0)$ и $(0, -B_0)$ и, наконец, точки пересечения петли с осью абсцисс $(-H_k, 0)$ и $(+H_k, 0)$.

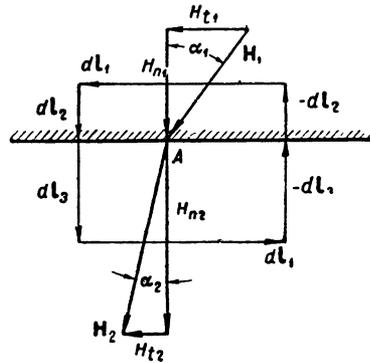
3.27. Магнитное поле в неоднородной среде

До сих пор мы рассматривали магнитное поле в однородной среде.

Но в реальных условиях электротехнической практики неразрезанный тороид из стали (или иного ферромагнитного вещества) является, пожалуй, единственным примером, когда все пространство, на которое



Фиг. 3, 49.



Фиг. 3, 50.

распространяется магнитное поле, заполнено однородной средой. Во всех остальных случаях приходится иметь дело с полями в неоднородной среде. Неоднородность среды может резко изменить картину магнитного поля, хотя все основные законы магнетизма сохраняют свою силу и в этом случае. Мы начнем рассмотрение поля в неоднородной среде с изучения магнитного поля по обе стороны границы, разделяющей две среды с различной магнитной проницаемостью: μ_1 — в одной среде и μ_2 — в другой (фиг. 3, 49).

Положим, что в точке A на поверхности раздела двух сред вектор магнитной индукции в первой среде равен B_1 , а вектор напряженности поля H_1 , причем как H_1 , так и B_1 образуют с нормалью к элементу поверхности раздела угол α_1 . Определим теперь индукцию B_2 и напряженность поля H_2 во второй среде как по величине, так и по направлению.

Эта задача может быть решена на основании закона полного тока

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum I$$

и закона непрерывности магнитного потока

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0,$$

сохраняющих силу и для неоднородной среды.

Намечаем вокруг точки A элементарный замкнутый прямоугольный контур (фиг. 3, 50), две стороны которого параллельны поверхности раздела и лежат одна в среде 1, а другая в среде 2, а две других стороны перпендикулярны к поверхности раздела, причем располагаем этот контур так, чтобы векторы \mathbf{B}_1 и \mathbf{H}_1 лежали в плоскости этого контура.

Затем, обозначив стороны этого контура согласно фиг. 3, 51, выполняем интеграцию:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} &= \mathbf{H}_1 \, dl_1 + \mathbf{H}_1 \, dl_2 + \mathbf{H}_2 \, dl_3 + \mathbf{H}_2 (-dl_1) + \mathbf{H}_2 (-dl_3) + \mathbf{H}_1 (dl_2) = \\ &= \mathbf{H}_1 \, dl_1 - \mathbf{H}_2 \, dl_1, \end{aligned}$$

а так как рассматриваемый контур не охватывает тока,

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 \, dl - \mathbf{H}_2 \, dl = 0. \quad (3,140)$$

Но

$$\mathbf{H}_1 \, dl_1 = H_1 \sin \alpha_1 \, dl_1 = H_{1t} \, dl_1$$

и

$$\mathbf{H}_2 \, dl_1 = H_2 \sin \alpha_2 \, dl_1 = H_{2t} \, dl_1,$$

где H_{1t} и H_{2t} обозначают тангенциальные составляющие векторов \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 . Подставляя эти значения в (3, 140), получаем

$$H_{1t} \, dl_1 - H_{2t} \, dl_1 = 0,$$

откуда вытекает важное следствие

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad (3,141)$$

т. е. тангенциальная составляющая вектора напряженности поля при переходе из одной среды в другую (в непосредственной близости от поверхности раздела) не изменяется.

Из последнего уравнения можно найти также связь между тангенциальными составляющими индукции. Действительно,

$$B_{1t} = \mu_1 H_{1t},$$

а

$$B_{2t} = \mu_2 H_{2t},$$

следовательно,

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (3,142)$$

так как

$$H_{1t} = H_{2t}.$$

Применяя закон непрерывности магнитного потока, мы найдем связь между нормальными составляющими векторов поля.

В § 3, 8 из закона непрерывности магнитного потока было выведено следствие, что в любом сечении одной и той же индукционной трубки магнитный поток имеет одинаковую величину (3, 18). Возьмем элементарную площадку $d\mathbf{S}$ на поверхности раздела среды 1 и 2 около точки A (фиг. 3, 51). Проходящий сквозь эту площадку магнитный поток $d\Phi$ должен быть одинаков по обе стороны площадки. Но в среде 1

$$d\Phi = \mathbf{B}_1 \, d\mathbf{S} = B_1 \cos \alpha_1 \, dS = B_{1n} \, dS,$$

а в среде 2

$$d\Phi = \mathbf{B}_2 \, d\mathbf{S} = B_2 \cos \alpha_2 \, dS = B_{2n} \, dS.$$

Приравнявая друг другу эти два выражения одного и того же потока, получаем

$$B_{1n} dS = B_{2n} dS,$$

откуда вытекает важное следствие

$$B_{1n} = B_{2n}, \tag{3,143}$$

т. е. нормальная слагающая магнитной индукции при переходе из одной среды в другую (в непосредственной близости от поверхности раздела) не изменяется.

Из уравнения (3,143) находим также связь и между нормальными слагающими напряженности поля.

Действительно,

$$H_{1n} = \frac{B_{1n}}{\mu_1},$$

а

$$H_{2n} = \frac{B_{2n}}{\mu_2},$$

следовательно,

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{B_{1n}}{\mu_1} \frac{\mu_2}{B_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{3,144}$$

так как

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Таким образом мы установили связь как между нормальными, так

и между тангенциальными слагающими векторов поля в обеих средах. Что же касается угла α_2 , мы можем определить его следующим образом:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}, \quad \text{а} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}} \frac{H_{1n}}{H_{1t}} = \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{3,145}$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Уравнения (3,141), (3,143) и (3,145) выражают так называемый закон преломления магнитного поля.

Следующие примеры иллюстрируют применение этого закона:

Пример 3, 25. Тонкая пластинка из материала с магнитной проницаемостью μ_1 помещена в среду с меньшей магнитной проницаемостью μ_2 (фиг. 3, 52). Пусть $B_2 = 1000$ Gs, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\mu_{r2} = 1$ и $\mu_{r1} = 10$. Требуется найти α_1 , B_1 и H_1 в пластинке.

Определяем угол α_1 :

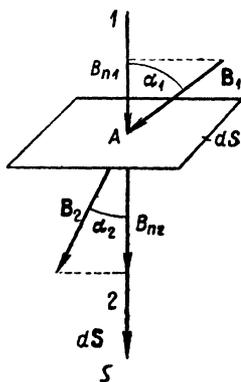
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} 30^\circ = 0,577; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{10}{1} \cdot 0,577 = 5,77,$$

откуда

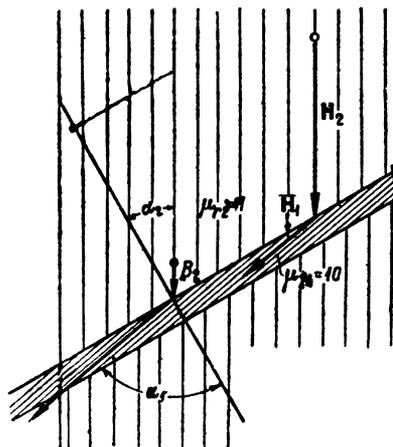
$$\alpha_1 = 80^\circ 10'.$$

Определяем нормальную и тангенциальную слагающую индукции B_1 :

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad B_{t1} = B_{t2} \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}.$$



Фиг. 3, 51.



Фиг. 3, 52.

Но

$$B_{2n} = B_2 \cos \alpha_2 = 1\,000 \cdot \cos 30^\circ = 866 \text{ Gs},$$

а

$$B_{2t} = B_2 \sin \alpha_2 = 1\,000 \sin 30^\circ = 600 \text{ Gs},$$

следовательно,

$$B_{1n} = 866 \text{ Gs}, \quad B_{1t} = 600 \cdot \frac{10}{1} = 5\,000 \text{ Gs},$$

а индукция

$$B_1 = \sqrt{B_{1n}^2 + B_{1t}^2} = 5\,080 \text{ Gs}.$$

Нетрудно определить напряженность поля в пластинке:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_{r1} \mu_0} = \frac{5\,080 \cdot 10^{-8}}{10 \cdot 1,25 \cdot 10^{-8}} = 408 \text{ A/cm}.$$

Можно было бы рассчитать и новое преломление **H** и **B** после перехода из пластины в окружающую среду. Однако результат очевиден и без расчета.

На фиг. 3,52 изображены индукционные линии как в самой пластине, так и вне ее до и после преломления.

Как вытекает из основного закона о непрерывности потока индукции, число трубок индукции (а следовательно, и число им соответствующих линий) остается неизменным при переходе из одной среды в другую.

Пример 3,26. В среде с относительной магнитной проницаемостью $\mu_{r2} = 10$ магнитная индукция $B_2 = 1\,000 \text{ Gs}$. В это поле помещена пластинка с относительной магнитной проницаемостью $\mu_{r1} = 1$ (фиг. 3,53) под углом $\alpha_2 = 60^\circ$. Требуется найти значения H_1 , B_1 и α_1 .

Как и в предыдущем случае, находим

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 1,73; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{10} 1,73 = 0,173,$$

откуда

$$\alpha_1 = 9^\circ 50'.$$

Определяем нормальную и тангенциальную слагающую индукции B_1 :

$$B_{n1} = B_{n2} = B_2 \cos \alpha_2 = 1\,000 \cdot 0,5 = 500 \text{ Gs};$$

$$B_{t1} = B_{t2} \frac{\mu_1}{\mu_2} = B_2 \sin \alpha_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1\,000 \cdot 0,866 \cdot \frac{1}{10} = 86,6 \text{ Gs},$$

откуда

$$B_1 = \sqrt{B_{n1}^2 + B_{t1}^2} \approx \sqrt{500^2 + 86,6^2} = 508 \text{ Gs},$$

а

$$H_1 = \frac{508 \cdot 10^{-8}}{1,25 \cdot 10^{-8}} = 406 \text{ A/cm}.$$

На фиг. 3,53 изображено это магнитное поле посредством линий индукции.

Рассмотрим еще следующие примеры, уже не останавливаясь, однако, на математических выкладках, которые были бы очень сложны.

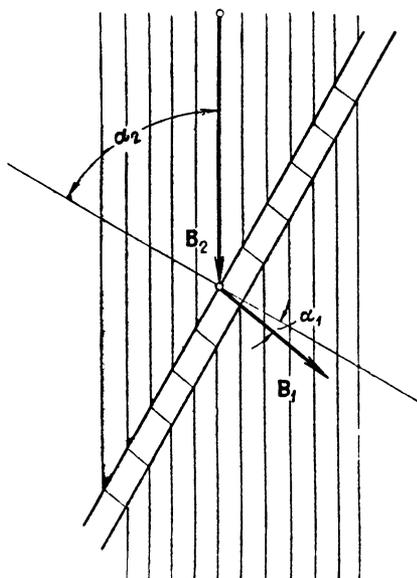
На фиг. 3,54 изображено поле в массивном сильно насыщенном железе с просверленными в нем цилиндрическими отверстиями для болтов.

Как видно из графика, магнитный поток как бы избегает выходить из железа и почти полностью огибает просверленные отверстия.

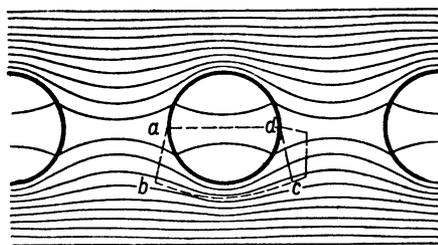
На фиг. 3,54 намечен замкнутый контур $abcd$, проведенный так, что его путь на участках ab и dc остается все время перпендикулярным к направлению поля. Напротив, участки da и cb совпадают на всем пути с направлением поля.

Отсюда легко заключить, что по закону полного тока среднее значение произведения отрезка ad на напряженность поля в воздухе по длине ad должно быть равно среднему значению произведения напряженности поля в железе вдоль пути bc на отрезок пути bc . Так как длина отрезка bc превосходит длину отрезка ad меньше чем в два раза, напряженность поля в воздухе должна быть меньше двойной величины напряженности поля в железе. Но если $H_0 = 2H_{ж\epsilon}$, то индукция в железе будет в $0,5\mu_r$ раз больше индукции в воздухе, где μ_r — относительная проницаемость железа.

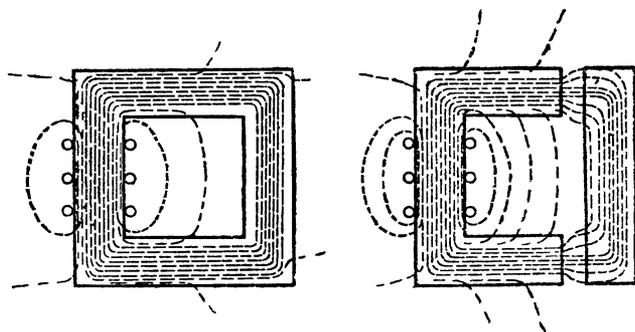
Так как магнитная проницаемость μ_r ферромагнитных материалов (при тех полях, с которыми работают электрические машины и аппараты) имеет порядок около 1500, то магнитная индукция в железе будет превышать индукцию в воздухе, по крайней мере, в 750 раз.



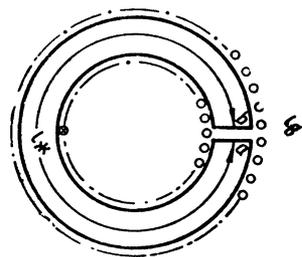
Фиг. 3, 53.



Фиг. 3, 54.



Фиг. 3, 55.



Фиг. 3, 56

В заключение на фиг. 3, 55 схематически изображено (слева) магнитное поле, создаваемое катушкой при наличии так называемого сердечника из железа. Из рисунка видно, что в этом случае, несмотря на прямоугольный характер сердечника, почти весь магнитный поток проходит внутри железа, как это наблюдалось в случае тороида.

На той же фиг. 3, 55 справа также схематически изображено поле для случая, очень близкого к изображенному слева, только на пути железного сердечника магнитный поток встречает воздушные зазоры.

Рассмотрим еще один пример поля в неоднородной среде, иллюстрирующий применение понятия намагниченности. Возьмем разрезанный тороид с малым воздушным зазором l_0 (фиг. 3, 56). Принципиально этот

случай ничем не отличается от приведенного на фиг. 3,55 справа, однако он значительно проще для расчета.

Под действием тока, проходящего через обмотку тороида, в нем создается магнитное поле с индукцией B . Вследствие малости воздушного зазора можно считать, что магнитный поток (одинаковый для воздуха и железа) распространяется в воздушном зазоре на такое же сечение, как и внутри железа.

Поэтому индукция в железе и в воздушном зазоре одинакова. Будем обозначать ее одной буквой B . Что касается напряженности поля, то в воздухе

$$H_e = \frac{B}{\mu_0}, \quad (3,146)$$

тогда как в железе

$$H_{жс} = \frac{B}{\mu}, \quad (3,147)$$

или, пользуясь понятием намагниченности,

$$H_{жс} = \frac{B}{\mu_0} - J. \quad (3,148)$$

Для определения значения напряженности поля в железе воспользуемся вновь законом полного тока

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I \varpi.$$

Интеграл по замкнутому контуру можно представить как сумму интегралов от точки a до точки b внутри железа и от b до a — в воздухе. Считая на соответственных участках напряженности поля постоянными ($H_{жс}$ и H_e), получаем

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{H}_{жс} \, d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{H}_e \, d\mathbf{l} = H_{жс} l_{жс} + H_e l_e = I \varpi,$$

или, имея в виду (3,146) и считая индукцию известной,

$$H_{жс} l_{жс} + \frac{B}{\mu_0} l_e = I \varpi,$$

откуда

$$H_{жс} = \frac{I \varpi}{l_{жс}} - \frac{B}{\mu_0} \frac{l_e}{l_{жс}}. \quad (3,149)$$

Решая уравнение (3,148) относительно J и подставляя значение $H_{жс}$ из (3,149), получаем

$$J = \frac{B}{\mu_0} - H_{жс} = \frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{l_{жс} + l_e}{l_{жс}} - \frac{I \varpi}{l_{жс}}. \quad (3,150)$$

Применим полученное уравнение к случаю, когда магнитное поле в сплошном или разрезанном тороиде создается за счет остаточной намагниченности железа при отсутствии намагничивающего тока ($I=0$).

При сплошном тороиде $l_e=0$. Так как по условию ток I также равен нулю, то уравнение (3,150) принимает вид

$$J = \frac{B}{\mu_0} - H_{жс} = \frac{B}{\mu_0} \frac{l_{жс}}{l_{жс}} = \frac{B}{\mu_0}. \quad (3,151)$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что

$$H_{жс} = 0, \quad \text{а} \quad J = \frac{B}{\mu_0}.$$

При разрезанном тороиде уравнение (3, 149) дает для случая $I = 0$

$$H_{жс} = -\frac{B}{\mu_0} \frac{l_в}{l_{жс}}, \quad (3, 152)$$

т. е. напряженность поля в железе направлена противоположно индукции B (фиг. 3, 57), тогда как напряженность поля в воздухе

$$H_в = \frac{B}{\mu_0}$$

совпадает по направлению с B .

Что касается намагниченности железа, то она теперь связана с индукцией вытекающим из (3, 150) равенством

$$J = \frac{B}{\mu_0} \frac{l_{жс} + l_в}{l_{жс}}. \quad (3, 153)$$

Исключая B из (3, 152) и (3, 153), получим

$$H_{жс} = -J \frac{l_в}{l_{жс} + l_в}. \quad (3, 154)$$

Применяя к данному случаю закон полного тока, мы, очевидно, получили, что

$$\oint \mathbf{H} \, dl = H_{жс} l_{жс} + H_в l_в = -\frac{B}{\mu_0} \frac{l_в}{l_{жс}} l_{жс} + \frac{B}{\mu_0} l_в = -\frac{B}{\mu_0} l_в + \frac{B}{\mu_0} l_в = 0,$$

как и должно быть, так как

$$I = 0.$$

Обратное направление вектора напряженности поля в железе имеет простой физический смысл. Если мы будем сравнивать между собой два тороида одинаковых размеров, один из которых — сплошной, а другой — с прорезом длиной $l_в$, то при одинаковой их намагниченности, т. е. при одинаковом количестве ориентированно вращающихся электронов в единице объема, магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J})$ должна быть меньше у разрезанного тороида, так как при одной и той же длине индукционных трубок общее количество тока, возбуждающего поле, во втором случае меньше (в вырезанной части тороида отсутствуют молекулярные токи).

Это и учитывается отрицательным значением

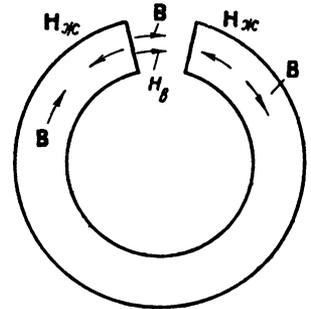
$$H_{жс} = -J \frac{l_в}{l_{жс} + l_в}.$$

Это явление часто называется „размагничивающим действием концов магнита“.

Из приведенного здесь рассуждения отчетливо видно, что напряженность магнитного поля является только формальной, расчетной величиной.

3, 28. Расчет неразветвленной магнитной цепи

Рассмотрим сначала одну отдельную индукционную трубку с магнитным потоком $\Phi = \text{const}$ и переменным сечением S_1, S_2, \dots, S_n , проходящую в среде с различными магнитными проницаемостями, соответственно равными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.



Фиг. 3, 57.

Пусть при этом длина оси нашей индукционной трубки на различных участках будет $l_1, l_2 \dots l_n$ (фиг. 3, 58).

По данным сечениям и магнитным проницаемостям найдем для рассматриваемой трубки значения индукции и напряженности поля. По отдельным участкам будем иметь

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\Phi}{S_1}; & H_1 &= \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{\Phi}{\mu_1 S_1}; \\ B_2 &= \frac{\Phi}{S_2}; & H_2 &= \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{\Phi}{\mu_2 S_2} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

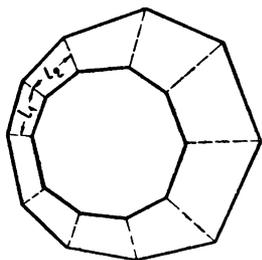
По закону полного тока можно установить следующую связь между напряженностями поля, потоком, геометрическими размерами трубки и возбуждающим поле током:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_n l_n = \frac{\Phi l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{\Phi l_2}{\mu_2 S_2} + \dots + \frac{\Phi l_n}{\mu_n S_n} = \sum I. \quad (3, 155)$$

Этим уравнением обычно и пользуются при расчете магнитной цепи. Решая его относительно Φ , получим

$$\Phi = \frac{\sum I}{\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{l_k}{\mu_k S_k} \right)}. \quad (3, 156)$$

В такой форме это уравнение часто называют законом Ома для магнитной цепи, так как оно внешне совершенно подобно закону Ома для неразветвленной цепи постоянного тока с переменным сечением провода, причем магнитная проницаемость играет роль удельной электропроводности, $\sum I$ — роль э. д. с., а магнитный поток — роль тока.



Фиг. 3, 58,

По аналогии с электрической цепью величина полного тока ($\sum I$), охватываемого индукционной трубкой, называется магнитодвижущей силой (м. д. с.), а $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{l_k}{\mu_k S_k}$ — магнитным сопротивлением.

Единицей м. д. с. является ампер, что же касается единицы магнитного сопротивления, мы можем найти ее из уравнения (3, 156), как единицу отношения $\frac{\sum I}{\Phi}$:

$$\left[\frac{\sum I}{\Phi} \right] = \frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{сек}} = \frac{1}{\text{Н}}.$$

Таким образом единица магнитного сопротивления равна обратной величине единицы индуктивности (генри). Последнее приобретает очевидный смысл, если мы вспомним, что индуктивность была определена как множитель пропорциональности между током и магнитным потоком (или потокосцеплением).

Отмеченная выше аналогия магнитной и электрической цепей носит, однако, совершенно формальный характер. Это видно хотя бы из того, что для поддержания тока в электрической цепи требуется непрерывная затрата энергии, определяемая по закону Джоуля, магнитный поток может существовать неограниченное время, не требуя для своего поддержания затраты энергии.

Для получения сильных магнитных полей или больших магнитных потоков конструкция машин и аппаратов выполняется таким образом, чтобы по возможности весь магнитный поток замыкался в железе или другом ферромагнитном материале. В случае необходимости оставлять на пути магнитного потока воздушный зазор его делают возможно малым.

В этом случае весь основной магнитный поток можно рассматривать как одну индукционную трубку, сечение которой на разных участках может, разумеется, быть различным. Если еще при этом можно предполагать магнитный поток распределенным по сечению трубки с одинаковой плотностью во всех точках этого сечения, то расчет магнитной цепи по вышевыведенным уравнениям оказывается очень простым. Обычно расчет ведется в следующем порядке: задавшись требуемым значением магнитного потока Φ , находят по нему индукцию во всех участках магнитной цепи, а по индукции — соответствующую напряженность поля определяют с помощью кривой намагничивания для железа или по формуле

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B(\text{Gs}) \cdot 10^{-8}}{1,256 \cdot 10^{-8}} \approx 0,8B(\text{Gs}) \quad (3, 157)$$

для воздуха.

После этого по уравнению (3, 155)

$$\sum I = \sum_{k=1}^{k=n} (H_k l_k)$$

определяется полный ток, часто называемый в таких случаях ампервитками (Iw).

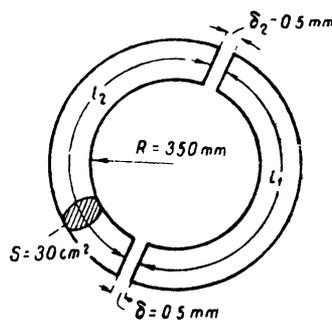
Обратная задача — определение Φ по заданному полному току $\sum I$ и геометрическим размерам непосредственно — неразрешима, так как в выражение магнитного сопротивления входит магнитная проницаемость μ , значение которой для каждого участка цепи находится в зависимости от подлежащей вычислению магнитной индукции. Зависимость эта не имеет аналитического выражения. Поэтому задачу приходится решать по методу последовательного приближения, задаваясь магнитным потоком, вычисляя соответствующий полный ток и сравнивая его с заданным.

Пример 3, 26. Дан тороид (его геометрические размеры указаны на фиг. 3, 59 из ферромагнитного материала (хром-никелевая сталь), кривая начального намагничивания которого представлена на фиг. 3, 60. Число витков его обмотки $w = 1\,000$. Требуется найти величину тока, необходимого для создания в нем магнитного потока $\Phi = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{sec} = 480\,000 \text{ Mx}$.

Прежде всего определяем индукцию

$$B = \frac{\Phi}{S} = 16\,000 \text{ Gs},$$

затем по кривой намагничивания находим соответствующие значения напряженности поля в стали $H = 50 \text{ A/cm}^1$.



Фиг. 3, 59.

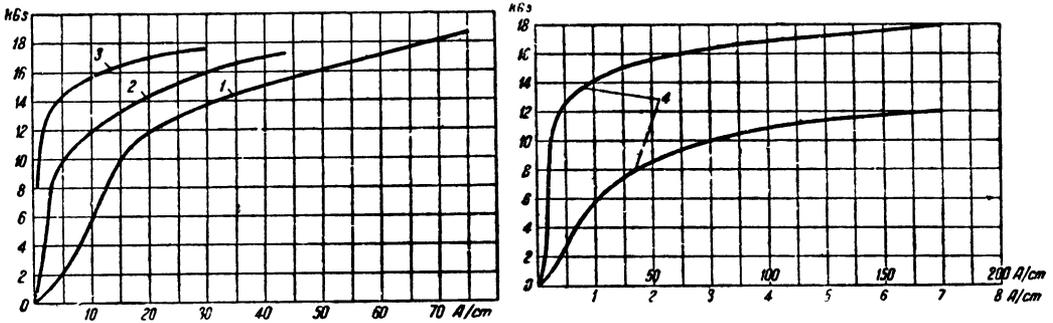
¹ В том случае, когда напряженность поля бывает выражена в практических единицах (A/cm), ее часто называют удельными ампервитками.

Напряженность поля в воздухе определяется непосредственно по формуле (3,157)

$$H_0 \approx 0,8 \cdot 16\,000 = 12\,780 \text{ A/cm.}$$

Далее, по уравнению (3,155) находим

$$\begin{aligned} \sum I = I\omega = H_{cm}(l_1 + l_2) + H_0(\delta_1 + \delta_2) &= 50(110 + 110) + 12\,780 \cdot 0,1 = \\ &= 11\,000 + 1\,278 = 12\,278 \text{ A,} \end{aligned}$$



Фиг. 3, 60.

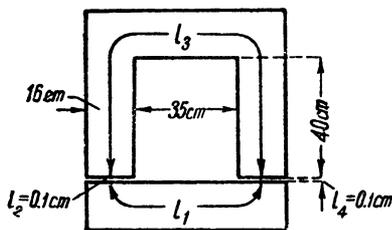
и следовательно,

$$I = \frac{12\,278}{1\,000} \approx 12,3 \text{ A.}$$

Отметим, что если бы тороид не был разрезан, намагничивающий ток был бы

$$I = \frac{11\,000}{1\,000} = 11 \text{ A.}$$

Пример 3, 27. На фиг. 3, 61 изображен электромагнит. Его геометрические размеры даны на чертеже, сечение сердечника квадратное. На том же чертеже указана средняя длина индукционной трубки (l_1 , l_2 , l_3 и l_4).



Фиг. 3, 61.

Материал верхней П-образной части электромагнитной — стальное литье, нижней — листовое железо.

Требуется найти необходимое число ампервитков в обеих катушках для создания в воздушном зазоре индукции в 14 000 Gs.

Предполагая, что среднее сечение индукционной трубки совпадает с сечением железа, т. е. равно всюду $16 \times 16 \text{ cm}^2$ (что, конечно, не совсем точно, так как на углах A, B, C и D магнитный поток распространяется на большее сечение), мы можем считать, что индукция по

всей длине индукционной трубки остается неизменной и равна 14 000 Gs.

По заданной индукции из кривых фиг. 3, 60 находим напряженность поля на различных участках магнитной цепи:

- 1) в нижней замыкающей части цепи $H_1 = 4 \text{ A/cm}$;
- 2) в воздушных зазорах $H_2 = H_4 \approx 0,8 \cdot 14\,000 = 11\,150 \text{ A/cm}$;
- 3) на П-образном участке она равна $H_3 = 17,55 \text{ A/cm}$.

Определяем среднюю длину индукционной трубки согласно с тем, как изображено на фиг. 3, 61:

- 1) $l_1 = 35 + \pi \cdot 8 \approx 60 \text{ cm}$;

2) $l_2 = l_4 = 0,1 \text{ см};$

3) $l_3 = 40 + 35 + 40 + \pi \cdot 8 \approx 140 \text{ см}.$

Находим по закону полного тока требуемое число ампервитков:

$$Iw = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = 4 \cdot 60 + 11\,150 \cdot 0,1 + 17,55 \cdot 140 + 11\,150 \cdot 0,1 = 240 + 1115 + 2\,460 + 1\,115 = 4\,930 \text{ А (или ампервитков).}$$

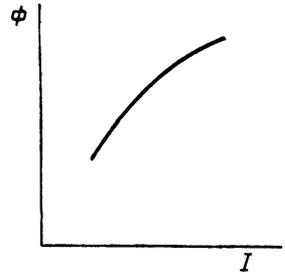
Если бы вся магнитная цепь была выполнена из листового железа, при той же длине воздушного зазора требовалось бы всего

$$H_1 (l_1 + l_3) + 2H_2 l_2 = 4 \cdot 200 + 2 \cdot 1\,115 \cdot 0,1 = 800 + 2\,230 = 3\,230 \text{ А,}$$

а если бы, кроме того, воздушный зазор был уменьшен до 0,01 см, то общее число требуемых ампервитков было бы всего

$$800 + 2 \cdot 1\,115 \cdot 0,01 = 800 + 223 = 1\,023 \text{ А.}$$

Найденные цифры 4 930, 3 230 и 1 023 А дают общее число ампервитков или полный ток. Для того чтобы найти ток, проходящий по каждому из витков катушки, иначе говоря, ток в питающей катушке цепи, найденные величины надо разделить на число витков. Так, если каждая из катушек, изображенных на фиг. 3, 61, состоит из 500 витков (общее число витков 1 000) и если катушки включены последовательно, ток в цепи (и в каждом витке катушки) должен быть равен 4,93 А; 3,23 А или 1,023 А согласно найденным выше значениям полного тока.



Фиг. 3, 62.

В последнем примере мы задавались индукцией в 14 000 Gs. Нетрудно повторить расчет и для других значений индукций, например, для 6 000, 8 000, 10 000, 12 000 и 16 000 Gs. Полученные при этом новые значения ампервитков дают возможность построить кривую $\Phi = f(I)$.

Имея такую кривую (фиг. 3, 62), мы можем теперь легко ответить на вопрос: чему будет равна магнитная индукция (или магнитный поток) при заданном значении тока.

3,29. Расчет разветвленной магнитной цепи

На практике часто приходится рассчитывать более сложные магнитные цепи чем те, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе. Примерами могут служить разветвленные цепи, представленные на фиг. 3, 63 и 3, 64. Для нахождения распределения магнитного потока в таких цепях следует исходить из тех же основных законов магнетизма, которыми мы уже пользовались, а именно:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \text{ и } \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I.$$

Продолжая аналогию с цепью постоянного тока, можно показать, что для разветвленной цепи эти уравнения приводят не к закону Ома, а к двум законам, аналогичным законам Кирхгофа.

Первый из них может быть формулирован так: в месте разветвления магнитных потоков сумма уходящих потоков равна сумме входящих.

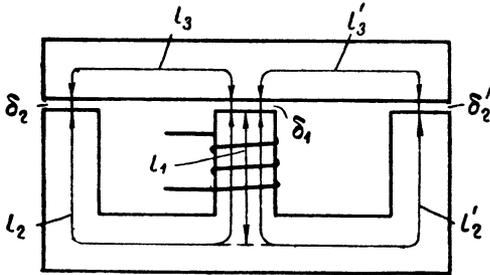
Этот закон является следствием замкнутости индукционных трубок, т. е. следствием основного положения

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи говорит о том, что магнитное напряжение обхода по любому контуру равно полному току, охватываемому этим контуром, т. е. представляет собой несколько измененную формулировку закона полного тока.

Рассмотрим два типичных примера, поясняющих метод расчета симметричной (фиг. 3, 63) и несимметричной (фиг. 3, 64) разветвленной цепи.

Пример 3, 28. Найти ампервитки катушки, надетой на железный сердечник (фиг. 3, 63), если $l_1 = 40$ см, $l_2 = l_2' = 70$ см, $l_3 = l_3' = 30$ см, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_2' = 0,1$ см (воздушный зазор), сечение железа $S = 250$ см² и если магнитный поток в среднем стержне должен быть равен $\Phi = 4,5 \cdot 10^6$ Мх. Характеристика железа соответствует кривой 4 на фиг. 3, 60 для высоколегированного железа.



Фиг. 3, 63.

Производим расчет в следующем порядке:
Находим индукцию на отдельных участках магнитной цепи. На первом участке индукция

$$B_1 = \frac{\Phi}{S} = \frac{4,5 \cdot 10^6}{250} = 18\,000 \text{ Gs.}$$

Такая же индукция будет и в воздушном зазоре δ_1 . Напротив, на остальных участках магнитной цепи индукция

$$B_2 = B_2' = B_3 = B_3' = 9\,000 \text{ Gs.}$$

будет в два раза меньше, так как магнитный поток разветвляется на две симметричные ветви, иначе говоря, тот же магнитный поток распределяется по вдвое большему сечению. Таким образом получаем

Чтобы согласно закону полного тока найти требуемое число ампервитков, мы должны рассмотреть замкнутый контур $l_1, l_2, \delta_2, l_3, \delta_1$ или $l_1, l_2', \delta_2', l_3', \delta_1$. Обход по тому и другому замкнутому контуру должен дать один и тот же результат, так как число охватываемых ампервитков (полный ток) в обоих случаях одно и то же. Находя по кривой намагничивания значения напряженности поля („удельные ампервитки“) на различных участках и умножая каждое из них на среднюю длину соответственного участка, находим требуемое суммарное число ампервитков. Результаты расчета удобно записывать в форме такой таблицы:

ТАБЛИЦА

№ участка	Материал	l в см	B в kGs (килогатссах)	H в А/см	Hl в А
1	Высоколегированное железо	40	18	190	7 600
2	То же	70	9	2,09	146,5
Воздушный зазор № 2	Воздух	0,1	9	7 200	720
3	Высоколегированное железо	30	9	2,09	62,7
Воздушный зазор № 1	Воздух	0,1	18	14 400	1 440

Итого $I\omega \approx 9980$ А, что при $\omega = 1000$ витков дает ток $I \approx 10$ А.

В этом примере нами взята очень большая индукция. Небольшое уменьшение ее, например, до 16 000 Gs, значительно уменьшило бы требуемые ампервитки.

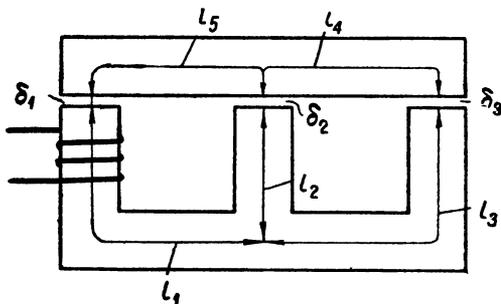
Пример 3, 29. Определим теперь необходимое число ампервитков катушки несимметрично расположенной на железном сердечнике (фиг. 3, 64), индукция в котором должна составлять 18 000 Gs. Сечение железа на всех участках возьмем равным 250 см^2 , воздушные зазоры примем одинаковыми: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,02 \text{ см}$, и зададимся следующими длинами участков: $l_1 = l_3 = 70 \text{ см}$, $l_4 = l_5 = 30 \text{ см}$ и $l_2 = 40 \text{ см}$.

Железо — то же, что и в предыдущем примере.

Из подсчетов предыдущего примера мы без труда найдем значения напряженности поля и часть выражения

$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$, соответствующую участку l_5, δ_1, l_1 , а именно, $H_5 = H_1 = 190 \text{ А/см}$, $H_{1\delta} = 14\,400 \text{ А/см}$ и, следовательно, $H_1 l_1 + H_{1\delta} \delta_1 + H_5 l_5 = 13\,300 + 288 + 5\,700 \approx 19\,300 \text{ А}$.

Что же касается расчета остальной части, он не может быть произведен столь же простым способом, так как мы не знаем, как разделится общий поток в $18\,000 \cdot 250 = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Мх}$ между ветвями $l_2 \delta_2$ и $l_3 \delta_3, l_4$.



Фиг. 3, 64.

Только при условии одинаковости ветвей можно было предполагать, что поток разделяется поровну.

В настоящем случае этого нет, и мы должны исходить из следующих соображений:

1) Обозначая одну часть потока Φ_2 , а другую Φ_3 , мы можем утверждать, что

$$\Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_1 \quad (3, 158)$$

(первый закон Кирхгофа).

2) Так как внутри контура $l_2, l_3, \delta_3, l_4, \delta_2$ тока нет, то интеграл по этому замкнутому контуру должен быть равен нулю:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_3 l_3 + H_{3\delta} \delta_3 + H_4 l_4 - H_{2\delta} \delta_2 - H_2 l_2 = 0.$$

Последние два слагаемые взяты со знаком минус, так как очевидно, что при обходе по замкнутому контуру направление обхода на этих участках не совпадает с направлением напряженности поля, если они совпали на участках l_3, δ_3 и l_4 . Иначе говоря,

$$H_3 l_3 + H_{3\delta} \delta_3 + H_4 l_4 = H_{2\delta} \delta_2 + H_2 l_2 \quad (3, 159)$$

(второй закон Кирхгофа).

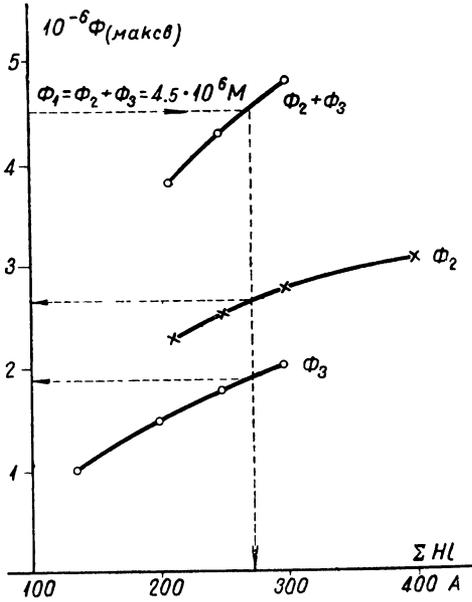
Распределение магнитного поля, удовлетворяющее одновременно условиям (3, 158) и (3, 159), соответствует действительному распределению потоков.

Дальше поступаем следующим образом: задаемся рядом значений магнитного потока Φ_2 , например, 3; 2,75; 2,5 и $2,25 \cdot 10^6 \text{ Мх}$ и находим соответствующие значения: $H_2 l_2 + H_{2\delta} \delta_2$ (т. е. ампервитки данного участка цепи).

Результат расчета записываем в форме табл. 1:

ТАБЛИЦА 1

$\Phi_2 =$	3	2,75	2,5	2,25	10^6 Mx
$B_2 =$	12	11	10	9	10^3 Gs
$H_2^1 =$	7	4,17	3,2	2,09	A/cm
$H_{2\theta} =$	9600	8800	8000	7600	"
$H_2 l_2 =$	210	125	96	62,4	A
$H_{2\theta} \delta_2 =$	192	176	160	152	"
$H_2 l_2 + H_{\theta 2} \delta_2 =$	402	301	256	214	"



Фиг. 3, 65.

рой равна $4,5 \cdot 10^6 \text{ Mx}$, соответствует условиям задачи. Для этой точки, как видно из графика, на каждую из параллельных ветвей приходится $\Sigma NI = 275 \text{ A}$, а соответствующие магнитные потоки составляют $\Phi_2 = 1,9 \cdot 10^6 \text{ Mx}$ и $\Phi_3 = 2,6 \cdot 10^6 \text{ Mx}$.

И следовательно, общие ампервитки (полный ток) должны составлять $19300 + 275 \approx 19600 \text{ A}$.

Совершенно такой же расчет производим для другой параллельной ветви l_3, δ_3, l_4 .

Однако теперь мы задаемся несколько меньшими значениями потока, предполагая, что в более длинную ветвь отделится меньшая часть потока.

Возьмем $\Phi_3 = 2; 1,75; 1,5 \text{ и } 1 \cdot 10^6 \text{ Mx}$ и найдем соответствующие значения $H_3 l_3 + H_{3\theta} \delta_3 + H_4 l_4$, т. е. ампервитки другой параллельной ветви (табл. 2).

На основании полученных данных строим кривые

$$\Phi_2 = f_1(\Sigma NI) \text{ и } \Phi_3 = f_2(\Sigma NI)$$

в общих координатных осях (фигура 3, 65).

Строим затем кривую суммарного потока $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, суммируя ординаты кривых Φ_2 и Φ_3 . Та точка полученной кривой, ордината кото-

ТАБЛИЦА 2

$\Phi_3 =$	2	1,75	1,5	1	10^6 Mx
$B_3 = B_3^1 =$	8	7	6	4	10^3 Gs
$H_3 = H_3^1 =$	1,7	1,35	1,04	0,7	A/cm
$H_{3\theta} =$	6400	5600	4800	3200	"
$H_3(l_3 + l_4) =$	170	135	104	70	A
$H_{3\theta} \delta_3 =$	128	112	96	64	"
$H_3 l_3 + H_{3\theta} \delta_3 + H_4 l_4 =$	298	247	200	134	"

¹ Значения H_2 взяты из кривой $B = f(H)$ (фиг. 3, 60).

² Значения H_3 и H_4 взяты из кривой $B = f(H)$ (фиг. 3, 60).

3,30. Индуктивность катушки с железом

В § 3,16 мы определили индуктивность как отношение потокосцепления к создающему его току:

$$L = \frac{\Psi}{i}. \quad (3,160)$$

Перейдя затем к э. д. с. самоиндукции, мы дали для нее два выражения

$$e_L = - \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{и} \quad e_L = - L \frac{di}{dt},$$

сравнивая которые, нетрудно получить другое определение индуктивности

$$L = \frac{d\Psi}{di}. \quad (3,161)$$

До тех пор, пока потокосцепление Ψ остается пропорциональным току i , индуктивность L является постоянной величиной и оба определения ее оказываются тождественными.

Но при наличии ферромагнитной среды зависимость между потокосцеплением и током перестает быть линейной, и указанные определения становятся совершенно различными. Первое из них может служить для определения потока и потокосцепления по заданному току, но совершенно не пригодно для определения наводимой э. д. с. по заданной скорости изменения тока. Напротив, второе может служить для определения наводимой э. д. с. по заданной скорости изменения тока, но не пригодно для определения потокосцепления.

На фиг. 3,66 изображена кривая первоначального намагничения в координатных осях Ψ, i . Для произвольно взятой на кривой точки A отношение

$$\frac{d\Psi}{di} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \text{ V} \cdot \text{sec}}{(40 - 20) \text{ A}} = \frac{4 \text{ V} \cdot \text{sec}}{20 \text{ A}} = 0,2 \text{ H};$$

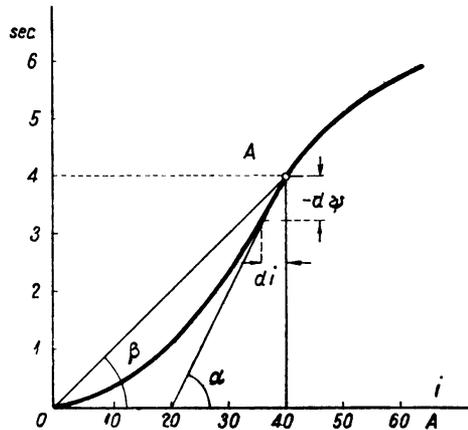
$$\frac{\Psi}{i} = \operatorname{tg} \beta = \frac{4 \text{ V} \cdot \text{sec}}{40 \text{ A}} = 0,1 \text{ H}.$$

Следует заметить, что для одного и того же значения i индуктивность, определяемая как производная $\frac{d\Psi}{di}$, будет различна при нарастании тока и при его уменьшении вследствие явления гистерезиса¹.

В связи с непостоянством индуктивности энергия магнитного поля, связанная с током в возбуждающей поле катушке, не будет уже определяться выражением

$$W = \frac{Li^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\Psi i}{2}. \quad (3,162)$$

¹ Однако при малом изменении тока и соответственно малом изменении магнитного потока можно говорить о среднем значении индуктивности. При изменении тока в пределах от $i + \frac{1}{2} \Delta i$ до $i - \frac{1}{2} \Delta i$ среднее значение индуктивности в указанных пределах изменения иногда называют обратимой индуктивностью L_r при данном i .



Фиг. 3, 66.

Действительно, энергия, полученная от источника при создании магнитного поля,

$$W = \int_{i=0; \Psi=0}^{i, \Psi} i \frac{d\Psi}{dt} dt = \int_{i=0; \Psi=0}^{i, \Psi} i d\Psi, \tag{3, 163}$$

или, подставляя

$$d\Psi = L di,$$

$$W = \int_0^i L i di.$$

Но при наличии железа Ψ не пропорционально i , точно так же индуктивность L является функцией тока i , и такая подстановка никакого упрощения не дает.

Энергия, затраченная при создании магнитного поля и выраженная уравнением (3, 163), может быть вычислена графически по кривой $\Psi = f(i)$ как площадь, ограниченная осью ординат (Ψ), прямой, параллельной оси абсцисс (i), и проходящей через заданную точку кривой M и самой кривой (фиг. 3, 67).

Как видно из фиг. 3, 67, *a* и *b*, эта площадь может быть как больше, так и меньше площади треугольника OMN , равной полупроизведению соответствующих абсциссы и ординаты $\frac{i\Psi}{2}$.

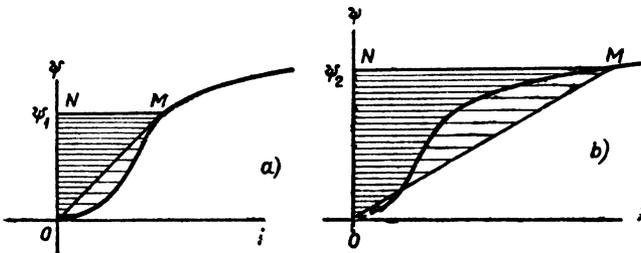
Следовательно, заменяя в выражении $\frac{i\Psi}{2}$ значение Ψ через Li [по уравнению (3, 160)], мы можем сказать, что

в случае, изображенном на фиг. 3, 67, *a*, действительно затраченная энергия

$$W = \int_{i=0; \Psi=0}^{i=i_1; \Psi=\Psi_1} i d\Psi > \frac{Li^2}{2},$$

а в случае, изображенном на фиг. 3, 67, *b*,

$$W = \int_{i=0; \Psi=0}^{i=i_2; \Psi=\Psi_2} i d\Psi < \frac{Li^2}{2}.$$



Фиг. 3, 67.

Исходя при определении индуктивности из равенства

$$W = \frac{Li^2}{2},$$

т. е. полагая

$$L = \frac{2W}{i^2},$$

мы получили бы третье значение индуктивности, не совпадающее в общем случае с двумя рассмотренными в начале этого параграфа.

Отметим еще следующее: энергию $W = \int i d\Psi$ нельзя рассматривать как целиком перешедшую в энергию поля, часть этой величины может оказаться обращенной в энергию механической деформации и в тепловую энергию, как это будет видно из следующего параграфа.

3.31. Потери на гистерезис

Энергия, затраченная на создание магнитного поля, при постоянной магнитной проницаемости (например, в катушке без железа) выражается формулой

$$W = \frac{Li^2}{2}. \quad (3, 164)$$

При переменной магнитной проницаемости (например, в катушке с железным сердечником) энергия, затраченная при создании магнитного поля, имеет другое выражение:

$$W = \int_{i=0; \Psi=0}^{i=i; \Psi=\Psi} i d\Psi, \quad (3, 165)$$

и может быть в соответствующем масштабе найдена графически как площадь $OaADO$ (фиг. 3,68).

При уменьшении тока энергия возвращается обратно в сеть и в первом случае ($\mu = \text{const}$), когда ток достигнет нуля, вся энергия, затраченная на создание магнитного поля, будет возвращена и перейдет в другую форму, например, при замыкании катушки накоротко — в форму тепловой энергии.

Напротив, в случае катушки с железом количество возвращенной энергии будет меньше количества энергии, затраченной на создание магнитного поля.

Действительно, возвращаемая энергия при изменении намагничивающего тока от i до 0 определяется опять тем же интегралом:

$$W_1 = \int_{i=i; \Psi=\Psi}^{i=0; \Psi=\Psi_{ост}} i d\Psi, \quad (3, 166)$$

взятым в пределах от $i=i$ и $\Psi=\Psi$ до $i=0$ и $\Psi=\Psi_{ост}$ — остаточному магнитному потокоцеплению, соответствующему нулевому значению тока.

Количество возвращенной энергии выражается в соответствующем масштабе площадью $AbBDA$ (фиг. 3,68).

Изменяя, далее, ток в пределах от 0 до $-i$ и получая соответствующее изменение магнитного потокоцепления от $\Psi_{ост}$ до $-\Psi$, мы снова производим затрату энергии, определяемую интегралом

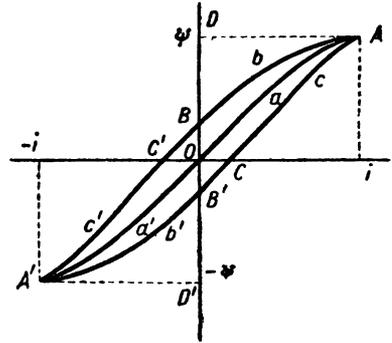
$$W_2 = \int_{\Psi=\Psi_{ост}; i=0}^{\Psi=-\Psi; i=-i} i d\Psi.$$

Эта энергия в том же масштабе, как и раньше, выражается площадью $BC'c'A'D'B$.

При дальнейшем уменьшении тока до нуля и соответствующем уменьшении абсолютной величины потокоцепления энергия магнитного поля будет вновь возвращаться в электрическую цепь. Величина возвращенной энергии определяется теперь интегралом

$$W_3 = \int_{\Psi=-\Psi; i=-i}^{\Psi=-\Psi_{ост}; i=0} i d\Psi$$

и вычисляется по площади $A'b'B'D'A'$.



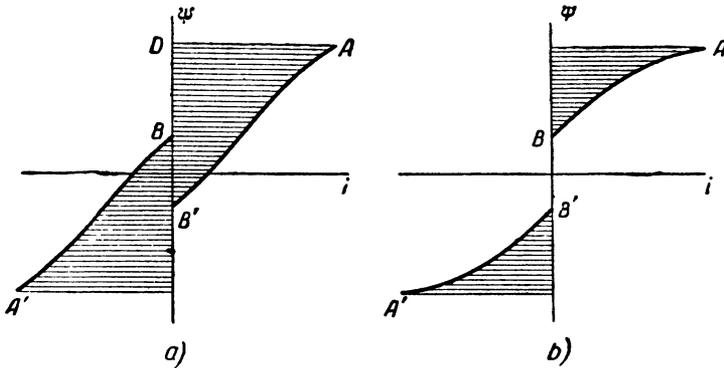
Фиг. 3, 68.

Для того чтобы вновь создать магнитное потокоцепление Ψ , нужно увеличить ток до i и затратить энергию

$$W_4 = \int_{\Psi = -\Psi_{ост}; i=0}^{\Psi = \Psi; i=i} i d\Psi,$$

равную (в прежнем масштабе) площади $B'CcADB'$.

При дальнейших циклических изменениях тока от $+i$ до $-i$, и обратно, и соответствующих изменениях потокоцепления от $+\Psi$ до $-\Psi$, и обратно, явление будет тождественно повторяться и при каждом цикле



Фиг. 3, 69.

(одном полном изменении тока от $+i$ до $-i$, и обратно, до $+i$) из сети будет подводиться энергия

$$W_{подв} = W_2 + W_4$$

(фиг. 3, 69, a) соответствующая площадям $BC'c'A'D'B$ и $DB'CcAD$, а возвращаться обратно в сеть энергия

$$W_{возвр} = W_1 + W_3$$

(фиг. 3, 69 b), соответствующая площадям

$$AbBDA \text{ и } A'D'B'b'A'.$$

Разность энергий $W_{подв} - W_{возвр}$ будет равна работе, расходуемой при одном цикле перемагничивания ферромагнетика или, как говорят, потере энергии.

Нетрудно видеть, что эта потеря энергии выражается (в соответствующем масштабе) площадью, образованной петлей $AbBC'c'A'b'B'CcA$. Величина этой площади для разных ферромагнитных материалов может быть резко различной.

Если кривую намагничивания строить не в осях Ψ и i , а в нормальных осях B и H , мы получим кривую, в точности подобную рассмотренной (так как B пропорционально Ψ , а H пропорционально i). Площадь, ограниченная петлей $B = f(H)$, в соответствующем масштабе характеризует потерю энергии за один цикл, приходящуюся на единицу объема перемагничиваемого материала.

Для подсчета потерь на перемагничивание (знание этих потерь очень важно в аппаратах переменного тока) обычно пользуются эмпирическими формулами Штейнметца или Рихтера (см. гл. 10).

3,32. Подъемная сила магнитов

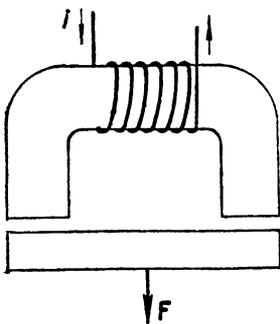
Если мы возьмем катушку, по которой проходит ток (фиг. 3,70), и приблизим к ней кусок железа или другого ферромагнитного материала, он будет втягиваться в катушку, причем тем сильнее, чем больше ток, протекающий через катушку. На этом явлении построено огромное количество приборов и аппаратов: вольт- и амперметров, всевозможных реле и т. д.

Втягивание железа в зону наиболее интенсивного магнитного поля объясняется правилом Максвелла, изложенным нами в § 3,6: контур тока всегда стремится занять такое положение, чтобы проходящий через него магнитный поток был наибольшим.

Теперь мы только расширим несколько эту формулировку: контур тока кроме этого стремится так переместить расположенные в его поле тела, чтобы внутри контура проходил максимальный поток. Этим и объясняется тот факт, что железо втягивается в зону наибольшей напряженности поля. Работа, производимая возникающими при этом механическими силами, и увеличение энергии магнитного поля (с током сцеплен большой поток) происходят за счет энергии источника тока, питающего катушку.

Величина силы, действующей на втягиваемое железо, будет тем больше, чем большее увеличение магнитного потока мы будем получать при малом перемещении железа.

Наибольшее изменение магнитного потока можно получить в том случае, когда катушка надета на железный сердечник, замыкаемый притягиваемым куском железа (фиг. 3,71).



Фиг. 3, 71.

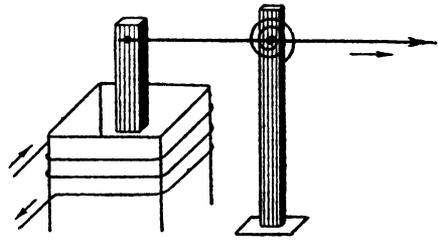
Именно так бывают устроены сильные электромагниты, обладающие громадной подъемной силой, правда, очень быстро убывающей при увеличении воздушного зазора между сердечником электромагнита и так называемым якорем, т. е. замыкающим куском железа.

Для того чтобы получить приближенную формулу для расчета подъемной силы электромагнита, можно воспользоваться следующим выводом.

Будем исходить из того запаса энергии, которым обладает магнитное поле в тот момент, когда сердечник плотно примыкает к отшлифованной поверхности якоря. Можно считать, что эта энергия не изменится (или изменится ничтожно

мало) при отодвигании якоря на малую величину dl , если только предположить, что такое перемещение не вызовет изменения магнитного потока.

Но при таком перемещении объем пространства, занятого магнитным полем, увеличивается на величину Sdl , где S — поверхность обоих концов сердечника. Если в этом пространстве магнитная индукция равна B и,



Фиг. 3, 70.

следовательно, напряженность поля равна $\frac{B}{\mu_0}$ (в зазоре $\mu_r = 1$), то увеличение энергии магнитного поля при отодвигании сердечника на dl будет равно

$$dW = \frac{B^2}{\mu_0} \cdot S dl. \quad (3, 167)$$

Это увеличение энергии можно считать происходящим целиком за счет механической работы, затраченной при отрывании якоря. Но эта работа, очевидно, равна $F dl$, где F — подъемная сила электромагнита, т. е. та сила, которую нужно приложить, чтобы оторвать якорь от сердечника.

Приравниваем механическую работу выражению (3, 167) и получаем

$$\frac{B^2}{\mu_0} S dl = F dl,$$

откуда подъемная сила магнита (выраженная в J/cm), если B выражать в $V \cdot \text{sec/cm}^2$, H — в A/cm и S — в cm^2 ,

$$F = \frac{B^2}{\mu_0} S = \frac{BH}{2} S', \quad (3, 168)$$

или, имея в виду, что BS есть величина магнитного потока, проходящего через воздух,

$$F = \frac{\Phi^2}{\mu_0 2S}. \quad (3, 169)$$

При выводе этой формулы мы не учли двух факторов: 1) изменения потока и связанной с этим работы в питающей цепи и 2) магнитных свойств якоря и сердечника. Последнее особенно существенно, так как при худшем — в отношении проницаемости — сорте железа увеличение магнитной энергии будет меньше.

Действительно, в пределе, если считать μ_r якоря равным единице, замена такого якоря воздухом при образовании зазора не вызовет никакого изменения энергии магнитного поля. Такой якорь, конечно, не будет притягиваться электромагнитом.

Так как подъемная сила зависит от магнитной проницаемости якоря, то по величине этой отрывной силы можно судить о проницаемости железа. На этом основан один из приборов, служащих для измерения магнитной проницаемости ферромагнетиков. Такой прибор носит название отрывного пермеметра.

3.33. Системы единиц измерения, применяемые в электротехнике и в учении об электромагнетизме¹

Первые две системы единиц, принятые в международном масштабе и играющие до сих пор значительную роль, это так называемые абсолютные системы CGS — электрическая и магнитная.

В этих системах в качестве основных единиц приняты: единица длины (cm), единица массы (g) и единица времени (sec). Единицы всех остальных величин, в том числе и всех электромагнитных, рассматриваются в этих системах как производные.

В абсолютной электрической, или электростатической, системе единиц CGSE исходным уравнением для определения единиц электромагнит-

¹ Вопрос о системах единиц излагается в конце главы о магнетизме, так как только теперь в настоящем курсе изложено все необходимое для понимания основ, на которых построены эти системы.

ных величин является выражение закона Кулона, рассматриваемое как уравнение, определяющее собой количество электричества.

Полагая в этом уравнении все коэффициенты пропорциональности равными единице (взаимодействие зарядов в вакууме), имеем

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3, 168)$$

в случае равенства зарядов $q_1 = q_2 = q$ мы легко получаем выражение для заряда

$$q = r \sqrt{f}.$$

Выражая r в см и f — в динах, т. е. в $\text{см} \cdot \text{г} \cdot \text{сек}^{-2}$, мы получаем для заряда q как числовое выражение, так и единицу:

$$[q] = [r] \sqrt{[f]} = \text{см}^{3/2} \text{г}^{1/2} \text{сек}^{-1}.$$

Установив единицу для количества электричества, уже просто определить единицы всех остальных электромагнитных величин, таких, как ток (по выражению $i = \frac{dq}{dt}$), напряжение (по выражению работы, производимой при перенесении заряда $u = \frac{A}{q}$) и т. д.

Все получаемые таким образом единицы будут принадлежать одной системе (см. табл. на стр. 195).

В абсолютной электростатической системе CGSE электрическая проницаемость вакуума рассматривается как отвлеченная величина, численно равная единице. Это непосредственно видно из формы записи закона Кулона ($\epsilon_0 = 1$).

Напротив, магнитная проницаемость вакуума в этой системе не может быть принята равной произвольно выбранному числу. В самом деле возьмем, например, выражение для силы взаимодействия на единицу длины двух параллельных проводов с током i , расположенных на расстоянии a ,

$$f_0 = k \frac{i^2}{a}, \quad (3, 169)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

В этом выражении мы уже имеем установленные единицы и для тока, и для длины, и для силы на единицу длины. Поэтому теперь коэффициент k не может быть выбран произвольно.

В абсолютной электростатической системе принято писать закон Био и Савара в нерационализованной форме:

$$dB = \mu \mu_0 \frac{i [dl r^2]}{r^2}, \quad (3, 170)$$

в соответствии с чем выражение (3, 169) записывается так:

$$f_0 = \mu \mu_0 \frac{2i^2}{a}. \quad (3, 171)$$

¹ В рационализованной форме (см. стр. 121) в знаменателе формулы Био и Савара стоит еще множитель 4π в соответствии с чем выражение (3, 171) записывается так, как мы это писали раньше

$$f_0 = \mu \mu_0 \frac{2i^2}{2\pi a}.$$

Магнитная проницаемость пустоты в абсолютной электростатической системе

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (3, 172)$$

где c — скорость света в вакууме.

Абсолютная магнитная система CGSM построена на том, что в уравнениях, связывающих механические и электромагнитные величины, единицы измерения выбираются так, чтобы магнитная проницаемость вакуума обращалась в единицу:

$$\mu\mu_0 = 1.$$

Тогда, рассматривая взаимодействие токов разделенных вакуумом, мы можем, исходя из уравнения (3, 171), написать, что

$$i = \sqrt{\frac{af_0}{2}}; \quad (3, 173)$$

выражая a в см, f_0 — в динах на 1 см, т. е. в $\text{cm}^0 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}$, мы получаем как числовое выражение, так и единицу тока:

$$[i] = \sqrt{[a][f_0]} = \text{cm}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Установив единицу тока, уже просто определить единицы всех остальных электромагнитных величин, таких, как количество электричества (по выражению $q = \int i dt$), напряжение и т. д.

Все получаемые таким образом единицы будут принадлежать абсолютной магнитной системе CGSM.

В системе CGSM электрическая проницаемость вакуума не равна единице, а равна магнитной проницаемости в системе CGSE

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (3, 174)$$

(здесь, как и раньше, c — скорость света в вакууме).

Необходимость того, чтобы $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ при $\epsilon_0 = 1$ и чтобы $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ при $\mu_0 = 1$ вытекает из того, что скорость распространения электромагнитных волн в вакууме (равная скорости распространения света) выражается уравнением

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (3, 175)$$

(это будет показано на частном примере в гл. 14).

Единицы систем CGSE и CGSM в большинстве неудобны для электротехнической практики. Поэтому наряду с единицами этих абсолютных систем в электротехнике возник целый ряд других „практических“ единиц. Эти практические единицы были приняты в качестве международных, причем было решено определять их по двум независимым эталонам, а именно по ртутному образцу Ома и по серебряному вольтметру, определяющему единицу тока — ампер.

Эти два эталона в свое время были выбраны так, чтобы с возможно большей точностью соответствовать 10^{+9} единиц сопротивления и 10^{-1} единицы тока системы CGSM.

По этим двум эталонам и по единице времени (секунда) могут быть определены все остальные практические единицы напряжения (вольт),

количества электричества (кулон), емкости (фарада), индуктивности (генри) и магнитного потока (вебер = вольт-секунда).

На основании уравнений, выражающих основные определения и законы электромагнетизма:

$$u = iR; \quad q = \int i dt; \quad C = \frac{q}{u}; \quad u = L \frac{di}{dt}; \quad u = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (3, 176)$$

могут быть определены все остальные перечисленные выше единицы.

Совершенно аналогично на основании двух международных практических единиц и единицы времени могут быть определены единицы мощности и энергии международные — ватт и джоуль, хотя бы по уравнениям

$$P = i^2 R \quad \text{и} \quad A = \int i^2 R dt. \quad (3, 177)$$

Вводя еще одну основную (не зависящую от остальных) единицу — единицу длины (см), мы можем определить как производные и единицы всех остальных механических и электрических величин, таких, как сила, напряженность поля и т. д., исходя из уравнений

$$A = \int \mathbf{f} ds, \quad \mathbf{f} = q\mathbf{E} \quad (3, 178)$$

и т. д.

Приняв в качестве единиц длины см, мы получаем в качестве единицы силы J/cm, в качестве единицы напряженности поля V/cm и т. д.

Если бы ом и ампер, положенные в основу международной практической системы, были в точности равны 10^9 и 10^{-1} единиц сопротивления и тока системы CGSM, все остальные единицы международной практической системы составляли бы также точные десятичные, кратные от единиц системы CGSM.

Система, которая при этом получилась бы, носит название абсолютной практической системы.

Соотношение между единицами международной и абсолютной практических систем приведены в нижеследующей таблице:

1 A int. = 0,9999 A abs.	1 H int. = 1,0005 H abs.
1 C int. = 0,9999 C abs.	1 F int. = 0,9995 F abs.
1 Q int. = 1,0005 Q abs.	1 W int. = 1,0003 W abs.
1 V int. = 1,0004 V abs.	1 J int. = 1,0003 J abs.

Международным комитетом мер и весов решено с 1940 г. перейти на абсолютную практическую систему единиц. Как видно из приведенной выше таблицы, различие между единицами двух практических систем крайне невелико, и необходимость различать международные и абсолютные единицы возникает только при самых точных измерениях.

Однако их различие оказывается очень важным с принципиальной точки зрения, так как в абсолютной практической системе уже нельзя определять ни единицу сопротивления по ртутному эталону, ни единицу тока по вольтметру. В этой системе ампер должен быть определен как величина тока, в десять раз меньшая единицы тока системы CGSM, чему соответствует, например, такое определение ампера: ток в 1 А, протекая по двум параллельным бесконечно длинным прямолинейным проводам, линейные размеры сечения которых малы по сравнению с расстоянием

между проводами, должен вызывать силу их взаимодействия (притяжения или отталкивания) в 0,02 дин на 1 см длины при расстоянии между проводами, равном 1 см и при условии, что магнитное поле проводов создается в вакууме (провода расположены в вакууме).

Кроме величины единиц измерения международная система отличается от абсолютных CGSE и CGSM числом основных единиц — в ней основными являются единицы времени (sec), длины (cm или m) и две электрических единицы [Q и A или любая иная пара электрических единиц, определяемых по эталонам ома и ампера в соответствии с уравнениями (3, 176)]. Эта система является во многих отношениях более удобной, чем абсолютные системы CGSE и CGSM. Прежде всего важно то, что в этой системе в формулах производных единиц (или в формулах размерностей) гораздо более наглядно отражаются свойства электромагнитных величин.

Наибольшее распространение из систем международных практических единиц получила система $V \cdot A \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}$, которой в основном и придерживались авторы настоящего курса.

Одним из очевидных недостатков этой системы является наличие в ней двух электрических единиц и отсутствие в качестве основной единицы — единицы массы, обычно принимаемой во всех изложениях курса физики за основную величину, имеющую свою собственную независимую единицу.

Абсолютная практическая система точно так же обычно строится на четырех основных единицах.

Система Джорджи. В настоящее время Международной электротехнической комиссией рекомендована в качестве единой международной системы измерения система Джорджи как одна из форм абсолютной практической системы единиц. В этой системе взяты в качестве основных единиц метр, килограмм (масса), секунда и одна из абсолютных практических единиц электромагнитных величин. Выбор четвертой основной единицы в настоящее время еще не закончен, но по всей видимости в качестве четвертой основной единицы будет принят либо абсолютный ампер, либо единица магнитной проницаемости.

За единицу магнитной проницаемости при этом должна быть принята величина, в $\frac{4\pi}{10^7}$ раз меньшая магнитной проницаемости вакуума, если пользоваться рационализованной системой уравнений (или величина, в $\frac{1}{10^7}$ раз меньшая магнитной проницаемости вакуума, если пользоваться нерационализованной системой).

При этом единицы всех электромагнитных величин в системе Джорджи будут равны единицам абсолютной практической системы, а единицы всех механических величин легко могут быть получены из трех единиц: m, kg, sec.

Рационализация системы уравнений. Значение единиц измерения, а также значения целого ряда физических постоянных зависит от того, какую форму записи придать основным уравнениям, выражающим те или иные законы.

В самом деле, большинство физических законов говорит лишь о пропорциональности одной из величин и какой-либо функции остальных величин, участвующих в рассматриваемом процессе. При этом значение коэффициента пропорциональности зависит от выбора единиц измерения. Точно так же произвольно выбранный коэффициент в той или иной мере определяет единицы измерения или значение физических постоянных, входящих в данное выражение.

Так, закон Кулона, говорящий о пропорциональности силы произведению зарядов и т. д., может быть записан различно, например,

$$f = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2};$$

$$f = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2};$$

$$f = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}.$$

Закон электромагнитной индукции, говорящий о пропорциональности э. д. с. и скорости изменения потока, часто записывают (в так называемой гауссовой или симметричной системе) в отличие от приводившейся ранее записи так:

$$e = -\frac{1}{c} \frac{d\psi}{dt},$$

в качестве коэффициента пропорциональности здесь введена еще скорость распространения света в вакууме ¹.

В настоящее время нет единства в форме записи уравнений электромагнетизма. Наибольшее распространение имеют системы уравнений: 1) рационализованная (в которой и ведется изложение в настоящем курсе), 2) нерационализованная, в ней множитель 4π отсутствует в знаменателях законов Кулона и Био и Савара, но появляется в законе полного тока (который пишется так: $\oint \mathbf{H} ds = 4\pi \sum i$), в выражении плотности энергии поля ($W_0 = \frac{HB}{8\pi}$ и $W_0 = \frac{ED}{8\pi}$ вместо $W_0 = \frac{HB}{2}$ и $W_0 = \frac{ED}{2}$) и, наконец, 3) система Гаусса или симметричная, которой мы здесь не будем касаться подробнее.

ТАБЛИЦА

Отношение между величинами единиц практической (абсолютной) и единицами абсолютных систем CGSE и CGSM

Величина	Практические единицы	Единицы CGSM	Единицы CGSE
Ток	ампер =	10^{-1} [CGSM]	$3 \cdot 10^9$ [CGSE]
Количество электричества	кулон =	10^{-1} „	$3 \cdot 10^9$ „
Сопротивление	ом =	10^9 „	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ „
Напряжение	вольт =	10^8 „	300 „
Емкость	фарада =	10^{-9} „	$9 \cdot 10^{11}$ „ (см)

¹ Смысл введения коэффициента c в это и ряд других уравнений заключается в том, что при этом можно измерять магнитный поток, ток, магнитную индукцию и ряд других величин в единицах CGSM, а напряжение, количество электричества и т. п. в единицах CGSE. При такой записи уравнений и μ_0 и ϵ_0 принимаются равными единице.

Продолжение табл.

Величина	Практические единицы	Единицы CGSM	Единицы CGSE
Индуктивность	генри =	10^9 „ (cm) =	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ „
Магнитный поток	вебер = $V \cdot \text{sec} =$	10^8 „ (Mx) =	$\frac{1}{300}$ „
Магнитная индукция	$\frac{\text{вебер}}{\text{см}^2} = \frac{V \cdot \text{sec}}{\text{см}^2} =$	10^8 „ (Gs) ² =	$\frac{1}{300}$ „
Напряженность магнитного поля	$\frac{A}{\text{cm}} =$	$0,4 \pi$ „ (Oe) ² =	$4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ „

² Строго говоря, в системе CGSM напряженность магнитного поля и магнитная индукция выражаются в одних и тех же единицах.

ТАБЛИЦА

Значения магнитной и электрической проницаемостей вакуума в различных системах единиц и уравнений

В абсолютной практической рационализованной системе	В международной практической рационализованной системе	В системе CGSM	В системе CGSE
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ H/cm}$	$= 1,2560 \cdot 10^{-8} \text{ H/cm}$	$= 1$	$= \frac{1}{c^2}$
$\epsilon_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-9}}{c^2} \text{ F/cm}$	$= 8,860 \cdot 10^{-14} \text{ F/cm}$	$= \frac{1}{c^2}$	$= 1$

ГЛАВА 4

ПРОСТАЯ ЦЕПЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

4.1. Переменный ток

В электротехнике по ряду технико-экономических причин (удобство изменения напряжения, генерирования, простота устройства двигателей) имеет большое распространение не постоянный, а переменный ток.

Переменными называют ток и напряжение, периодически изменяющиеся. На фиг. 4,1 показана кривая изменения переменного тока по времени в некоторой цепи, подключенной к источнику переменного тока. Части кривой, лежащие выше оси абсцисс, соответствуют одному направлению тока, а части, лежащие ниже оси абсцисс —

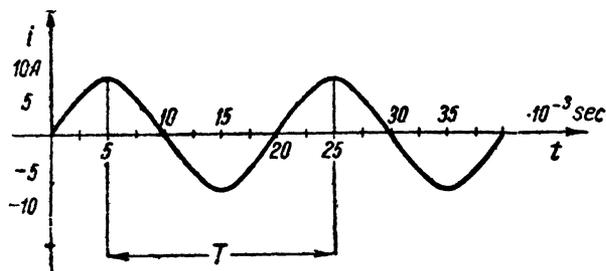
другому обратному направлению тока. Выбор одного направления в качестве положительного, а другого в качестве отрицательного является совершенно условным. Полный круг изменений переменного тока или напряжения называется циклом переменного тока, а время, за которое переменный ток проходит полный цикл, называется периодом (T) тока. На фиг. 4,1 период переменного тока равен 0,02 сек.

Для суждения о скорости периодических изменений тока удобно пользоваться понятием частоты. Число циклов или периодов переменного тока в одну секунду называется частотой (f). Следовательно, частота и период переменного тока связаны простым соотношением

$$f = \frac{1}{T}.$$

Единица частоты герц (Hz) равна одному периоду в секунду.

Для выбора частоты в технике сильных токов решающими явились требования электрического освещения: колебания переменного тока, питающего лампы накаливания, конечно, не должны быть заметны для глаз. Они должны так быстро следовать одно за другим, чтобы нить лампы не успевала заметно остыть за время перехода тока через нуль. Опыт показывает, что для этого нужна частота не ниже 40 Hz¹. С другой сто-



Фиг. 4, 1.

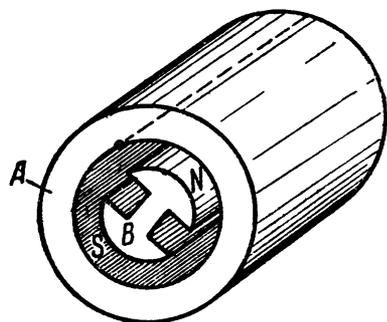
¹ Газосветные лампы не обладают тепловой инерцией, поэтому при освещении газосветными лампами, питаемыми переменным током, все движения кажутся прерывистыми.

роны, значительное повышение частоты вызывает увеличение мешающих влияний э. д. с. индуктивности. Эти соображения определяют границы для технически целесообразной частоты в установках сильного тока. В настоящее время во всех европейских странах в качестве стандартной принята частота 50 Hz, в Америке преимущественное распространение имеет частота 60 Hz.

Радиотехника нуждается в значительно более быстрых изменениях электромагнитного поля, чем техника сильных токов, поэтому на радиостанциях создаются переменные токи с частотой порядка 1 000 000 Hz и выше.

4,2. Получение переменного тока. Понятие об устройстве генераторов переменного тока

Переменный ток создается при помощи электрических машин, называемых генераторами переменного тока, или альтернаторами. Работа генераторов основана на явлении электромагнитной индукции. На фиг. 4,2 дана схема генератора, состоящего из неподвижного железного полого цилиндра *A* (статор), в пазы которого с внутренней стороны заложены проводники, и вращающегося электромагнита *B* (ротор), создающего магнитное поле, линии которого замыкаются через железо ротора и статора и воздушные промежутки между ними.



Фиг. 4,2.

В промежутке между статором и ротором, в так называемом воздушном зазоре, линии магнитного поля практически нормальны к поверхностям железа, вследствие чего при вращении ротора проводники, заложенные в пазах ротора, будут пересекаться магнитными линиями нормально к их направлению. Таким образом окружная скорость v будет равна скорости перерезывания магнитных линий v_N и при постоянной скорости вращения ротора будет оставаться постоянной.

Благодаря этому пересечению магнитными линиями в каждом проводнике статора согласно закону Фарадея-Максвелла (стр. 140) будет наводиться э. д. с. ¹

$$e = Blv_N;$$

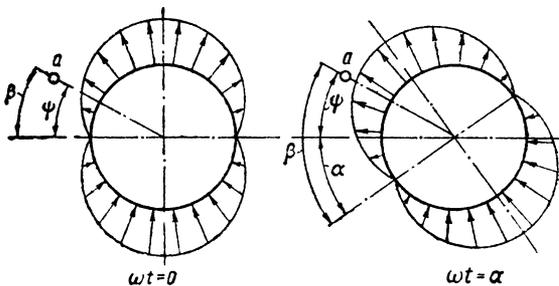
так как в этом выражении переменной величиной является лишь индукция, B то, следовательно, закон изменения по времени э. д. с. статора, или, как говорят, форма кривой э. д. с. определяется распределением магнитной индукции в воздушном зазоре вдоль окружности ротора.

Поэтому на форму кривой э. д. с. генератора можно воздействовать путем соответствующего изменения формы полюсных башмаков ротора или расположения обмотки возбуждения ротора. Но изменения по времени переменных напряжений и тока должны иметь технически целесообразную правильную форму. В кривой переменного напряжения острые пики будут бесполезно подвергать опасности изоляцию установок, неприемлемы и резкие скачки в кривой тока, которые будут порождать большие э. д. с. индуктивности, поэтому переменная э. д. с. должна изменяться

¹ Если индукция B выражена в V sec/cm². Если же индукция будет выражена в гауссах, то в правой стороне формулы следует ввести коэффициент 10^{-8} для того, чтобы e было выражено в вольтах.

во времени плавно, без всяких скачков и лишних колебаний. Поэтому стремятся по возможности всюду иметь дело с синусоидальными напряжениями и токами и от генераторов переменного тока требуют, чтобы их напряжение было синусоидальным.

Если бы удалось добиться такого распределения магнитной индукции в воздушном зазоре, при котором ее величина изменялась бы синусоидально вдоль окружности статора, то э. д. с., наведенная в отдельных проводниках обмотки при вращении такого синусоидального магнитного поля, также имела бы синусоидальный характер. На фиг. 4,3 показана диаграмма радиального синусоидального магнитного поля, построенная таким образом, что на радиусах, составляющих с нейтральной линией электромагнита какой-нибудь угол β , отложены величины магнитной индукции, пропорциональные синусу этого угла, т. е. $B = B_{\max} \sin \beta$, где B_{\max} — магнитная индукция под серединой полюса. При вращении ротора интенсивность поля у какого-нибудь проводника a будет изменяться, закон этого изменения можно выяснить, рассмотрев поворот ротора на какой-нибудь угол. Допустим, что до поворота ротора магнитная индукция у провода a равна $B_{\max} \sin \psi$, после поворота ротора на угол α (фиг. 4,3) магнитная индукция у того же провода определится $B_a = B_{\max} \sin(\alpha + \psi)$.



Фиг. 4,3.

Если ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω , то угол поворота $\alpha = \omega t$, магнитная индукция у провода a будет $B_a = B_{\max} \sin(\omega t + \psi)$, скорость перерезывания магнитных линий $v_N = v = \omega r$ и э. д. с., наведенная в проводе a ,

$$e_a = l r \omega B_{\max} \sin(\omega t + \psi)$$

или

$$e_a = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

В действительности распределение магнитной индукции в воздушном зазоре несколько отличается от синусоидального, поэтому и э. д. с., наводимые в отдельных проводках, также не точно следуют синусоидальному закону. Так как, однако, обмотка генератора состоит не из одного провода, а из целого ряда проводов, распределенных в пазах по окружности статора и соединенных последовательно, то э. д. с., развиваемая генератором, представляет собой сумму э. д. с. отдельных проводов. Эти составляющие э. д. с. для одного и того же момента времени будут различны и будут зависеть от распределения обмотки в пазах статора, поэтому характер изменения суммарной э. д. с. определяется не только распределением магнитного поля в воздушном зазоре, но и указанным распределением обмотки по окружности статора.

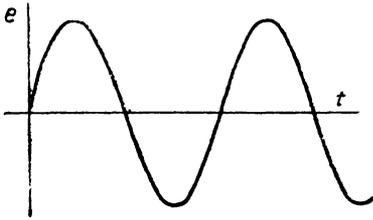
Обмотки современных генераторов выполняются так, что э. д. с. наводимая в них, изменяется почти точно по закону синусоидальной функции времени.

4,3. Синусоидально изменяющиеся величины и их графическое изображение

Величина э. д. с., наводимой в проводе генератора, может быть выражена, как указано, выше, уравнением $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$, выражающим синусоидальный закон изменения э. д. с. во времени. В этом выраже-

нии E_m называется амплитудой, а аргумент синуса, т. е. $\omega t + \psi$, фазой или фазовым углом изменяющейся величины. На фиг. 4,4 приведен график изменения э. д. с. в зависимости от времени. Для построения этого графика, дающего наглядное представление об изменении э. д. с., может быть применен обычный способ построения кривой по точкам: задаваясь различными значениями t , можно подсчитать соответствующие значения e и отложить их по оси ординат, а время или углы — по оси абсцисс.

Очевидно, что в рассмотренном генераторе полный цикл изменения э. д. с. соответствует полному обороту ротора. За время одного периода э. д. с. один раз достигает наибольшего (E_m) и один раз наименьшего значения ($-E_m$) и дважды становится равной нулю.

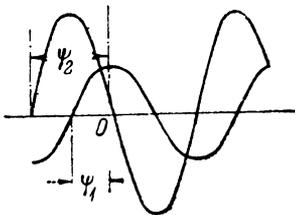


Фиг. 4, 4.

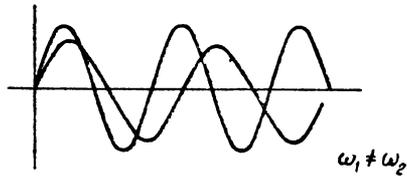
Для определения мгновенного значения э. д. с., т. е. значения э. д. с. в любой данный момент времени, необходимо знать положение провода по отношению к магнитному полюсу в начальный момент отсчета времени. Это положение в рассматриваемом случае (фиг. 4,3) характеризуется углом, определяющим начальное положение ротора относительно провода.

Этот угол ψ , равный аргументу синуса (фазе) в начальный момент отсчета времени, называется начальной фазой.

При исследовании цепей переменного тока бывает необходимо сопоставлять и сравнивать несколько периодически меняющихся величин. Для сравнения каких-либо синусоидальных величин достаточно знать их основные параметры, т. е. амплитуду, начальную фазу и частоту. Если например, две э. д. с. отличаются только своими амплитудами, то отно-



Фиг. 4, 5.



Фиг. 4, 6.

шение их значений в любой момент времени будет постоянно и равно отношению амплитуд, действительно

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{E_{m2} \sin(\omega t + \psi)}{E_{m1} \sin(\omega t + \psi)} = \frac{E_{m2}}{E_{m1}}.$$

Если же переменные величины отличаются, кроме того, начальными фазами (фиг. 4,5), то изменения их будут совершаться таким образом, что одна из величин будет достигать максимума и проходить через нуль раньше или позже другой на вполне определенный промежуток времени, определяющийся разностью начальных фаз данных э. д. с.:

$$\Delta t = \frac{\psi_2}{\omega} - \frac{\psi_1}{\omega} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\omega}.$$

Если начальная фаза второй величины больше первой, т. е. $\psi_2 > \psi_1$, то вторая величина проходит через максимум раньше первой, вторая величина опережает по фазе первую. При этом кривая изменений этой

величины сдвинута относительно другой кривой влево на расстояние, соответствующее в масштабе оси абсцисс промежутку времени

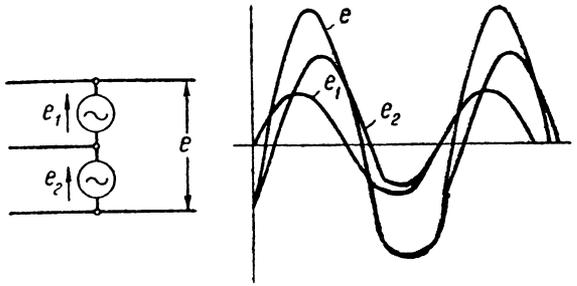
$$\Delta t = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\omega}.$$

Первая э. д. с. в данном случае может быть названа отстающей от второй.

Если переменные величины отличаются и амплитудами, и начальными фазами, и частотой, то уже нельзя установить какого-либо простого соотношения между мгновенными значениями этих величин или последовательностью их изменений (фиг. 4, 6). Однако подавляющее большинство вопросов теории переменных токов связано с такими явлениями, при которых все величины, характеризующие явление, изменяются с одинаковой частотой.

4, 4. Сложение синусоидальных величин

Если необходимо найти сумму нескольких синусоидальных величин одинаковой периодичности, например, результирующую э. д. с. двух последовательно соединенных источников переменного тока (фиг. 4, 7), то эта э. д. с. будет определяться для любого момента алгебраической суммой мгновенных значений э. д. с. e_1 и e_2 . Такое суммирование можно производить графически (фиг. 4, 7), складывая ординаты синусоид e_1 и e_2 , соответствующие отдельным моментам времени. Очевидно, мгновенное значение суммарной э. д. с. будет равно $e = e_1 + e_2$ для любого момента. Кривая, полученная в результате графического сложения, покажет изменения по времени общей э. д. с., развиваемой обоими источниками. Нетрудно доказать, что суммарная э. д. с. будет также изменяться по закону синуса с той же частотой, что и составляющие э. д. с.



Фиг. 4, 7.

Суммарная э. д. с.

$$\begin{aligned} e &= e_1 + e_2 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) = \\ &= E_{m1} (\sin \omega t \cos \psi_1 + \cos \omega t \sin \psi_1) + E_{m2} (\sin \omega t \cos \psi_2 + \cos \omega t \sin \psi_2). \end{aligned}$$

Сгруппировав по отдельности члены, содержащие $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим

$$e = \sin \omega t (E_{m1} \cos \psi_1 + E_{m2} \cos \psi_2) + \cos \omega t (E_{m1} \sin \psi_1 + E_{m2} \sin \psi_2).$$

Выражения в скобках являются постоянными величинами и могут быть представлены так:

$$\begin{aligned} E_{m1} \cos \psi_1 + E_{m2} \cos \psi_2 &= E_m \cos \psi, \\ E_{m1} \sin \psi_1 + E_{m2} \sin \psi_2 &= E_m \sin \psi, \end{aligned}$$

где величины E_m и ψ связаны этими двумя уравнениями и могут быть из них определены.

Заменяя выражение в скобках и вынося вновь за скобки величину E_m , найдем

$$e = E_m (\sin \omega t \cos \psi + \cos \omega t \sin \psi) = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

Таким образом в результате сложения получается синусоидальная величина с той же частотой, но с новыми амплитудой E_m и начальной фазой ψ . Эти величины легко определяются из двух написанных выше уравнений. Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \operatorname{tg} \psi = \frac{E_{m1} \sin \psi_1 + E_{m2} \sin \psi_2}{E_{m1} \cos \psi_1 + E_{m2} \cos \psi_2}.$$

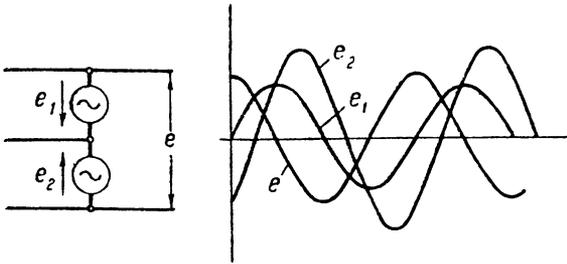
Возводя в квадрат и складывая те же уравнения, получим

$$E_m^2 (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = E_{m1}^2 (\sin^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_1) + E_{m2}^2 (\sin^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_2) + 2E_{m1} E_{m2} (\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2),$$

откуда

$$E_m = \sqrt{E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + 2E_{m1} E_{m2} \cos(\psi_2 - \psi_1)}.$$

Если наши источники соединить так, как это изображено на фиг. 4, 8, то очевидно, что общая э. д. с., развиваемая ими, определится бы алгебраической разностью э. д. с. отдельных источников, т. е. $e = e_1 - e_2$, причем мгновенные значения этой результирующей э. д. с. определяются как разность соответствующих мгновенных значений двух рассматриваемых э. д. с. Результирующая э. д. с. и в этом случае будет изменяться по закону синуса с той же периодичностью, что и e_1 и e_2 (фиг. 4, 8). Это



Фиг. 4, 8.

может быть доказано точно таким же образом, как и в случае сложения синусоидальных величин.

Следует отметить, что стрелки у источников тока на фиг. 4, 7 и 4, 8 отмечают лишь положительное направление их э. д. с. Но эти стрелки отнюдь не указывают направления действия э. д. с. в любой момент времени, так как направление э. д. с. периодически изменяется и бывает то положительным, то отрицательным. Поэтому и в дальнейшем всюду, где встретится необходимость определять суммарное действие нескольких однородных величин, стрелки будут указывать выбранные нами положительные направления их и в зависимости от этих направлений придется или складывать эти величины, если положительные направления совпадают, или вычитать, если они противоположны.

4,5. Изображение синусоидально изменяющихся величин векторами

Уже при сложении и вычитании синусоидально изменяющихся величин невольно возникает мысль о громоздкости построений при графическом решении таких задач и относительной сложности математических преобразований при аналитическом способе.

Значительное упрощение и наглядность могут быть получены при изображении синусоидальных величин векторами; при этом мгновенные значения синусоидальной величины, например, $e = E_m \sin(\omega t + \psi)$ рассматриваются как проекции вектора (фиг. 4, 9) длиной E_m , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг неподвижного начала o , на ось ob , пер-

пендикулярную к произвольно выбранному направлению оси отсчета углов oa . Направление вращения вектора принимается обычно против часовой стрелки. Если в момент начала отсчета времени мгновенное значение э. д. с. равно $E_m \sin \psi$, то вращающийся вектор oE_m в этот момент должен составлять с направлением отсчета углов угол ψ , так как проекция его на ось ob должна быть равна $E_m \sin \psi$.

По истечении промежутка времени t вектор повернется на угол ωt и будет составлять с направлением oa угол $\omega t + \psi$, поэтому проекция вектора на ось bb делается для этого момента равной $E_m \sin(\omega t + \psi) = e$. Таким образом проекция вращающегося вектора определяет мгновенное значение э. д. с. для любого момента времени.

Результат не изменится, если предположить векторы неподвижными, а координатные оси, вращающимися в противоположную сторону.

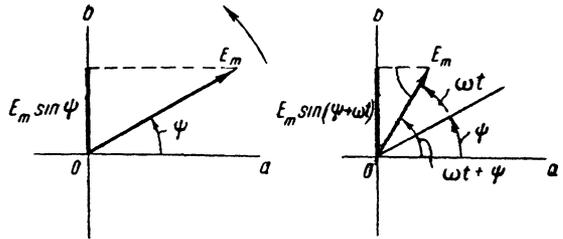
Когда вектор при своем вращении будет проходить третий и четвертый квадранты, то проекции его будут отрицательными, что соответствует изменению направления э. д. с. Когда вектор совершит полный оборот, т. е. повернется на угол 2π , то проекция его, совершив полный цикл изменений, делается равной начальному значению э. д. с.; при дальнейшем вращении процесс будет повторяться. Поворот вектора на угол 2π соответствует одному периоду переменной э. д. с., и время, затраченное на полный оборот вектора, т. е. $\frac{2\pi}{\omega}$, будет равно длительности периода T .

Таким образом

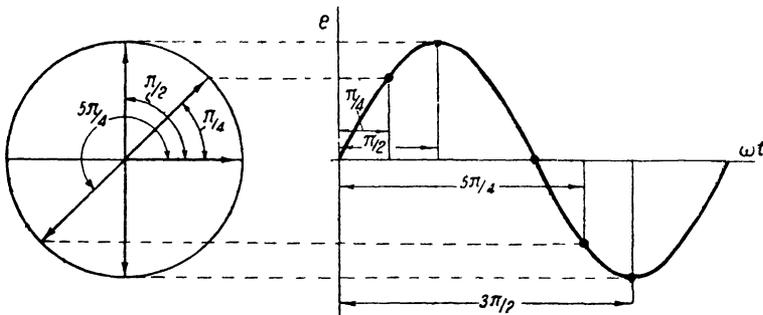
$$\frac{2\pi}{\omega} = T, \text{ или } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Эта величина ω называется круговой, или циклической, частотой.

Очевидно, что все элементы, характеризующие вращающийся вектор, определяют одновременно и переменную э. д. с. Длина вектора соответ-



Фиг. 4, 9.

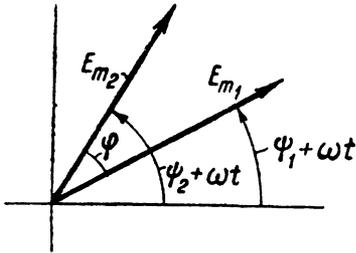


Фиг. 4, 10.

ствует амплитуде, время одного полного оборота определяет период, угловая скорость пропорциональна частоте, а начальный угол ψ соответствует начальной фазе. Часто для определения какого-либо момента времени при рассмотрении синусоидальных величин говорят об угле, определяющем положение вектора (выражающего эту величину) для данного момента. В соотношении с этим при построении диаграммы зависимости какой-либо синусоидальной величины от времени можно по оси абсцисс

откладывать не время t , а соответствующий этому времени угол поворота вектора. При этом построение диаграммы (фиг. 4, 10) удобно вести не путем вычисления отдельных ординат, а чисто графически, снося проекции вектора для различных его положений на перпендикуляры, восстановленные к оси абсцисс в точках, соответствующих углам поворота вектора.

Если необходимо рассматривать две или несколько величин, изменяющихся синусоидально с одинаковой частотой, то эти величины могут быть представлены двумя или несколькими векторами (фиг. 4, 11), вращающимися с одинаковой угловой скоростью, так что относительное расположение векторов остается неизменным и определяется разностью их начальных фаз $\psi_2 - \psi_1 = \varphi$. Так, например, вектор E_{m1} , выражающий синусoidalную величину, в своих периодических колебаниях отстающую по фазе от другой синусoidalной величины, в своем вращении будут отставать от вектора этой второй величины на постоянный угол φ , и наоборот. Можно сказать, что вектор E_{m2} будет опережать вектор E_{m1} на угол φ . Термины „отставать“ и „опережать“ в применении к векторам очень наглядно характеризуют относительное изменение величины.



Фиг. 4, 11.

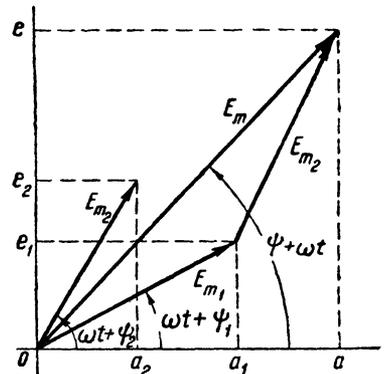
4.6. Сложение векторов

Если требуется определить сумму нескольких синусoidalных величин, то, вместо того чтобы алгебраически складывать мгновенные значения этих величин, можно сложить геометрически векторы, выражающие эти величины; тогда результирующий вектор будет определять своими проекциями мгновенные значения суммы данных синусoidalных величин. Например, даны две синусoidalные величины $e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$ и $e_2 = E_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)$. Векторы, выражающие эти величины, построены на фиг. 4,12 в положении, соответствующем некоторому моменту времени t . Мгновенные значения данных величин, выраженные отрезками oe_1 и oe_2 , при сложении их дадут мгновенное значение искомой суммы в виде отрезка $oe = oe_1 + oe_2 = oe_1 + e_1e$.

Отрезок e_1e должен для любого момента времени t выражать мгновенное значение величины e_2 , чего можно достигнуть, перенеся вектор oe_{m2} параллельно самому себе в положение $E_{m1} E_m$, т. е. приложив его к вектору oe_{m1} . Таким образом проекция геометрической суммы данных векторов определит мгновенное значение искомой суммы данных синусoidalных величин для любого момента времени. Если бы встретилась необходимость вычислить аналитически величину и фазу суммарного вектора, то величина его может быть определена из треугольника $oe_{m1} E_m$, откуда

$$E_m = \sqrt{E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + 2E_{m1}E_{m2} \cos(\psi_2 - \psi_1)}$$

(ср. со стр. 202), а угол, составляемый этим вектором с линией отсчета



Фиг. 4, 12.

углов, oa может быть определен по выражению его тангенса:

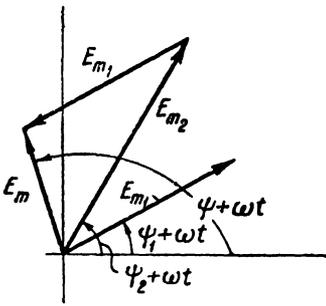
$$\operatorname{tg}(\psi + \omega t) = \frac{aE_m}{oa} = \frac{oe_1 + e_1e}{oa_1 + a_1a} = \frac{E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{m2} \sin(\omega t + \psi_2)}{E_{m1} \cos(\omega t + \psi_1) + E_{m2} \cos(\omega t + \psi_2)}.$$

Начальную фазу искомого вектора можем определить, полагая $t=0$; при этом условии находим

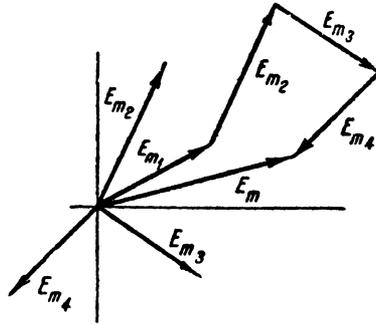
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_{m1} \sin \psi_1 + E_{m2} \sin \psi_2}{E_{m1} \cos \psi_1 + E_{m2} \cos \psi_2}$$

(ср. со стр. 202).

Разность синусоидальных величин, очевидно, может быть выражена геометрической разностью векторов, определяющих данные величины,



Фиг. 4, 13.



Фиг. 4, 14.

для чего уменьшаемый вектор нужно геометрически сложить с вектором, равным по величине и противоположным по направлению вычитаемому вектору (фиг. 4, 13).

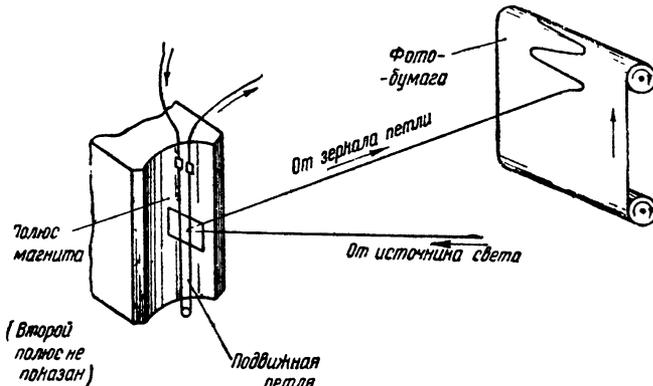
Если требуется сложить не две, а более синусоидальных величин, то, складывая геометрически вектора данных величин (фиг. 4, 14), получим вектор искомой суммы как замыкающую сторону многоугольника, построенного по данным векторам.

4,7. Векторные диаграммы

Следует обратить особое внимание на условность выражения переменных синусоидальных величин векторами. Необходимо помнить, что вращающиеся векторы, с которыми оперируют при рассмотрении явлений в цепях переменного тока, представляют собой лишь математическое средство для изображения переменных во времени величин проекциями этих векторов на неподвижную ось. Эти векторы не являются векторами физическими, указывающими на то, что рассматриваемые физические величины имеют данное направление в пространстве. Они не являются векторами в том смысле слова, как векторы магнитной индукции, плотности тока и т. п. Так, например, если говорят, что вектор э. д. с. E_1 отстает от вектора э. д. с. E_2 на угол 90° , то это значит, что переменная э. д. с., имеющая амплитуду E_{1m} , изменяется так, что все ее последовательные значения наступают на четверть периода $\left(\frac{T}{4}\right)$ позже, чем соответствующие значения другой переменной э. д. с., имеющей амплитуду E_{2m} и отнюдь не значит, что эти две э. д. с. в пространстве направлены под углом одна к другой.

В большинстве случаев в теории переменных токов приходится решать задачи, связанные с определением относительных изменений двух или нескольких величин, иными словами, приходится находить связь или зависимость изменений одной переменной величины от другой; переходя на язык векторных обозначений (векторных диаграмм), можно сказать, что в большинстве случаев приходится определять относительное положение векторов и их величину. Очевидно, что при одинаковой частоте изменений всех величин, т. е. при одинаковой угловой скорости всех векторов, положение их друг относительно друга не зависит от времени, поэтому в большинстве случаев положение всей совокупности нескольких вращающихся векторов (векторной диаграммы) по отношению к осям координат может быть выбрано произвольно. Обыкновенно считается, что все векторы на диаграмме занимают положение, соответствующее моменту $t = 0$.

Кроме того, нужно заметить, что начальная фаза одного из векторов может быть выбрана произвольно, например, этот вектор может быть направлен по оси ординат, тогда все остальные векторы, как бы жестко связанные друг с другом, располагаются относительно этого одного вектора в строгом соответствии с условиями данной цепи переменного тока.



Фиг. 4, 15.

4,8. Осциллограф

Если в цепи действует переменная э. д. с. (или цепь включена на переменное напряжение), то возникающий в цепи ток будет тоже переменным.

Для исследования характера изменений токов и напряжений применяется специальный прибор — осциллограф. Наиболее употребительные осциллографы построены по типу вышеописанного магнито-электрического прибора, у которого подвижная система очень легка и может с достаточной точностью следовать за быстрыми изменениями тока. На фиг. 4, 15 схематически изображен так называемый бифилярный осциллограф; между полюсами достаточно сильного постоянного магнита (или электромагнита) в металлическом цилиндре, заполненном маслом, помещена петля из тонкой проволоки (в этом цилиндре прорезано окно), петля туго натянута роликком и снабжена зеркальцем. Переменный ток, проходящий в петле, взаимодействует с полем постоянного магнита и заставляет зеркальце поворачиваться на угол, пропорциональный мгновенному значению измеряемого тока. Роль масла, заполняющего цилиндр, заключается в том, чтобы исключить возможность свободных колебаний петли после прекращения тока.

Для получения изображения кривой переменного тока на зеркальце (фиг. 4, 15) направлен луч от источника света. Этот луч, отразившись от зеркальца и пройдя через собирательную линзу, падает на движущуюся с равномерной скоростью фотографическую бумагу. При отклонениях зеркальца, пропорциональных току, отраженный луч света будет описывать на бумаге кривую тока.

4.9. Эффективные значения тока и напряжения

Если за один и тот же достаточно длительный промежуток времени в одном и том же сопротивлении переменный и постоянный токи выделяют одинаковые количества тепла, то эти токи эквивалентны в отношении их теплового действия. Величина постоянного тока, эквивалентного переменному, называется эффективным (действующим) значением последнего. Например, если мы говорим, что эффективное значение переменного тока равно 5 А, то это значит, что данный переменный ток, непрерывно изменяясь, дает в среднем такой же тепловой эффект, какой дают 5 А постоянного тока.

Если в цепь переменного тока включить тепловой амперметр, показания которого пропорциональны количеству тепла, выделяемого в единицу времени, то прибор непосредственно покажет эффективное значение переменного тока.

Для выяснения соотношения между эффективным значением и амплитудой достаточно подсчитать количество тепла, выделяемого в приборе при переменном токе и при постоянном за одно и то же время. Так как мгновенные значения переменного тока повторяются в каждом периоде, то подсчет достаточно провести за один период.

Если сопротивление прибора равно R , то количество тепла, выделенного при переменном токе, будет

$$Q = \int_0^T i^2 R dt,$$

а при постоянном

$$Q_2 = I^2 RT.$$

Согласно данному определению эффективного значения

$$Q_1 = Q_2,$$

следовательно, эффективное значение переменного тока будет

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

При синусоидальном токе

$$i = I_m \sin \omega t,$$

следовательно,

$$I = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt},$$

а так как

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2},$$

то, следовательно,

$$I = I_m \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{T} \frac{1}{2\omega} [\sin 2\omega t]_0^T};$$

заменяя $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получим, что второй член под корнем будет

$$\frac{1}{T} \frac{T}{4\pi} \left(\sin \frac{4\pi}{T} \cdot T - \sin \frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) = 0,$$

на основании чего находим окончательно, это эффективное значение синусоидального тока $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. Определяя аналогичным образом понятие эффективного значения переменного напряжения и исходя из выражения закона Джоуля через напряжения $\frac{U^2}{R}$, мы найдем такую же связь эффективного значения с амплитудой

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Существенно отметить, что если бы мы исходили из сравнения не теплового действия постоянного и переменного тока (или напряжения), а из сравнения электродинамического взаимодействия токов или из сравнения взаимного притяжения (под действием сил электрического поля) двух заряженных тел (пластины электростатического вольтметра), мы пришли бы к тем же количественным результатам.

В самом деле, во всех случаях для определения среднего действия нужно было бы сравнивать интегралы от квадратов мгновенных значений постоянного и переменного тока или напряжения. Поэтому не только тепловые, но и электродинамические, электростатические и прочие измерительные приборы всегда показывают эффективные значения.

Ввиду того что эффективные значения синусоидальных тока и напряжения находятся в постоянном отношении к их амплитудам: $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

и $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, можно при построении всякого рода векторных диаграмм считать, что длины соответствующих векторов в одном масштабе выражают амплитуды, а в другом — непосредственно эффективные значения.

Так, как выражение переменных величин через их эффективные значения имеет преимущественное распространение, мы в дальнейшем при векторах будем обозначать только эффективные значения.

Это не может служить препятствием к построению соответствующих синусоид, масштаб которых мы будем просто считать в $\sqrt{2}$ раз больше масштаба векторов.

4,10. Средние значения тока и напряжения

Среднее значение синусоидальной величины за период равно нулю, однако при исследовании кривых тока и напряжения в некоторых случаях бывает необходимо определить среднее значение синусоидально изменяющейся величины за половину периода, в течение которой она имеет один и тот же знак. Так, для синусоидально изменяющейся э. д. с. $e = E_m \sin \omega t$ среднее значение

$$E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_m \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} E_m.$$

В очень многих машинах и аппаратах переменного тока происходит явление электромагнитной индукции, выражаемое известным законом

$$e = -W \frac{d\Phi}{dt}.$$

Для периодически изменяющихся магнитного потока и э. д. с. при расчетах часто удобнее пользоваться не мгновенными значениями, которые переменны, а средними эффективными и амплитудными значениями.

Периодическим изменениям э. д. с. будут соответствовать периодические же изменения магнитного потока, причем моментам перехода э. д. с. через нуль будут соответствовать максимальные или минимальные значения магнитного потока, так как в эти моменты $\frac{d\Phi}{dt}$.

В течение полупериода положительной или отрицательной полуволны э. д. с. магнитный поток сохраняет неизменным направление своего изменения, непрерывно убывая от Φ_{\max} до Φ_{\min} в течение положительного полупериода наводимой э. д. с. и непрерывно возрастая от Φ_{\min} до Φ_{\max} в течение отрицательного полупериода э. д. с. (фиг. 4,16).

Следовательно, среднее значение э. д. с. за полупериода

$$E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(-w \frac{d\Phi}{dt} \right) dt = \frac{2}{T} w \int_{\Phi_{\min}}^{\Phi_{\max}} d\Phi = \frac{2}{T} w (\Phi_{\max} - \Phi_{\min}).$$

Обычно магнитный поток изменяется между равными положительными и отрицательными значениями, т. е. $\Phi_{\min} = -\Phi_{\max}$. Поэтому выражение для E_{cp} примет вид

$$E_{cp} = 4\Phi_{\max} wf. \quad (4, 3)$$

Так как обычно в электротехнических расчетах рассматриваются эффективные значения э. д. с., то последняя формула должна быть соответственно преобразована: среднее значение э. д. с. должно быть выражено через эффективное. Для различных кривых э. д. с.

отношение $\frac{E}{E_{cp}}$ будет различно и характеризует собой форму кривой э. д. с., почему и получило название фактора, т. е. коэффициента формы кривой; обозначив этот коэффициент через k , получим

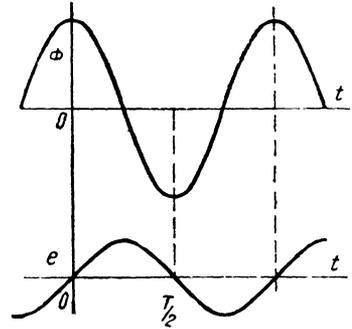
$$E = kE_{cp} = 4kfw\Phi_{\max}.$$

Для синусоидальной кривой э. д. с.

$$k = \frac{E_m}{\sqrt{2}} : \frac{2}{\pi} E_m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11,$$

и следовательно,

$$E = 4,44fw\Phi_{\max}.$$



Фиг. 4, 16.

4,11. Особенности цепи переменного тока

Явления в цепях переменного тока гораздо сложнее, чем в цепях постоянного тока. Объясняется это тем, что при наличии переменных э. д. с. и токов электрическое поле, возникающее в пространстве, окружающем заряженные тела, и магнитное поле, образующееся при движении электрических зарядов, не остаются постоянными, как это было в цепях постоянного тока, а непрерывно изменяются. Следствием изменения этих полей является возникновение в электрической цепи переменных токов, замыкающихся в виде токов смещения через диэлектрики, и наведенных э. д. с., обусловленных изменениями магнитного поля. Еще отчетливее можно представить себе отличительные особенности явлений в цепях переменного тока, если рассматривать эти явления с точки зрения их

энергетического содержания. Если в цепях постоянного тока при установленном режиме электрическое и магнитное поля, равно как и энергия этих полей, оставались неизменными, то в цепях переменного тока различные виды энергии, электрическая и магнитная, постоянно переходят одна в другую, уменьшаются, возвращаясь к источнику, и увеличиваются, вновь поступая из него в цепь. Вот эти-то колебания энергии и обуславливают своеобразие цепей переменного тока. Следует, конечно, учесть и потери энергии, которые, как и при постоянном токе, преимущественно зависят от сопротивлений отдельных элементов и покидают электрическую цепь в виде тепла, выделенного в этих сопротивлениях.

Однако в отдельных частных случаях нет необходимости рассматривать все эти явления, так как некоторые из них могут так слабо сказываться, что практически не будут иметь значения. Так, например, рассматривая схему, состоящую из конденсатора, приключенного к источнику переменного напряжения не очень большой частоты, можно пренебречь влиянием сопротивления подводящих проводов и магнитного поля, образующегося вокруг проводников такой цепи, а также потерями вследствие несовершенства диэлектрика и рассматривать лишь явления, связанные с изменением электрического поля между обкладками конденсатора. Такая схема может иметь место, например, при работе ненагруженного участка кабеля. В других случаях на первый план выступают явления, связанные с изменениями магнитного поля; например, в случае каких-либо многovitковых катушек, обтекаемых переменным током (трансформаторы). Иногда можно не считать за влияющими электрического и магнитного полей, обращая внимание исключительно на сопротивление цепи. Практическим примером подобных условий может служить осветительная нагрузка, когда приложенное напряжение почти полностью затрачивается на преодоление сопротивления нитей ламп накаливания.

В дальнейшем мы рассмотрим законы переменного тока для элементарных цепей, обладающих лишь сопротивлением R или индуктивностью L , или же одной емкостью C , а затем законы для цепей, содержащих эти три элемента в различных комбинациях.

4,12. Цепь переменного тока, содержащая только сопротивление R

Если к цепи, в которой можно не считаться ни с индуктивностью, ни с емкостью между отдельными ее элементами (фиг. 4,17) приложено переменное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, то согласно закону Ома для постоянного тока, которому должны удовлетворять и мгновенные значения переменных величин, мгновенное значение тока в рассматриваемой цепи будет

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t.$$

Постоянная величина $\frac{U_m}{R}$ представляет собой амплитуду тока

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

Таким образом $i = I_m \sin \omega t$, т. е. ток изменяется по закону синуса, как и приложенное напряжение, причем обе эти величины имеют в любой момент одинаковую фазу, и следовательно, одновременно проходят через нуль, достигают максимума, опять проходят через нуль, меняют направление и т. д. В соответствии с этим векторы тока и напряжения в данном случае (фиг. 4,17) совпадают по направлению. Так как эффек-

тивные значения синусоидальных напряжения и тока находятся в определенном одинаковом соотношении со своими амплитудами:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

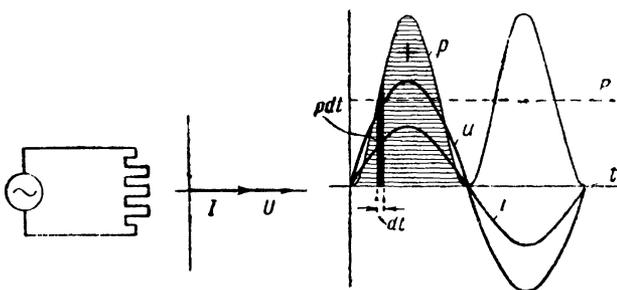
то и отношение измеренных вольтметром и амперметром значений напряжения и тока будет то же равно сопротивлению:

$$\frac{U}{I} = \frac{U_m : \sqrt{2}}{I_m : \sqrt{2}} = R.$$

Таким образом по показаниям приборов в рассматриваемой цепи нельзя даже определить, какой ток проходит через сопротивление, постоянный или переменный.

Работа, совершаемая источником энергии, будет в различные моменты различна. Если за какой-нибудь элементарный промежуток времени dt через сопротивление проходит dq кулонов под действием напряжения u вольт, то работа, совершенная источником энергии за этот промежуток времени, как известно, будет равна $dA = u dq$ джоулей, а мощность, представляющая собой работу в единицу времени, или точнее (в данном случае) производную работы по времени,

$$p = \frac{dA}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui,$$



Фиг. 4. 17.

т. е. мгновенная мощность подобно мощности постоянного тока равна произведению мгновенных значений тока и напряжения. Перемножая соответствующие ординаты кривых u и i (фиг. 4, 17) и откладывая полученные произведения на тех же ординатах в новом произвольно выбранном масштабе, получим кривую зависимости мгновенной мощности от времени. Так как u и i совпадают по фазе и всегда имеют одинаковые знаки, то мощность будет изменяться от нуля до максимума, оставаясь всегда положительной. Закон ее изменения по времени определим, подставив в выражение мгновенной мощности значение величин u и i :

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = U_m I_m \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \\ &= \frac{U_m I_m}{\sqrt{2} \sqrt{2}} (1 - \cos 2\omega t) = UI - UI \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

В соответствии с полученным результатом мгновенную мощность можно рассматривать состоящей из двух частей: одна часть, равная UI , остается постоянной, другая же часть $-UI \cos 2\omega t = UI \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ периодически изменяется по закону синуса с двойной частотой в пределах от $+UI$ до $-UI$. Суммарная величина мгновенной мощности изменяется, таким образом, в пределах от $+2UI$ до нуля. Работа, произведенная за какой-либо бесконечно малый промежуток времени dt , равная $p dt$, изображается на диаграмме фиг. 4, 17 площадью густо заштрихованного элементарного прямоугольника с основанием, равным dt и высотой p . Работа же за конечный промежуток времени, например, за целый период, очевидно,

равна $A_T = \int_0^T p dt$; она изобразится на фигуре 4,17 площадью, ограниченной кривой мгновенной мощности и осью абсцисс. Однако для технических измерений и расчетов непрерывно меняющаяся мгновенная мощность не может служить основной величиной; практику интересует эффект переменного тока — его средняя мощность, которая определяет и силу света ламп накаливания, и мощность двигателей переменного тока, и тепло электрических печей, а на электрической станции механическую мощность, требуемую генератором переменного тока от турбины, эту же среднюю мощность показывает ваттметр переменного тока. Для определения средней мощности, которую принято называть просто мощностью переменного тока (P), достаточно, вычислив работу за один период, отнести ее к длительности этого периода, т. е. найти величину

$$P = \frac{A_T}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

На диаграмме фиг. 4,17 величина средней мощности будет выражаться высотой прямоугольника с основанием, равным T , площадь которого равна площади, ограниченной кривой мгновенной мощности и отрезком оси абсцисс, равным T .

В рассматриваемом случае можно определить среднюю мощность через эффективные значения на основании выше выведенного изображения мгновенной мощности в виде суммы

$$p = UI + UI \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Второе слагаемое, изменяясь синусоидально с двойной частотой в среднем за один период или даже полупериод основной синусоиды, равно нулю; первое же слагаемое — постоянная величина — будет равно средней мощности тока $P = UI$. Энергия, доставляемая источником, расходуется в данном случае только на выделение тепла в сопротивлении R , в чем нетрудно убедиться, обратившись к мгновенным значениям мощности и работы. Заменяя в выражении мгновенной мощности $p = ui$ величину u через iR , получим $p = iR$, т. е. выражение мощности, обращаемой в джоулево тепло.

Обобщая рассмотренные нами явления в цепи переменного тока, содержащей лишь сопротивление R , мы можем отметить следующее:

1. Ток и напряжение в цепи, содержащей только сопротивление R , совпадают по фазе, и поэтому изображающие их векторы совпадают по направлению.

2. Отношение между эффективными значениями напряжения и тока то же, что и между их мгновенными значениями, и равно (закон Ома) сопротивлению:

$$\frac{u}{i} = \frac{U}{I} = R,$$

3. Мгновенная мощность всегда положительна и изменяется в пределах от 0 до $2UI$. Средняя мощность может быть выражена через эффективные значения, так же как мощность постоянного тока

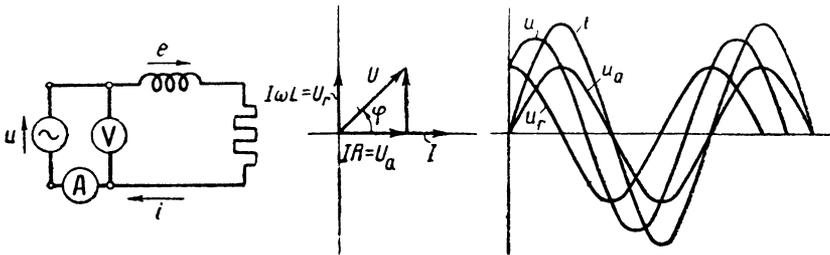
$$P = UI = I^2 R.$$

4.13. Индуктивность и сопротивление в цепи переменного тока

Переменный ток создает переменное магнитное поле, изменения которого наводят в проводниках э. д. с. самоиндукции, противодействующую изменениям тока. При постоянном токе индуктивность проявляет себя лишь в моменты изменения тока, благодаря же непрерывным изменениям переменного тока э. д. с. самоиндукции действует во всех цепях переменного тока, обладающих сколько-нибудь значительным магнитным полем.

Подобно тому как при равномерном движении силы инерции не проявляются, они возникают и неизбежно осложняют работу машины при всяком неравномерном движении.

Конечно, всякий проводник с током охватывается магнитными линиями, но для ряда приемников тока (например, ламп накаливания) относительная роль э. д. с. самоиндукции при медленных изменениях (50 Hz) технического переменного тока настолько незначительна, что его можно пренебречь по сравнению с влиянием сопротивления R , и обратно,



Фиг. 4.18.

на тех участках цепи, где магнитное поле очень сильно (катушки), реакция индуктивности настолько велика, что по сравнению с ней можно пренебречь влиянием сопротивления.

В начале настоящего параграфа мы остановимся на явлениях в цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L . Процесс не изменится, если обе названные величины будут сосредоточены в одном приемнике энергии, т. е. будут как бы переплетаться.

В рассматриваемом контуре фиг. 4.18 одновременно действуют напряжение источника тока u и э. д. с. самоиндукции $e_L = -L \frac{di}{dt}$, поэтому мгновенное значение тока может быть определено согласно закону Ома следующим образом:

$$i = \frac{u + e_L}{R},$$

или

$$u = iR - e_L = iR + L \frac{di}{dt} = u_a + u_r.$$

Таким образом напряжение источника тока u должно, во-первых, покрывать падение напряжения в омическом сопротивлении $u_a = iR$ (активная слагающая напряжения) и, во-вторых, преодолевать наведенную э. д. с. индуктивности

$$u_r = -e_L = -\left(-L \frac{di}{dt}\right) = L \frac{di}{dt}.$$

При синусоидальном токе $i = I_m \sin \omega t$ первая составляющая

$$u_a = Ri = RI \sin \omega t = U_{am} \sin \omega t,$$

а вторая составляющая

$$u_r = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_{rm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Обе составляющие внешнего напряжения изменяются с той же частотой, что и ток, но изменяются при этом разновременно: составляющая u_a совпадает по фазе с током, а u_r опережает фазу тока на четверть периода. На векторной диаграмме фиг. 4,18 обе составляющие должны поэтому быть изображены векторами U_r и U_a , перпендикулярными друг к другу. Амплитуды этих составляющих, выраженные соответствующими отрезками векторов, равны $U_a = IR$ и $U_r = I\omega L$. Общее суммарное напряжение, которое необходимо для поддержания в рассматриваемой цепи тока $i = I_m \sin \omega t$ должно равняться в любой момент алгебраической сумме мгновенных значений отдельных составляющих: $u = u_a + u_r$. Эту величину проще определить, пользуясь векторным изображением переменных составляющих, при этом алгебраическое суммирование мгновенных значений заменяется, как было показано выше, геометрическим сложением векторов, выражающих эти составляющие. В данном случае величина вектора суммарного напряжения определится как гипотенуза прямоугольного треугольника (фиг. 4,18) с катетами $U_a = IR$ и $U_r = I\omega L$, и следовательно

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_r^2} = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Направление этого вектора относительно вектора тока характеризуется углом φ , величину которого можно определить из того же прямоугольного треугольника, вычисляя

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_r}{U_a} = \frac{I\omega L}{IR} = \frac{\omega L}{R},$$

или

$$\cos \varphi = \frac{U_a}{U} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

или, наконец,

$$\sin \varphi = \frac{U_r}{U} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Таким образом отношение максимальных и эффективных значений напряжения и тока (закон Ома для рассматриваемой цепи) имеет следующую форму:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (4,1)$$

причем величина $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ играет формально роль сопротивления цепи. Эта величина больше действительного сопротивления и зависит от частоты приложенного напряжения. Реакция индуктивности подобно сопротивлению вызвала уменьшение тока в цепи. При расчетах цепей переменного тока удобно считать, что отношение эффективных напряжения и тока равно некоторому сопротивлению цепи переменного тока, называемому кажущимся (или полным) сопротивлением ¹ $\frac{U}{I} = z$, в рассматриваемом случае

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (4,2)$$

¹ Величина z также носит название импеданса.

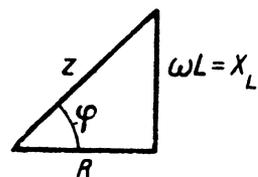
Величина, обратная z , равная отношению эффективного значения тока к эффективному значению напряжения, обозначаемая буквой Y , носит название кажущейся (или полной) проводимости:

$$Y = \frac{1}{z} = \frac{I}{U} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \quad (4,3)$$

Несмотря на то, что по показаниям приборов (вольтметра и амперметра) в цепи можно было бы предположить наличие сопротивления

$$\frac{U}{I} = z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

в действительности цепь обладает лишь сопротивлением R , а кажущееся увеличение сопротивления до значения z объясняется наличием э. д. с. самоиндукции. Реакция индуктивности представлена в кажущемся сопротивлении слагающей ωL , которая имеет размерность сопротивления (омы) и называется реактивным индуктивным сопротивлением¹, её обозначение X_L . Величина R (или R_a) в цепях переменного тока именуется в отличие от X активным сопротивлением, в дальнейшем мы увидим, что в ряде случаев активное сопротивление при переменном токе не равно омическому сопротивлению R при постоянном токе.



Фиг. 4, 19.

Реактивное сопротивление $X_L = \omega L$ пропорционально частоте ($\omega = 2\pi f$) и индуктивности L ; для одной и той же цепи $X_L = \omega L$ не является величиной постоянной, а зависит от частоты приложенного напряжения.

Угол сдвига фаз между векторами тока и напряжения удобно определять, пользуясь так называемым треугольником сопротивлений (фиг. 4,19), получаемым из треугольника напряжений фиг. 4,18. Так как все стороны треугольника напряжений пропорциональны значению тока

$$U_a = IR; \quad U_r = I\omega L \quad \text{и} \quad U = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = Iz,$$

то, разделив их на значение I , получим новый треугольник, подобный первому, со сторонами R , ωL , и $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, при этом угол φ между сторонами R и z определит сдвиг фаз между векторами тока и напряжения. При построении треугольника сопротивлений следует катет $\omega L = X_L$ откладывать по направлению, опережающему направление R на угол 90° , так как только в этом случае угол между z и R будет иметь тот же знак, что и угол между векторами U_m и I_m . Строя треугольник сопротивлений, кажущееся сопротивление цепи z можно определить графически.

Необходимо подчеркнуть, что стороны треугольника сопротивлений безусловно нельзя рассматривать как векторы, вращающиеся с определенной скоростью подобно векторам тока и напряжения, выражающим синусоидально изменяющиеся величины.

Величина и относительное положение вектора приложенного напряжения определяют собой мгновенное значение этого напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \varphi) = U_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right].$$

¹ Величина X_L также носит название реактанца.

Как видим, приложенное напряжение в своих изменениях опережает ток на некоторый промежуток времени $\frac{\varphi}{\omega}$, зависящий от отношения индуктивного сопротивления к активному:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Напряжение опережает ток по фазе на угол φ , это равносильно тому, что ток отстает по фазе на угол φ от приложенного напряжения. Если напряжение задано уравнением

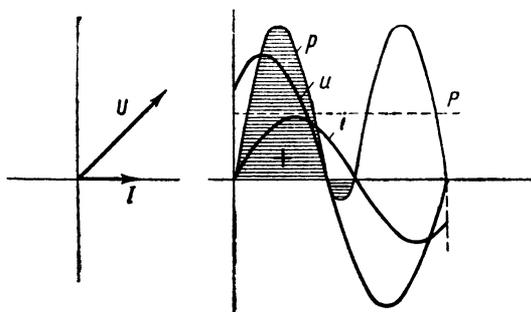
$$u = U_m \sin \omega t,$$

ток определяется как

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t - \varphi).$$

Мгновенная мощность переменного тока в рассматриваемой цепи может быть получена, как и раньше, перемножением мгновенных значений общего напряжения и тока $p = ui$ (фиг. 4,20).

В данном случае промежутки времени, в течение которых u и i имеют одинаковое направление, а следовательно, промежутки времени, в течение



Фиг. 4, 20.

которых мощность положительна, чередуются с промежутками, когда u и i направлены в противоположные стороны и мощность отрицательна. Однако энергия, доставляемая контуру в течение каждого полупериода, все же положительна, так как положительные площадки (над осью абсцисс) больше отрицательных (под этой осью). Этого, конечно, и следовало ожидать, так как энергия, поступающая в цепь, частично рассеивается (вслед-

ствие „джоулевых потерь“ в активном сопротивлении) в окружающей среде в виде тепла.

Чтобы аналитически определить мощность, потребляемую цепью, содержащей L и R , нужно подставить в выражение мощности $p = ui$ значение u и i :

$$\begin{aligned} p &= U_m \sin(\omega t + \varphi) I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = \\ &= U_m I_m \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \varphi - \omega t) - \cos(\omega t + \varphi + \omega t)] = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi + UI \sin\left(2\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)^1. \end{aligned}$$

¹ Для любых двух углов α и β всегда $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
и $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Вычитая из первого тождества второе, найдем

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

или

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

в данном случае

$$\alpha = \omega t + \varphi \quad \text{и} \quad \beta = \omega t.$$

Полученное выражение позволяет рассматривать мгновенную мощность как сумму двух слагаемых, одно из которых постоянно: $UI \cos \varphi$, а другое периодически изменяется по закону синуса (с частотой, в два раза большей частоты тока) в пределах $\pm UI$. Таким образом суммарная мощность изменяется в пределах от $UI(\cos \varphi + 1)$ до $UI(\cos \varphi - 1)$. Второе переменное слагаемое в среднем за любое число целых полупериодов равно нулю, и среднее значение мощности переменного тока определяется, следовательно, только первым (постоянным) слагаемым, т. е. $P_{cp} = P = UI \cos \varphi$, или, заменяя $U = Iz$, а $\cos \varphi = \frac{R}{z}$, получим другое выражение мощности

$$P = I^2 R. \quad (4,4)$$

Это математическое выражение иллюстрирует следующий процесс, совершающийся в рассматриваемой цепи. В катушке, не обладающей активным сопротивлением, поступающая от источника энергия не теряется. Эта энергия в течение той четверти периода, когда ток увеличивается, накапливается в виде энергии магнитного поля, с тем чтобы в следующую четверть периода — во время убывания тока — возвратиться обратно в сеть. Таким образом наличие индуктивности в цепи не связано с расходом энергии, и средняя мощность, затрачиваемая на создание магнитного поля, равна нулю. Поступающая в цепь энергия расходуется лишь на выделение тепла в активном сопротивлении, что и показывает уравнение (4,4).

В соответствии с описанным „разделением“ мощности на мощность, затрачиваемую на джоулевы потери в активном сопротивлении, и на мощность, обуславливаемую колебаниями энергии в магнитном поле индуктивности, мы можем разложить и приложенное напряжение U на составляющие U_a и U_r , каждая из которых и определяет соответствующую мощность:

$$p_a = u_a i = U_{am} I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_{am} I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t);$$

$$p_r = u_r i = U_{rm} I_m \sin \omega t \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_{rm} I_m}{2} \sin 2\omega t.$$

Величины U_a и U_r можно рассматривать как проекции вектора приложенного напряжения на направление вектора тока и перпендикулярное к этому вектору направление, т. е.

$$U_a = IR = U \cos \varphi \quad \text{и} \quad U_r = I\omega L = U_m \sin \varphi$$

(фиг. 4,18). Величина $U \cos \varphi$ называется активной составляющей напряжения, так как эта составляющая обуславливает действительную затрату мощности в цепи:

$$p_a = \frac{U_m I_m \cos \varphi}{2} (1 - \cos 2\omega t) = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t),$$

среднее значение которой $P_a = UI \cos \varphi$.

Величина $U \sin \varphi$ называется реактивной составляющей напряжения, она определяет лишь пульсирующую мощность

$$p_r = \frac{U_m I_m \sin \varphi}{2} \sin 2\omega t = UI \sin \varphi \sin 2\omega t.$$

Энергия, запасаемая в индуктивности под воздействием этой составляющей напряжения, в следующую часть периода возвращается обратно, так что среднее значение мощности p_r равно нулю.

Показания амперметра и вольтметра, включенных в цепь (фиг. 4,18), создают представление о кажущейся затрате мощности $P_i = UI$, в то время как действительная мощность, затрачиваемая в цепи, равна в среднем

$$P = UI \cos \varphi.$$

Тем не менее, в технике переменных токов пользуются выражением UI , называя его кажущейся мощностью, $P_i = UI$. Применение этого понятия вызвано тем, что оно характеризует работу генераторов, приемников электропередаточных устройств, измерительной и вспомогательной аппаратуры с точки зрения тех токов и напряжений, на которые они рассчитаны.

Величина $\cos \varphi = \frac{P_a}{P_i}$ называется коэффициентом мощности.

Таким образом для определения мощности, затрачиваемой в цепи переменного тока, обладающей индуктивностью, необходимо знать три величины: U , I и $\cos \varphi$. В цепи постоянного тока или в цепи переменного тока, в которой ток и напряжение совпадают по фазе, мощность определяется лишь значениями напряжения и тока. Вообще режим работы цепи переменного тока в отличие от цепей постоянного тока характеризуется тремя независимыми (в определенных границах) величинами. Так, например, могут быть заданы I , $\cos \varphi$ и P_a , тогда приложенное к цепи напряжение определится как $U = \frac{P_a}{I \cos \varphi}$; если бы были известны U , I и P_a , то $\cos \varphi = \frac{P_a}{UI}$.

Наличие в цепи пульсирующей мощности, вызываемой изменениями магнитного поля, характеризуется так называемой реактивной мощностью. Эта величина определяется произведением эффективного значения тока на эффективное значение той составляющей внешнего напряжения, которая преодолевает э. д. с. самоиндукции цепи, т. е.

$$P_r = U_r I = UI \sin \varphi.$$

Физически эта величина определяет максимальное значение мощности затрачиваемой на создание магнитного поля.

Средняя мощность цепи $UI \cos \varphi$, учитывающая безвозвратно поглощенную в цепи энергию, в отличие от реактивной называется активной мощностью $P_{cp} = P = UI \cos \varphi = P_a$. Очевидно, что величина активной P_a , реактивной P_r и кажущейся P_i мощностей связаны между собой такими же соотношениями, как и соответствующие составляющие приложенного напряжения U_a , U_r и U , т. е. $P_a = P_i \cos \varphi$; $P_r = P_i \sin \varphi$; $P_a^2 + P_r^2 = P_i^2$; $\frac{P_a}{P_i} = \cos \varphi$, или $\frac{P_r}{P_a} = \operatorname{tg} \varphi$.

Режим работы цепи переменного тока характеризуется, как было сказано выше, тремя независимыми величинами; одна из них обязательно должна быть или U или I , две же другие могут быть любыми из всех остальных I или U , P_a , P_r и $\cos \varphi$, кроме того, вместо одной из трех последних могут быть даны U_a или U_r .

В частном случае, когда сопротивление R ничтожно мало по сравнению с $X_L = \omega L$, активная составляющая напряжения исчезает, и внешнее напряжение целиком тратится на преодоление э. д. с. индуктивности:

$$u = -e_L = -\left(-L \frac{di}{dt}\right) = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом кажущаяся мощность равна реактивной.

На векторной диаграмме фиг. 4,21 внешнее напряжение изображено вектором, равным и противоположным вектору э. д. с. индуктивности, так что вектор напряжения опережает вектор тока на угол $\frac{\pi}{2}$.

В этом случае отношение эффективных значений напряжения и тока будет равно реактивному сопротивлению.

$$\frac{U}{I} = \omega L = X_L. \quad (4,5)$$

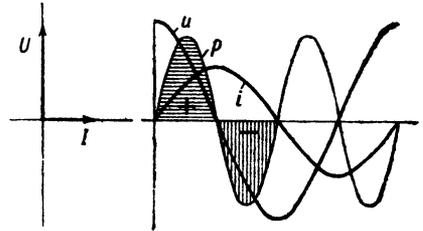
Обратная величина, равная отношению эффективного значения тока к эффективному значению напряжения, носит название реактивной проводимости и обозначается буквой b :

Для чисто индуктивной цепи

$$b_L = \frac{I}{U} = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}.$$

В цепи, обладающей только сопротивлением, проводимость, очевидно, равна $\frac{1}{R}$; в отличие от реактивной проводимости она называется активной и обозначается буквой g :

$$g = \frac{1}{R}.$$



Фиг. 4,21.

Мгновенная мощность переменного тока $p = ui$ в рассматриваемом случае ($R=0$) меняет периодически свой знак, так как напряжение и ток четверть периода совпадают по направлению, а следующую четверть периода имеют противоположные направления (фиг. 4,21). В те промежутки времени, когда их направления совпадают, под действием внешнего напряжения энергия поступает в цепь, мощность положительна, ток растет, и в магнитном поле накапливается энергия, возрастающая от нуля до максимума, равного $\frac{I_m^2 L}{2}$. В течение следующей четверти периода, когда напряжение и ток противоположны по направлению, ток убывает, магнитное поле исчезает, и при посредстве э. д. с. индуктивности энергия возвращается источнику тока. В эту часть периода мощность отрицательна — цепь играет роль источника энергии. Средняя мощность при этом равна нулю, этого и следовало ожидать, так как в рассматриваемом случае цепь не обладает активным сопротивлением и потерь энергии в виде рассеиваемого в окружающую среду тепла не происходит.

Мгновенную мощность можно аналитически выразить, подставляя в ее выражение мгновенные значения тока и напряжения:

$$p = ui = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t,$$

т. е. мгновенная мощность изменяется по синусоиде с двойной частотой; ее максимальное значение равно $\frac{U_m I_m}{2} = UI$.

В рассматриваемом случае цепь обладает лишь реактивной мощностью.

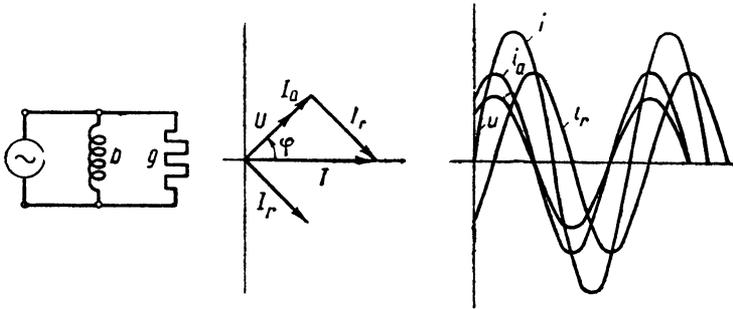
Количественные соотношения между величинами, характеризующими процессы в цепи, содержащей индуктивность и сопротивление, в некоторых случаях, главным образом в случае параллельных цепей, удобно анализировать, раскладывая ток на две составляющие, из которых одна по фазе совпадает с напряжением, ее действующее значение равно

$$I_a = I \cos \varphi = \frac{U \cos \varphi}{z} = U \frac{R}{z^2};$$

другая отстает от напряжения на четверть периода, ее действующее значение равно

$$I_r = I \sin \varphi = \frac{U \sin \varphi}{z} = U \frac{X_L}{z^2}.$$

Такое разложение соответствует замене цепи, изображенной на фиг. 4,18 эквивалентной ей цепью¹ с параллельным соединением двух ветвей (фиг. 4,22), по одной из которых течет ток, совпадающий по фазе с напряжением (эта ветвь, следовательно, обладает одним активным сопротивлением), а по другой течет ток, отстающий от напряжения на четверть периода (эта вторая ветвь содержит чисто индуктивное сопротивление). Эффективные значения токов в параллельных ветвях должны быть про-



Фиг. 4, 22.

порциональны приложенному напряжению и величинам $\frac{R}{z^2}$ и $\frac{X_L}{z^2}$, которые можно рассматривать как активную и реактивную проводимости этих ветвей:

$$g = \frac{R}{z^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{X_L}{z^2}.$$

Изменения тока i_a в ветви, обладающей только активным сопротивлением, совпадают с изменениями приложенного напряжения, поэтому мгновенная мощность, затрачиваемая в этой ветви, всегда положительна:

$$\begin{aligned} p_a = u i_a &= U_m I_{am} \sin^2 \omega t = U_m U_m g \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} g (1 - \cos 2\omega t) = \\ &= U^2 g (1 - \cos 2\omega t) \end{aligned}$$

и будет изменяться в пределах от 0 до $2 U^2 g$. Среднее значение мощности будет равно $P_a = U^2 g = U I_a = U I \cos \varphi$. Поэтому ток $I_a = I \cos \varphi$ называют активной составляющей тока.

Ток i_r отстает от напряжения на четверть периода (векторы сдвинуты на угол 90°), поэтому мгновенная мощность, затрачиваемая во второй ветви, будет чисто реактивной:

$$\begin{aligned} p_r = u i_r &= U_m I_{rm} \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = - U_m U_m b \frac{\sin 2\omega t}{2} = \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} b \sin (2\omega t - \pi) = U^2 b \sin (2\omega t - \pi). \end{aligned}$$

Среднее значение этой мощности равно нулю. В соответствии с этим ток $I_r = I \sin \varphi$ называют реактивной составляющей тока.

¹ Рассматриваемые цепи эквивалентны в том смысле, что при одинаковом значении приложенного напряжения к ним будут подводиться одинаковые токи и по величине и по фазе.

Общая мощность, затрачиваемая во всей цепи, определяется суммой мощностей $p_a + p_r$, и среднее значение этой мощности будет, очевидно, равно $P = UI_a = UI \cos \varphi$; энергия, доставляемая цепи, расходуется лишь на выделение тепла в проводимости $g = \frac{R}{z^2}$.

Если сравнить характер относительных изменений приложенного напряжения, общего тока и суммарной мощности, затрачиваемой в рассматриваемой цепи, со случаем последовательного включения R и L , то можно установить полную тождественность того и другого случая (цепи эквивалентны). В обоих случаях ток отстает по фазе от приложенного напряжения на один и тот же угол φ , как видно из векторных диаграмм. И в том и в другом случае мгновенная мощность состоит из двух слагающих p_a и p_r , изменяющихся так, что величина p_a все время положительна и определяет активную мощность $P = UI \cos \varphi$. Наличие пульсирующей мощности p_r при параллельном соединении, так же как и при последовательном соединении, можно учитывать, пользуясь понятием реактивной мощности $P_r = UI \sin \varphi$.

Различие между этими двумя случаями заключается лишь в том, что в случае последовательного соединения приложенное напряжение U распадается на слагающие $U_a = U \cos \varphi$ и $U_r = U \sin \varphi$ (фиг. 4,18). При параллельном же соединении общий ток разделяется на составляющие $I_a = I \cos \varphi$ и $I_r = I \sin \varphi$ (фиг. 4,22).

При параллельном соединении, так же как и при последовательном, иногда бывает удобно пользоваться графическим методом для определения относительного положения векторов тока и напряжения, для чего применяется так называемый треугольник проводимостей (фиг. 4,23). Ввиду того что токи в отдельных ветвях (фиг. 4,22) I_a и I_r , а равно и суммарный ток I , пропорциональны общему приложенному напряжению U , можно все стороны прямоугольного треугольника (фиг. 4,22) уменьшить в U раз; полученный таким путем новый треугольник будет подобен первому, а его стороны будут изображать проводимости цепи переменного тока. Гипотенуза треугольника проводимостей называется кажущейся или полной проводимостью цепи. Таким образом, зная величины g и b , можно графически определить кажущуюся проводимость y (как гипотенузу прямоугольного треугольника), которая и определит собой как величину, так и направление суммарного тока I . Следует лишь обратить внимание при построении треугольника на то, что реактивная проводимость b должна откладываться в сторону отставания от проводимости g (при описанном выше построении треугольника сопротивлений для последовательного соединения R и L реактивное сопротивление ωL откладывалось в сторону опережения от сопротивления R).

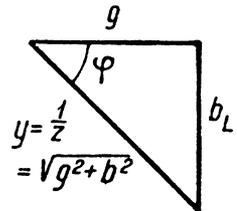
Таким образом рассмотрение индуктивности в цепях переменного тока приводит к следующему:

1. Ток и напряжение отличаются по фазе, причем вектор напряжения опережает вектор тока (или ток отстает от напряжения) на угол φ , определяющийся по $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{b}{g}$.

2. Соотношение между эффективными значениями и амплитудами напряжения и тока выражается аналогично закону Ома

$$\frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = z = \frac{1}{y}.$$

3. Величина $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ называется кажущимся или полным сопротивлением, а $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ — кажущейся проводимостью; здесь g и b —



Фиг. 4, 23.

активная и реактивная проводимости, равные в случае последовательно включенных R и L :

$$g = \frac{R}{z^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{\omega L}{z^2}.$$

(в том случае, когда L и R включены параллельно, $g = \frac{1}{R}$; $b = \frac{1}{\omega L}$, а $y = \sqrt{g^2 + b^2}$).

4. Мгновенная мощность изменяется в пределах от $UI(\cos \varphi + 1)$ до $UI(\cos \varphi - 1)$.

5. Средняя мощность, или активная мощность, $P_{cp} = P = P_a = UI \cos \varphi$ определяет действительную мощность, затрачиваемую в среднем за длительный промежуток времени или за любое целое число полупериодов.

6. Мощность, затрачиваемая на создание магнитного поля, периодически изменяется в пределах $\pm UI \sin \varphi$, а ее среднее значение равно нулю.

7. Эта мощность характеризуется величиной реактивной мощности $P_r = UI \sin \varphi$, которая представляет максимальное мгновенное значение мощности или затрачиваемой на создание магнитного поля или возвращаемой индуктивностью при исчезновении этого поля.

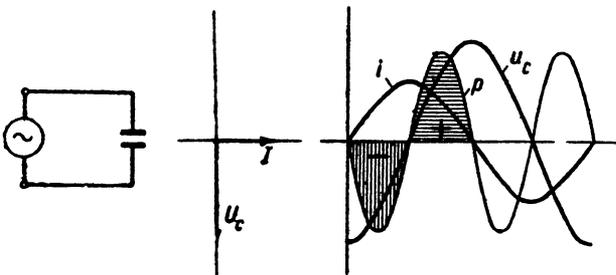
8. Величина $UI = P_i$, характеризующая нагрузки проводников током и изоляции напряжением, называется кажущейся мощностью.

9. Между величинами P_i , P_a и P_r существуют соотношения $P_a = P_i \cos \varphi$ и $P_r = P_i \sin \varphi$ и, как следствие их

$$P_i = \sqrt{P_a^2 + P_r^2}.$$

4, 14. Емкость в цепи переменного тока

Для выяснения характера явлений в цепи, связанных с образованием и изменениями электрического поля, рассмотрим явления в цепи, состоящей из конденсатора емкостью C , приключенного к источнику переменного напряжения (фиг. 4, 24).



Фиг. 4, 24.

Если считать, что сопротивление проводов, диэлектрические потери и влияние магнитного поля незначительны, то приложенное напряжение U будет равно разности потенциалов между обкладками конденсатора

и величина зарядов на обкладках будет равна

$$q = Cu = CU_m \sin \omega t.$$

Вместе с изменением приложенного напряжения изменяется электрическое поле между обкладками конденсатора, изменяется и величина заряда. Изменению напряжения на величину du за промежуток времени dt будет соответствовать изменение заряда на величину dq , причем

$$dq = C du = C d(U_m \sin \omega t) = \omega CU_m \cos \omega t dt.$$

В цепи возникнет ток

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega CU_m \cos \omega t = \omega CU_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом ток будет изменяться во времени по закону синуса с той же частотой, что и приложенное к зажимам конденсатора напряжение. Амплитуда тока будет $I_m = \omega C U_m$, по фазе же ток опережает приложенное напряжение на четверть периода. На фиг. 24 даны кривые мгновенных значений тока и напряжения и векторная диаграмма; при построении векторной диаграммы вектор тока должен опережать вектор напряжения на угол $\frac{\pi}{2}$ (или 90°). Сопоставляя закон изменения тока и напряжения, можно видеть, что нулевым значениям тока соответствуют максимальные (положительные и отрицательные) значения напряжения. Такая связь изменений тока и напряжения объясняется тем, что нулевые значения тока соответствуют тем моментам, когда заряды на обкладках конденсатора достигли максимальных значений (положительных или отрицательных), но при максимальных зарядах на обкладках конденсатора напряжение будет также максимально.

Начало счета времени (начальную фазу) мы можем всегда выбрать так, чтобы ток выражался уравнением $i = I_m \sin \omega t$, тогда для напряжения мы получим выражение

$$u = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

как это видно из выше найденных соотношений между фазами и амплитудами тока и напряжения.

Как было показано выше, между амплитудами напряжения и тока в рассматриваемой цепи имеет место следующее соотношение: $\frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}$; в таком же отношении, очевидно, находятся и их эффективные значения $\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$ и по показаниям вольтметра и амперметра можно было бы заключить, что в цепи имеется некоторое сопротивление $\frac{1}{\omega C}$. В действительности процесс связан с образованием переменного электрического поля, с изменением во времени смещения в диэлектрике и с перезарядками конденсатора, и указанное сопротивление является кажущимся. Тем не менее, удобно пользоваться понятием сопротивления, понимая под этим величину $X_C = \frac{1}{\omega C}$, которая называется реакцией емкости или реактивным емкостным сопротивлением. Величина емкостного сопротивления уменьшается с увеличением частоты перезаряда конденсатора и с увеличением емкости. Это естественно, так как при одном и том же значении напряжения эффективное значение тока при увеличении частоты и емкости будет больше, а реактивное сопротивление X_C — меньше.

Мгновенная мощность переменного тока $p = ui$ в рассматриваемом случае периодически изменяется по величине и по знаку, так как направления напряжения и тока (фиг. 4, 24) четверть периода совпадают, а следующую четверть периода противоположны друг другу. В течение второй четверти периода (фиг. 4, 24) напряжение возрастает от нуля до своего максимального значения, и энергия идет на создание электрического поля в диэлектрике между обкладками конденсатора, энергия конденсатора при этом возрастает от нуля до своего максимума, равного

$$\frac{C U_m^2}{2}$$

и может быть выражена на графике заштрихованной площадью, ограниченной кривой мгновенной мощности и осью абсцисс. В следующую четверть периода конденсатор разряжается, и энергия его возвращается

к источнику напряжения, поэтому средняя мощность за целое число периодов или даже полупериодов будет равна нулю.

Аналитически закон изменения мощности может быть выражен

$$p = ui = U_m \sin \omega t I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t,$$

т. е. мгновенная мощность изменяется по синусоиде с двойной частотой, и максимальное значение ее будет $\frac{U_m I_m}{2} = UI$; средняя мощность за целое число периодов и полупериодов равна нулю. Периодически повторяющийся обмен энергией между генератором и цепью может характеризоваться в данном случае, как и при индуктивности, реактивной мощностью: $P_r = UI$, равной кажущейся мощности (так как $R = 0$).

Таким образом для цепи, состоящей из конденсатора, подключенного к источнику переменного напряжения,

$$u = U_m \sin \omega t.$$

1. Ток и напряжение не совпадают по фазе: ток опережает напряжение (или напряжение отстает от тока) на четверть периода, так что эти величины выражаются на векторной диаграмме векторами, сдвинутыми один относительно другого на угол $\frac{\pi}{2}$ или 90° , причем вектор I опережает вектор U .

2. Соотношение между эффективными или амплитудными значениями напряжения и тока может быть выражено уравнением $\frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = X_C$ аналогичным законом Ома.

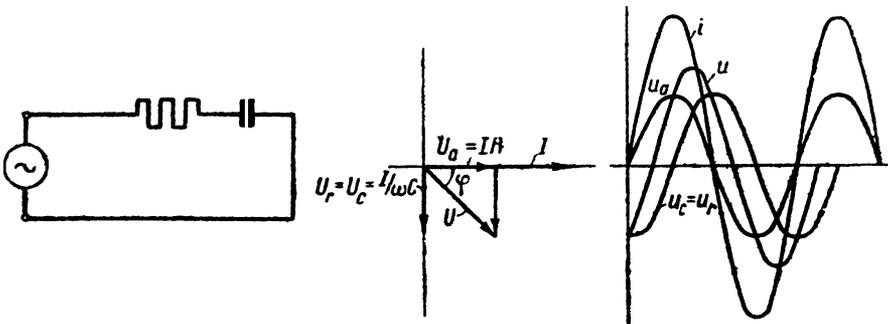
3. Величина $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$ называется реактивным сопротивлением цепи, зависит от частоты приложенного напряжения и от емкости.

4. Мгновенная мощность изменяется в пределах $\pm UI$, и средняя мощность

$$P_{cp} = P_a = 0.$$

4.15. Цепь переменного тока, содержащая емкость и сопротивление, соединенные последовательно

Если сопротивлением подводящих проводов пренебречь нельзя или в цепи имеется какое-либо добавочное активное сопротивление R , то



Фиг. 4, 25а.

рассматриваемая выше цепь превращается в цепь с последовательно соединенными сопротивлением и емкостью. В такой цепи (фиг. 4, 25), замкнутой через ток проводимости (в проводах и в активном сопроти-

влении) и ток смещения (в диэлектрике между обкладками конденсатора), значение тока будет для всех элементов ее одно и то же. Ток $i = I_m \sin \omega t$ в активном сопротивлении цепи будет вызывать падение напряжения $u_a = iR$, и кроме того, на обкладках конденсатора будет поддерживаться напряжение

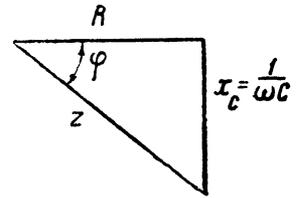
$$u_c = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом внешнее напряжение должно иметь две составляющие: одну в фазе с током, это напряжение на активном сопротивлении $u_a = iR = I_m R \sin \omega t$, и другую, отстающую от тока на $\frac{\pi}{2}$, это напряжение на обкладках конденсатора $u_c = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$. Общее напряжение будет равно сумме этих двух составляющих:

$$u = u_a + u_c = I_m R \sin \omega t + \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

На векторной диаграмме (фиг. 4, 25а) обе слагающие изображаются двумя взаимно перпендикулярными векторами, причем вектор первой слагающей, $U_a = IR$, совпадает по направлению с вектором тока, а вектор второй слагающей, $U_c = IX_c = I \frac{1}{\omega C}$, отстает от вектора тока на угол $\frac{\pi}{2}$ (или 90°).

Общее напряжение, равное в любой момент времени алгебраической сумме двух его составляющих, на векторной диаграмме должно быть изображено вектором геометрической суммы. Это напряжение равно



Фиг. 4, 25б.

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_c^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Направление вектора напряжения относительно вектора тока характеризуется углом φ , величина которого может быть определена из прямоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_c}{U_a} = \frac{I}{\omega C R} = \frac{X_c}{R},$$

или

$$\cos \varphi = \frac{U_a}{U} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{U_c}{U} = \frac{X_c}{\sqrt{R^2 + X_c^2}}.$$

Отношение эффективных значений (или амплитуд) напряжения и тока попрежнему называется кажущимся сопротивлением цепи, как и в случае цепи, содержащей R и L ; оно обозначается буквой z :

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

И для рассматриваемой цепи может быть построен треугольник сопротивлений. Для этого стороны треугольника напряжений (фиг. 4, 25а) следует уменьшить в I раз. В результате получится треугольник (см. фиг. 4, 25б), подобный первому, с катетами R и X_c и гипотенузой $z = \sqrt{R^2 + X_c^2}$, при этом угол φ между сторонами R и z определит сдвиг векторов тока и напряжения. При построении треугольника сопротивлений для рассматриваемой цепи следует иметь в виду, что катет $X_c = \frac{1}{\omega C}$

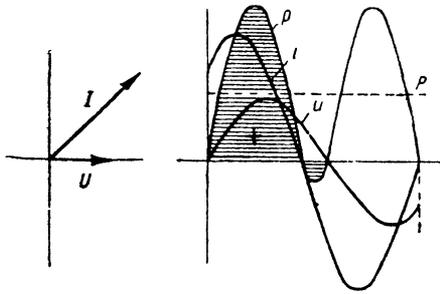
должен быть отложен по направлению, отстающему от направления R на угол 90° .

При построении треугольника сопротивлений реактивное сопротивление X_C откладывается в направлении, прямо противоположном X_L , поэтому естественно одну из этих величин считать отрицательной.

Будем условно считать отрицательной величину реакции емкости. Если учитывать знак реактивного сопротивления, то для всех вычислений и построений можно обобщить рассматриваемый случай последовательного соединения активного сопротивления и емкости с рассмотренным ранее случаем последовательного включения активного сопротивления и индуктивности.

В самом деле в обоих случаях $z = \sqrt{R^2 + X^2}$, кроме того, в обоих случаях можно считать, что ток отстает от напряжения на угол φ , определяемый через $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$ или через $\sin \varphi = \frac{X}{z}$. При этом, однако, в случае емкости $X = -\frac{1}{\omega C}$, и следовательно, угол φ оказывается отрицательным. Отставание же на отрицательный угол равносильно опережению.

Мгновенная мощность в цепи из R и C может быть, как и в ранее рассмотренных случаях, определена произведением мгновенных значений



Фиг. 4, 25с.

тока и напряжения $p = ui$. Кривая мгновенной мощности приведена на фиг. 4, 25с, где промежутки времени, для которых мощность положительна (u и i совпадают по направлению), чередуются с промежутками, для которых она отрицательна (u и i противоположны). В течение первых промежутков времени энергия поступает в цепь, в течение вторых возвращается к источнику напряжения; однако в среднем энергия в течение каждого полупериода положительна, т. е. поступает в цепь, пре-

вращаясь здесь в тепло, благодаря джоулевым потерям в активном сопротивлении.

Если в рассматриваемом случае

$$u = U_m \sin(\omega t - |\varphi|)^1 \quad \text{и} \quad i = I_m \sin \omega t,$$

то мгновенная мощность выразится уравнением

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin(\omega t - |\varphi|) I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(-|\varphi|) - \cos(2\omega t - |\varphi|)] = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - |\varphi|)] = UI \cos \varphi - UI \sin\left(2\omega t - |\varphi| + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом мгновенная мощность состоит из двух величин: одной — постоянной и равной $UI \cos \varphi$ — и другой — изменяющейся по синусоидальному закону с двойной частотой в пределах $\pm UI$; мгновенная мощность изменяется в пределах от $UI(\cos \varphi + 1)$ до $UI(\cos \varphi - 1)$. Так как вторая составляющая мощности, очевидно, в среднем за любое целое число полупериодов равна нулю, то средняя мощность определяется первой составляющей, т. е. $P_{cp} = P_a = UI \cos \varphi$, которая и дает выражение для активной мощности или мощности, поглощаемой в цепи.

¹ В этих выражениях мы оперируем абсолютной величиной угла, которую мы обозначаем $|\varphi|$, для того чтобы более четко подчеркнуть, что ток опережает по фазе напряжение.

Аналогично случаю, разобранным ранее для цепи с индуктивностью, можно и в данном случае ввести понятие реактивной мощности, определяя ее как произведение эффективного значения тока на эффективное значение той составляющей напряжения, которая преодолевает реакцию емкости

$$P_r = U_C I = UI \sin \varphi.$$

Эта мощность определяет максимальное значение мощности, идущей на создание электрического поля между обкладками конденсатора, и как постоянная величина является кажущейся мощностью, доставляемой конденсатору. Пульсация энергии в рассматриваемом случае обусловлена наличием емкости, которая то заряжается, сосредоточивая энергию в своем электрическом поле, то разряжается, отдавая ее; но так как в цепи имеется активное сопротивление, то энергия при разряде конденсатора не возвращается полностью обратно из цепи к источнику напряжения, а частично поглощается в активном сопротивлении.

Если угол φ считать отрицательным для цепи, содержащей R и C , то и реактивная мощность оказывается в этом случае отрицательной (так как синус отрицательного угла, меньшего чем $\frac{\pi}{2}$, отрицателен).

Какой этому может быть придан смысл, будет видно из дальнейшего изложения.

Таким образом для рассмотренной последовательной цепи, состоящей из активного сопротивления и емкости, можно сделать следующие основные выводы:

1. Ток и напряжение не совпадают по фазе, причем ток опережает напряжение (или последнее отстает); напряжение отстает от тока на угол

$$|\varphi| = \arctg \frac{1}{\omega CR}$$

или ток опережает напряжение на угол

$$\varphi = \arctg \frac{-1}{\omega CR}.$$

2. Кажущееся, равное отношению между эффективными значениями напряжения и тока, сопротивление для рассматриваемой цепи будет

$$\frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

3. Мгновенная мощность изменяется в пределах от $UI(\cos \varphi - 1)$ до $UI(\cos \varphi + 1)$.

4. Средняя, или активная, мощность $P_{cp} = P = P_a = UI \cos \varphi$ определяет мощность, затрачиваемую в среднем за длительный промежуток времени или за промежуток времени, равный любому целому числу периодов.

5. Мощность, затрачиваемая на создание электрического поля, периодически изменяется в пределах $\pm UI \sin \varphi$, так что среднее значение ее равно нулю.

6. Периодическое создание электрического поля (заряд и разряд конденсатора) характеризуется величиной реактивной мощности $P_r = UI \sin \varphi$, которая представляет собой максимальное мгновенное значение мощности, затрачиваемой на заряд конденсатора или получаемой при его разряде.

4,16. Параллельное соединение емкости и сопротивления

При параллельном соединении сопротивления R и емкости C (фиг. 4,26) напряжение $u = U_m \sin \omega t$ будет создавать в первой ветви, содержащей только активное сопротивление R , ток i_a , совпадающий по фазе с напряжением:

$$i_a = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_a \sin \omega t;$$

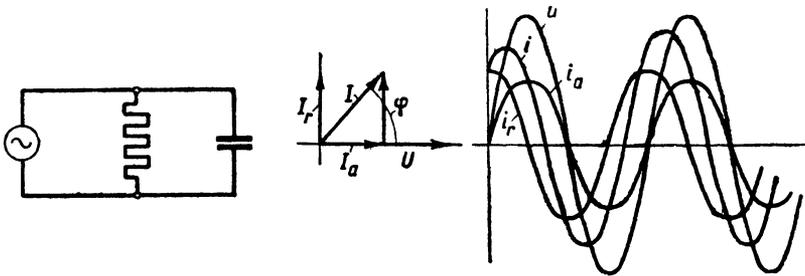
во второй ветви, содержащей емкость C , — ток i_r , опережающий по фазе напряжение на четверть периода:

$$i_r = \omega C U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_{cm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Общий ток, поступающий в цепь от источника, равен сумме двух токов:

$$i = i_a + i_r = \frac{U_m}{R} \sin \omega t + \omega C U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_{am} \sin \omega t + I_{rm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Так как токи i_a и i_r изменяются по закону синуса, то и суммарный ток будет синусоидальным. Эффективное значение суммарного тока I



Фиг. 4, 26.

легко может быть определено на основании векторной диаграммы как геометрическая сумма (фиг. 4, 26) вектора $I_a = \frac{U}{R}$ и вектора $I_c = \omega C U$, опережающего вектор напряжения на угол 90° ; вектор геометрической суммы в данном случае является гипотенузой прямоугольного треугольника:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}.$$

Катеты этого треугольника можно выразить иначе следующим образом:

$$I_a = I \cos \varphi \quad \text{и} \quad I_r = I \sin \varphi;$$

здесь φ — угол, на который фаза тока опережает фазу напряжения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_r}{I_a}; \quad \cos \varphi = \frac{I_a}{I}; \quad \sin \varphi = \frac{I_r}{I}.$$

Соотношение между амплитудными значениями будет такое же, как и между эффективными. Энергия будет поглощаться только в ветви с активным сопротивлением, в которой ток изменяется в фазе с приложенным напряжением, во второй ветви ток опережает по фазе приложенное на-

пряжение, и энергия, поступающая от источника напряжения при заряде конденсатора, возвращается обратно при его разряде.

$$p_a = ui_a = U_m \sin \omega t I_{am} \sin \omega t = U_m I_{am} \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_a}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \\ = UI_a (1 - \cos 2\omega t) = \frac{U^2}{R} (1 - \cos 2\omega t).$$

График мощности для ветви, содержащей только R , был показан на фиг. 4, 17.

Эта мощность положительна и изменяется в пределах от нуля до $\frac{2U^2}{R}$; среднее значение ее будет определять активную мощность $P_a = UI_a = UI \cos \varphi$; так как величина активной мощности при заданном напряжении U определяется составляющей тока $I_a = I \cos \varphi$, эта величина называется активной составляющей тока.

Мгновенная мощность во второй ветви с включенным конденсатором будет изменяться по закону синуса двойной частоты:

$$p_c = ui_r = U_m \sin \omega t I_{cm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m I_{rm}}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ = -UI_r \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = UI_r \sin 2\omega t = U^2 \omega C \sin 2\omega t.$$

График мощности для ветви, содержащей только C , был показан на фиг. 4, 24. Среднее значение мощности p_c за целое число полупериодов равно нулю. Амплитудное значение этой мощности $UI_r = UI \sin \varphi$ называется реактивной мощностью¹. Соответственно величина $I_r = I \sin \varphi$ носит название реактивной составляющей тока.

Исходя из выведенного выше соотношения $I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$, можно определить величину кажущегося сопротивления обеих параллельных ветвей:

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}} = z.$$

Обратная величина кажущегося сопротивления, т. е. $y = \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$, называется кажущейся (полной) проводимостью обеих ветвей.

Так как ток I в рассматриваемом случае распадается на две составляющие: активную $I_a = U \frac{1}{R}$ и реактивную $I_r = U \omega C$, то величину $g = \frac{1}{R}$ можно рассматривать как активную проводимость, а величину $b = \omega C$ как реактивную проводимость.

Уменьшив стороны треугольника токов I , I_a и I_r в U раз, мы получим треугольник проводимостей (фиг. 4, 27). Катетами такого треугольника будут проводимости $g = \frac{1}{R}$ и $b_c = b = \omega C$, а гипотенузой — кажущаяся проводимость

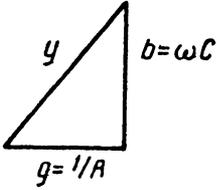
$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}.$$

¹ Эту реактивную мощность можно считать отрицательной, если вновь определять угол φ как угол, на который напряжение опережает ток.

Угол φ определится из того, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}; \quad \cos \varphi = \frac{g}{y} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{y}.$$

Отличие случая параллельного соединения R и C от случая параллельного соединения R и L при определении тока I заключается в том, что для R и C реактивный ток I_r опережает напряжение U , а для R и L реактивный ток I_r отстает от напряжения. В соответствии с этим при построении треугольника проводимостей реактивные проводимости в случае L и R и в случае C и R откладываются в противоположных направлениях (фиг. 4, 23 и 4, 27). Имея это в виду, можно при всех вычислениях и построениях обобщать оба случая, если считать, что проводимости в случае индуктивности и емкости имеют противоположные знаки.



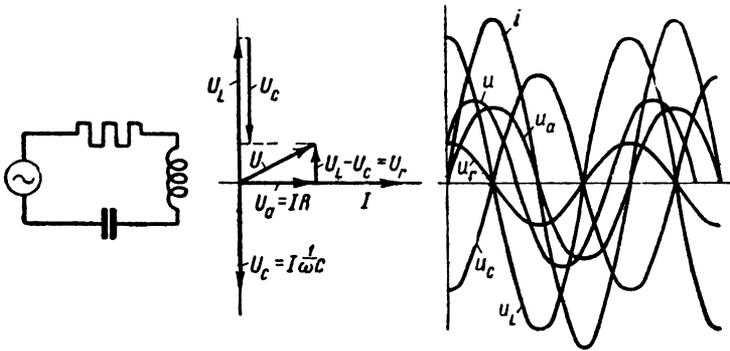
Фиг. 4,27.

4, 17. Последовательное соединение омического сопротивления R , индуктивности L и емкости C . Резонанс напряжений

При прохождении переменного тока по цепи, состоящей из омического сопротивления R , индуктивности L и емкости C (фиг. 4, 28), каждый из составляющих эту цепь элементов будет обуславливать своеобразное явление, присущее именно этому элементу.

Общее приложенное напряжение будет складываться из напряжения на сопротивлении u_a , напряжения на индуктивности u_L и напряжения на емкости u_C .

Связь между мгновенными значениями отдельных слагающих внешнего напряжения и мгновенным значением тока при синусоидальных изме-



Фиг. 4, 28.

нениях последнего $i = I_m \sin \omega t$ была выяснена выше, причем было найдено, что

$$u_a = I_m R \sin \omega t,$$

$$u_L = I_m \omega L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{и} \quad u_C = I_m \frac{1}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

На векторной диаграмме фиг. 4, 28 значения u_a , u_L и u_C изображены соответствующими векторами, там же построены графики мгновенных значений этих величин. Напряжение u_a изменяется в фазе с током, u_L опережает ток, а u_C отстает от него по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Таким образом эти две

последние составляющие общего напряжения в любой момент противоположны друг другу.

Величина общего напряжения определяется как геометрическая сумма векторов напряжений U_a , U_L и U_C . Так как U_L и U_C противоположны друг другу, то вектор суммарного напряжения может быть выражен гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами U_a и $U_L - U_C$. Таким образом

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Попрежнему, называя кажущимся сопротивлением отношение между эффективными значениями напряжения и тока, мы получим, что

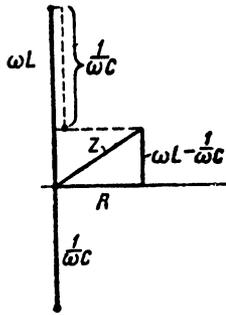
$$z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Фазовый угол, на который вектор тока отстает от вектора напряжения, может быть определен из того же прямоугольного треугольника

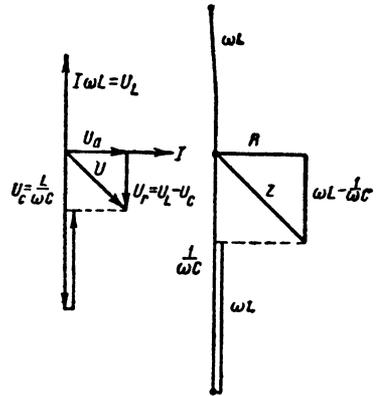
$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Как и в разобранных выше случаях, относительное положение векторов напряжения и тока удобно находить при помощи треугольника сопротивлений (фиг. 4, 29), который можно получить, уменьшив все стороны треугольника напряжений (фиг. 4, 28) в I раз.

Фиг. 4, 28 и 4, 29 выполнены в предположении, что $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, при этом результирующее напряжение, приложенное к этим двум элементам, опережает на четверть периода ток, и катет $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ треугольника сопротивлений совпадает с направлением индуктивного сопротивления. Если уменьшить величину индуктивности L , оставив емкость C неизменной или уменьшить емкость C , не изменяя индуктивности, или, наконец, уменьшить частоту, а значит и величину $\omega = 2\pi f$ так, чтобы величина индуктивного сопротивления стала меньше емкостного



Фиг. 4, 29.



Фиг. 4, 30.

($\omega L < \frac{1}{\omega C}$), треугольник

сопротивлений и относительное расположение векторов тока и напряжения изменятся так, что вектор тока будет опережать вектор напряжения (фиг. 4, 30). В первом случае, когда преобладало индуктивное сопротивление, векторная диаграмма внешнего напряжения и тока соответствовала цепи R, L' , содержащей активное сопротивление R

Если $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, угол φ отрицателен. Отставание тока на отрицательный угол равносильно опережению.

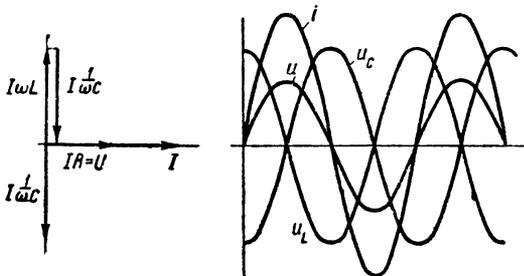
и индуктивное $\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}$; к такой эквивалентной цепи можно применять все выводы, сделанные при рассмотрении цепи R, L . Во втором случае преобладает емкостное сопротивление, и соотношение внешнего напряжения и тока соответствует случаю цепи с последовательно включенными R и C' с емкостным сопротивлением

$$\omega C' = \frac{1}{\omega C} - \omega L.$$

Для данной цепи характерно то, что напряжения между отдельными точками цепи могут оказаться больше приложенного внешнего напряжения; так, например, для цепи фиг. 4, 28, для которой величина омического сопротивления относительно невелика, а величины $X_L = \omega L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C}$ близки друг к другу, напряжения, измеренные на концах индуктивности U_L и емкости U_C , могут быть значительно больше общего напряжения U .

Особенно интересен случай, когда индуктивное и емкостное сопротивления равны друг другу (фиг. 4, 31); тогда в любой момент напряжения индуктивности равно и противоположно напряжению конденсатора, так что обе эти величины полностью компенсируют друг друга. Иначе в таком случае должно быть приложено напряжение, покрывающее лишь

падение напряжения в активном сопротивлении, и следовательно, внешнее напряжение будет совпадать по фазе с током. При этом мы получаем так называемый резонанс напряжений. Условие резонанса напряжений выражается равенством индуктивного и емкостного сопротивлений, т. е.



Фиг. 4, 31.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad \omega^2 LC = 1.$$

Явление резонанса в некоторых случаях представляет опасность, так как напряжения на индуктивности и емкости могут при этом достигнуть таких больших значений, что будут угрожать целостности изоляции отдельных элементов электрической установки.

Мгновенная мощность, доставляемая цепи R, L и C , затрачивается на джоулевы потери в активном сопротивлении, на создание магнитного поля в индуктивности и электрического поля в конденсаторе. Каждая из этих составляющих общей мощности может быть выражена как произведение мгновенного значения тока на мгновенную величину напряжения, приложенного к соответствующему элементу.

Как и для разобранных ранее случаев, мы будем иметь

$$p_a = iu_a = IU \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t);$$

$$p_L = iu_L = IU \sin 2\omega t;$$

$$p_C = iu_C = -IU \sin 2\omega t.$$

Средняя, или активная, мощность, как видно из выражений отдельных мощностей, будет обусловлена лишь активным сопротивлением и будет равна

$$P = P_a = UI \cos \varphi.$$

Мощности P_L и P_C изменяются по закону синуса, поэтому средние значения этих мощностей равны нулю; кроме того, изменения их совер-

шаются так, что когда одна величина положительна, другая отрицательна, т. е. возрастание энергии магнитного поля совпадает с убыванием энергии магнитного поля, и наоборот, так что элементы L и C непрерывно обмениваются энергией. Мощность, получаемая извне этими двумя элементами и возвращающаяся от них обратно к источнику, будет выражаться их алгебраической суммой $p_L + p_C = I(U_L - U_C) \sin 2\omega t$, равной арифметической разности и будет меньше наибольшей из мощностей p_L и p_C . Наличие мощности, получаемой от источника и возвращаемой ему при изменениях магнитного и электрического полей, может быть характеризовано максимальным значением мощности: $p_L + p_C = I(U_L - U_C) \times \sin 2\omega t = IU \sin \varphi \sin 2\omega t$, т. е. величиной

$$IU \sin \varphi = P_r,$$

называемой реактивной мощностью.

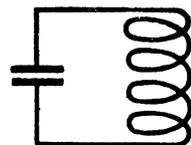
При резонансе напряжений $U_L = U_C$ и сумма мощностей $p_L + p_C$ в любой момент времени будет равна нулю, так что от источника будет поступать лишь мощность, затрачиваемая на выделение тепла в сопротивлении. Реактивная мощность при резонансе равна нулю.

Энергии электрического поля конденсатора и магнитного — индуктивности будут при этом переходить одна в другую так, что обмен энергиями будет происходить помимо внешнего источника.

Явление резонанса получило свое название по аналогии с явлением резонанса в акустике, заключающемся в том, что звуки, производимые вблизи камертона, натянутой струны или какого-либо другого тела, способного звучать, могут вызвать колебания такого тела и заставить его звучать, если период (или частота) производимых звуковых колебаний совпадает с периодом собственных колебаний этого тела. Электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных емкости и индуктивности, так же как и всякая упругая система (в частности, тело, способное звучать), обладает способностью осуществлять колебательный переход энергии из одного вида в другой. В случае упругих колебаний энергия, запасенная в деформированном теле, под действием сил упругости переходит в кинетическую энергию движения частей тела, последняя достигает своего максимума в момент исчезновения сил упругости и в дальнейшем вновь переходит в энергию упругой деформации. При этом новое напряженное состояние упругой системы будет иметь другой знак (т. е. если, например, сначала струна была оттянута в одну сторону, то теперь она вытянется в другую, если сначала ножки камертона были сближены, то теперь они разойдутся, и т. п.).

В дальнейшем явление будет повторяться в обратном порядке, и энергия деформированного тела снова превратится в кинетическую, после чего упругое тело придет в свое начальное напряженное состояние, и т. д.

Совершенно аналогичную картину можно наблюдать в электрической цепи, содержащей L и C (фиг. 4, 32), если сообщить ей какой-либо запас энергии, например, зарядить конденсатор. Присутствие зарядов на конденсаторе вызовет определенную разность потенциалов между его обкладками, вследствие чего заряды начнут перемещаться с одной обкладки на другую, через индуктивность потечет ток; при этом напряжение конденсатора будет уменьшаться. В момент полной компенсации зарядов, когда разность потенциалов делается равной нулю, энергия электрического поля целиком перейдет в энергию движения, т. е. энергию магнитного поля тока; в этот момент ток достигнет своего максимума. В даль-



Фиг. 4, 32

нейшем энергия магнитного поля начнет уменьшаться и вследствие непрерывного уменьшения магнитных сцеплений в индуктивности будет наводиться э. д. с., поддерживающая ток в прежнем направлении, вследствие чего будет перезаряжаться конденсатор. По мере роста напряжения на конденсаторе будет увеличиваться и энергия электрического поля за счет убывания энергии поля магнитного, т. е. уменьшения тока. Наконец, магнитное поле, иссякнет, ток прекратится, и конденсатор окажется заряженным в противоположном направлении до той же разности потенциалов, что и в начале процесса. Затем снова — разряд конденсатора и т. д.

Скорость протекания процесса зависит, как будет объяснено позже, от величин L и C , включенных в нашу схему, при этом связь частоты собственных колебаний с этими величинами выражается так же, как и условие резонанса, т. е. $\omega^2 LC = (2\pi f)^2 LC = 1$. Поэтому периодические изменения внешнего напряжения при резонансе происходят „в такт“ с собственными колебаниями, почему это явление и получило название резонанса. Несмотря на то, что при наличии сопротивления период собственных колебаний цепи будет уже другой и при достаточно большом сопротивлении цепь не сможет даже самостоятельно осуществлять колебательный переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля, так как значительная ее часть будет уходить из цепи в виде тепла, выделяемого в R , все же и в этом случае явление принужденного (поддерживаемого изменениями внешнего напряжения) перехода электрической энергии в магнитную, и наоборот, называется резонансом.

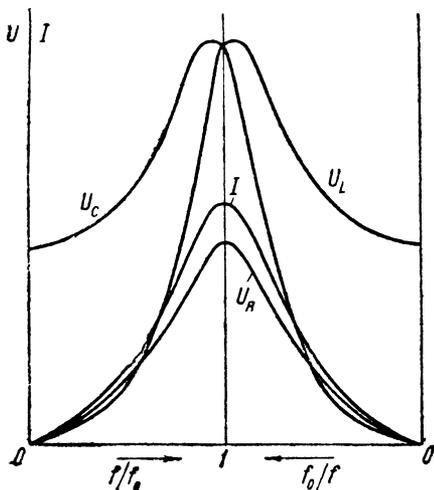
Резонансного состояния можно добиться, изменяя или L , или C , или частоту приложенного напряжения. В качестве примера на фиг. 4, 33 изображена зависимость I , U_C , U_L и U_R от частоты приложенного на-

пряжения (f) для цепи, состоящей из R , L и C , включенных последовательно, как было показано на фиг. 4, 28. По оси абсцисс на фиг. 4, 33 отложены отношения изменяющейся частоты сети (f) к собственной частоте контура (f_0), т. е. $\frac{f}{f_0}$ и обратное отношение $\frac{f_0}{f}$. Как видно из диаграммы, при приближении частоты к резонансной ток и все напряжения повышаются, так что при резонансе частичные напряжения конденсатора и индуктивности могут во много раз превышать приложенное напряжение.

В результате разбора последовательного соединения R , L и C можно прийти к следующим выводам:

1. Ток и приложенное к цепи напряжение в общем случае отличаются по фазе, причем вектор тока может отставать или опережать вектор общего напряжения, в зависимости от того, какое сопротивление преобладает в цепи — индуктивное или емкостное. Угол отставания вектора тока от вектора напряжения будет равен

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$



Фиг. 4, 33.

2. Величина кажущегося сопротивления цепи

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

3. Мгновенная мощность изменяется в пределах от $UI(\cos \varphi + 1)$ до $UI(\cos \varphi - 1)$.

4. Средняя мощность, или активная мощность,

$$P_{cp} = P = P_a = UI \cos \varphi$$

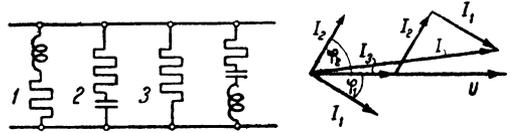
определяет мощность, затрачиваемую в среднем за длительный промежуток времени.

5. Мощности, затрачиваемые и получаемые при изменениях магнитного и электрического полей, изменяются так, что в любой момент они противоположны по своему действию, так что реактивная мощность, получаемая от источника энергии, равна арифметической разности этих мощностей. Эта суммарная пульсирующая мощность изменяется в пределах $\pm IU \sin \varphi$, так что среднее значение ее равно нулю, максимальное же значение определяет реактивную мощность $P_r = IU \sin \varphi$.

6. При равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений, т. е. при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ или $\omega^2 LC = 1$, напряжения на емкости и индуктивности в любой момент равны и противоположны, так что приложенное извне напряжение расходуется лишь на покрытие потери напряжения в активном сопротивлении.

4.18. Общий случай параллельного соединения. Резонанс токов

Рассмотрим теперь случай параллельного соединения нескольких приемников энергии, т. е. параллельное соединение нескольких ветвей, имеющих проводимости (фиг. 4, 34) g_1 и b_1 , g_2 и b_2 , g_3 и b_3 и т. д. На все эти ветви действует одно и то же общее напряжение U . Очевидно, что для узловой точки цепи в каждый данный момент для мгновенных значений может быть применен первый закон Кирхгофа, т. е. $i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots$, где i — ток, поступающий в узел, а i_1 , i_2 , $i_3 \dots$ и т. д. — токи в отдельных ветвях.



Фиг. 4, 34.

Если напряжение изменяется синусоидально, то токи в отдельных ветвях будут тоже синусоидальны, так же по закону синуса будет изменяться и ток i . На векторной диаграмме (фиг. 4, 34) токи отдельных ветвей изобразятся векторами I_1 , I_2 , I_3 и т. д., сдвинутыми относительно вектора приложенного напряжения U на углы φ_1 , φ_2 , φ_3 и т. д., которые определяются из соотношений: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_1}{g_1}$; $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{b_2}{g_2}$; $\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{b_3}{g_3}$ и т. д.

Мы можем условиться, как это было сделано и раньше, считать угол положительным, когда напряжение опережает ток, и отрицательным, когда напряжение отстает от тока. Отрицательному значению угла φ должен соответствовать и отрицательный тангенс, поэтому мы должны считать реактивную проводимость отрицательной в случае индуктивности и положительной в случае емкости. Но мы уже раньше условились считать реактивное сопротивление положительным при наличии индуктивности ($X_L = \omega L$) и отрицательным в случае емкости ($X_C = -\frac{1}{\omega C}$). Для

того чтобы наше новое требование согласовывалось с этим прежним условием, необходимо выражение для реактивной проводимости ветви, содержащей последовательно включенные сопротивления R и X , писать так:

$$b = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (4,6)$$

При этом, как легко убедиться, мы получим требуемый результат: при отрицательном X реактивная проводимость будет положительна, а при положительном X реактивная проводимость будет отрицательна. Что касается активной проводимости ветви, содержащей последовательно включенные X и R , она всегда остается положительной и всегда может быть выражена так:

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (4,7)$$

В тех случаях, когда в одной ветви встречаются L и C , включенные последовательно, реактивное сопротивление X , входящее в формулы (4,6) и (4,7), должно определяться как разность

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Токи отдельных ветвей будут или отставать от приложенного напряжения, если в данной ветви будет преобладать индуктивное сопротивление (b — отрицательно), или опережать внешнее напряжение, если в данной ветви будет преобладать емкостное сопротивление (b — положительно), или совпадать по фазе с напряжением, если данная цепь имеет только активное сопротивление ($b = 0$). Ток I в неразветвленной части цепи может быть определен как геометрическая сумма токов отдельных ветвей: I_1, I_2, I_3 и т. д.

Величина вектора I может быть найдена из геометрического построения или аналитически, если известны проекции векторов отдельных токов I_1, I_2, I_3 и т. д. на две какие-либо взаимно перпендикулярные оси.

Пользуясь разложением токов на активные и реактивные составляющие, которые в векторном представлении изображаются взаимно перпендикулярными векторами, можно определить активную составляющую тока I_a в неразветвленной части цепи как сумму активных составляющих тока в отдельных ветвях и реактивную его составляющую I_r как алгебраическую сумму отдельных реактивных составляющих (токи, отстающие по фазе от напряжения, будут иметь отрицательную реактивную составляющую). Зная приложенное напряжение U и проводимости отдельных ветвей, можно, как известно, провести разложение токов I_1, I_2, I_3 и т. д. по формулам:

$$\begin{array}{ll} I_{1a} = Ug_1; & I_{1r} = Ub_1; \\ I_{2a} = Ug_2; & I_{2r} = Ub_2; \\ I_{3a} = Ug_3; & I_{3r} = Ub_3; \\ \dots & \dots \end{array}$$

$$I_{1a} + I_{2a} + I_{3a} + \dots = U(g_1 + g_2 + g_3 + \dots)$$

и

$$I_{1r} + I_{2r} + I_{3r} + \dots = U(b_1 + b_2 + b_3 + \dots);$$

$$I_a = \sum I_{ka} = U \sum g_k; \quad I_r = \sum I_{kr} = U \sum b_k.$$

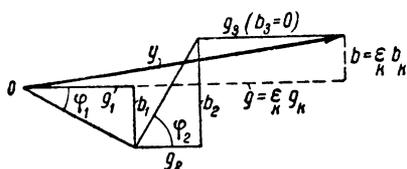
Ток в неразветвленной части цепи будет $I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = U \sqrt{(\sum g)^2 + (\sum b)^2}$. Таким образом при параллельном соединении алге-

¹ Выражение $b = \frac{X}{R^2 + X^2}$, которое было нами выведено в § 13, при этом необходимо рассматривать только как абсолютную величину реактивной проводимости.

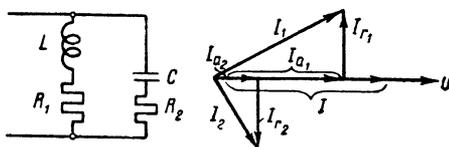
браически складываются активные и реактивные проводимости, и отдельные ветви могут быть заменены одной ветвью, активная и реактивная проводимости которой равны сумме соответствующих проводимостей отдельных ветвей: $g = \sum g_k$ и $b = \sum b_k$; кажущаяся проводимость этой эквивалентной ветки будет

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{(\sum g_k)^2 + (\sum b_k)^2}.$$

Если векторы токов разделить на U , то вместо многоугольника токов, замыкающей стороной которого является вектор тока I , можно получить (фиг. 4, 35) многоугольник проводимостей, подобный первому. Очевидно, что замыкающая сторона многоугольника проводимостей будет равна полной проводимости y всех ветвей. Геометрическая сумма отдельных проводимостей дает таким образом величину полной проводимости;



Фиг. 4, 35.



Фиг. 4, 36.

рассмотренный ранее треугольник проводимостей является частным случаем многоугольника проводимостей.

Направление тока I относительно напряжения U может быть определено из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum b_k}{\sum g_k} = \frac{b}{g};$$

если $\sum b_k < 0$, то $\operatorname{tg} \varphi < 0$, ток отстает от напряжения, и в общей цепи проявляется, главным образом, индуктивность; в противном случае ток опережает напряжение, и в соединении нескольких параллельных ветвей преобладает емкость.

Активная мощность всех параллельных ветвей будет равна

$$P_a = UI \cos \varphi = UI_a = UI_1 \cos \varphi_1 + UI_2 \cos \varphi_2 + \dots = UI_{1a} + UI_{2a} + \dots = U^2 g_1 + U^2 g_2 + \dots = U^2 \sum g_k = U^2 g.$$

Реактивная мощность определяется совершенно аналогично:

$$P_r = UI \sin \varphi = UI_r = UI_1 \sin \varphi_1 + UI_2 \sin \varphi_2 + \dots = UI_{1r} + UI_{2r} + \dots = U^2 b_1 + U^2 b_2 + \dots = U^2 \sum b_k = U^2 b.$$

При последовательном соединении индуктивности и емкости через них протекает одинаковый ток, а их напряжения в любой момент времени направлены противоположно. Когда же емкость и индуктивность включены параллельно и имеют общее напряжение, противоположное направление будут иметь протекающие в них токи.

Общий реактивный ток при этом оказывается равным разности реактивных токов индуктивного и емкостного. При параллельном соединении реактивные токи могут взаимно компенсировать друг друга, подобно тому как при последовательном соединении взаимно компенсируются емкостное и индуктивное напряжения.

Допустим, что мы имеем две параллельные цепи (фиг. 4, 36), в одной из которых имеется активное сопротивление R_1 и индуктивность L ($X_1 = \omega L$), в другой ветви — сопротивление R_2 и емкость C ($X_2 = \frac{-1}{\omega C}$).

Если реактивные проводимости обеих ветвей будут по абсолютной величине одинаковы, мы получим полную компенсацию реактивных токов — ток в неразветвленной части цепи будет совпадать по фазе с приложенным напряжением. При выполнении указанного здесь условия мы получаем так называемый резонанс токов.

Векторная диаграмма фиг. 4, 36 иллюстрирует эти соотношения.

Реактивные проводимости рассматриваемых ветвей соответственно равны:

$$b_1 = \frac{-X_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{-\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}; \quad b_2 = \frac{-X_2}{R_2^2 + X_2^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

При резонансе токов их алгебраическая сумма должна равняться нулю; это условие аналитически может быть выражено (через r_1 , L , r_2 C и ω) так:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

При постоянной частоте это условие, очевидно, может быть выполнено путем соответствующего подбора индуктивности L и емкости C отдельных ветвей.

Если сопротивления R_1 и R_2 незначительны, так что ими можно пренебречь, то условие резонанса токов выражается соотношением $\omega^2 LC = 1$, которому должны удовлетворять при заданной частоте L и C . Это условие то же, что было получено для резонанса напряжений, и как было сказано раньше, указывает на совпадение частоты сети с собственной частотой контура.

Если в наших ветвях L и C постоянны, то цепь может быть приведена к резонансу изменением частоты приложенного напряжения. Эта частота f_0 ($\omega_0 = 2\pi f_0$), при которой получается резонанс токов, называется резонансной частотой и может быть определена из основного условия резонанса

$$\frac{\omega_0 L}{r_1^2 + \omega_0^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{r_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}}$$

путем решения написанного уравнения относительно ω_0 .

Интересно отметить, что когда активные сопротивления в обеих ветвях равны нулю, ток в неразветвленной части цепи при резонансе равен нулю.

Несмотря на то, что общий ток $I = 0$ и что, следовательно, энергия к рассматриваемой цепи не будет подводиться от источника напряжения, в отдельных ветвях будут протекать токи

$$I_1 = \frac{U}{\omega L} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}}.$$

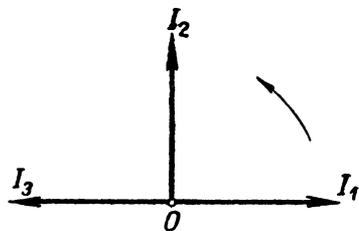
Обмен энергией в данном случае происходит только между параллельными ветвями. Энергия электрического поля в диэлектрике между обкладками конденсатора (равная при полном его заряде $\frac{U_m^2 C}{2}$) переходит постепенно при его разряде в энергию магнитного поля; так как активные сопротивления цепей равны нулю, то этот переход не связан с дополнительными потерями в них, и энергия электрического поля полностью обращается в энергию магнитного поля.

ГЛАВА 5

СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД

5.1. Символическое выражение векторов тока и напряжения в прямоугольной системе координат

В предыдущей главе было показано, каким образом синусоидальные напряжения и токи, являющиеся по существу величинами скалярными, могут быть изображены с помощью вращающихся векторов, расположенных в одной плоскости и как бы жестко скрепленных между собой под определенными углами, соответствующими тому или иному сдвигу фаз. Ценность векторной диаграммы заключается в том, что она дает возможность очень просто изобразить в наглядной форме величину токов или напряжений в различных частях цепи и их относительное отставание или опережение по фазе. Ее ценность заключается также в том, что она позволяет решать графическим путем целый ряд практических задач. Но когда нужно аналитически выразить, что вектор тока на такой-то угол отстает от вектора напряжения или что вектор напряжения является суммой нескольких векторов, сдвинутых между собой по фазе на различные углы, словом, когда надо произвести какие-нибудь подсчеты или аналитические исследования относительно ряда связанных между собой векторов тока или напряжения, тогда для упрощения этих аналитических операций чрезвычайно удобно пользоваться символическим выражением векторов с помощью комплексных чисел.



Фиг. 5, 1.

Представим себе три вектора: I_1 , I_2 и I_3 , одинаковые по величине, но сдвинутые между собой по фазе, так что I_2 опережает I_1 на 90° , а I_3 опережает I_2 также на 90° (фиг. 5, 1). Чтобы отличить абсолютную величину подобного математического вектора от вектора, взятого по величине и направлению, условимся в последнем случае ставить точку над соответствующей буквой¹. Таким образом \dot{I}_2 обозначает вектор, имеющий определенное направление, указанное на векторной диаграмме (фиг. 5, 1) и абсолютную величину I_2 . Равенство трех векторов по абсолютной величине выразится соотношением

$$I_1 = I_2 = I_3.$$

Соотношение же

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

¹ Для физических векторных величин, т. е. величин, имеющих определенное направление в пространстве, как, например, магнитная индукция, напряженность поля, плотность тока и т. д., знаком вектора служит черта над соответствующей буквой или жирный шрифт.

обозначало бы, что три вектора не только равны между собой по величине, но совпадают и по фазе, что в данном случае не имеет места. Вектор \dot{I}_3 имеет противоположную \dot{I}_1 фазу. Мгновенное значение выражаемой им величины в любой момент равно и противоположно мгновенному значению величины выражаемой вектором \dot{I}_1 .

Прибавить к какому-либо вектору вектор \dot{I}_3 все равно, что вычесть вектор \dot{I}_1 . Поэтому соотношение между этими двумя векторами должно быть выражено формулой

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_1.$$

Сложнее задача аналитически определить относительное положение вектора \dot{I}_2 , который направлен перпендикулярно \dot{I}_1 . Этот вектор не равен ни $+\dot{I}_1$, ни $-\dot{I}_1$. Чтобы связать его аналитически с вектором \dot{I}_1 , введем условный „оператор“ j , умножение на который поворачивало бы вектор на 90° вперед (против часовой стрелки), не изменяя его абсолютной величины. Тогда

$$\dot{I}_2 = j\dot{I}_1.$$

Точно так же

$$\dot{I}_3 = j\dot{I}_2 = jj\dot{I}_1 = j^2\dot{I}_1.$$

Но так как

$$\dot{I}_3 = -\dot{I}_1,$$

то

$$j^2\dot{I}_1 = -\dot{I}_1, \text{ или } j^2 = -1,$$

откуда

$$j = \pm\sqrt{-1},$$

т. е. условный множитель, поворачивающий вектор на 90° , оказывается ничем иным, как мнимой единицей.

Остается выяснить смысл двойного знака мнимой единицы. Возьмем для этого вектор \dot{I}_4 , равный и противоположный \dot{I}_2 (на фиг. 5,1 не показан). Очевидно

$$\dot{I}_4 = -\dot{I}_2 = -j\dot{I}_1.$$

Этот вектор может быть получен путем поворота \dot{I}_1 на 90° назад (по часовой стрелке). Следовательно, если мы условно примем, что умножение на положительную мнимую единицу будет обозначать поворот вектора на 90° в положительную сторону (вперед), то умножение на отрицательную мнимую единицу будет обозначать такой же поворот в отрицательную сторону (назад). В дальнейшем под обозначением j мы будем понимать положительную мнимую единицу, выражая поворот в отрицательную сторону умножением на $-j$.

Деление любого вектора на j и на $-j$ поворачивает его на 90° в обратную сторону по сравнению с умножением. В самом деле,

$$\frac{\dot{I}}{j} = \frac{j}{j} \cdot \frac{\dot{I}}{j} = \frac{j\dot{I}}{-1} = -j\dot{I},$$

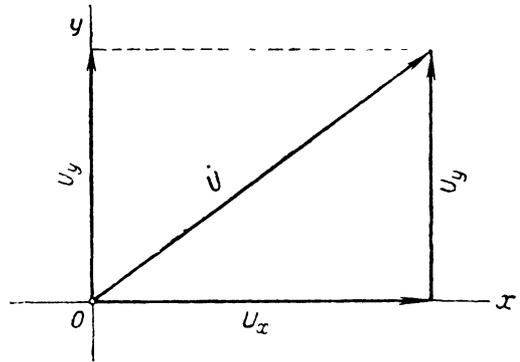
а

$$\frac{\dot{I}}{-j} = \frac{j}{j} \cdot \frac{\dot{I}}{-j} = \frac{j\dot{I}}{+1} = j\dot{I},$$

т. е. деление вектора на j равносильно умножению на $-j$, а деление на $-j$ равносильно умножению на j .

Но множитель j может служить не только для выражения поворота вектора на 90° в ту или другую сторону. С помощью этого оператора можно в простой форме аналитически выразить величину и положение любого из заданных векторов. Для этого необходимо отнести все связанные между собой векторы к осям прямоугольной системы координат, которые могут быть выбраны совершенно произвольно. (Удобно направлять ось абсцисс по одному из данных векторов. Это упрощает дальнейшие вычисления.)

Вектор, имеющий любое направление, будет вполне определен, если даны координаты его конца относительно этих осей, т. е. если известны проекции этого вектора на ту и другую ось. Пусть



Фиг. 5, 2.

вектор \dot{U} (фиг. 5, 2) имеет проекции: $U_x = U'$ и $U_y = U''$. Можно рассматривать этот вектор как сумму двух векторов, один из которых (\dot{U}_x) направлен по оси абсцисс, а другой (\dot{U}_y) — по оси ординат. Следовательно,

$$\dot{U} = \dot{U}_x + \dot{U}_y. \tag{5, 1}$$

Если далее условиться векторы, параллельные оси абсцисс, обозначать лишь абсолютной величиной их и знаками $+$ или $-$, а векторы, параллельные оси ординат, как перпендикулярные первым, — абсолютной величиной и знаком $+j$ или $-j$, то для вышеуказанных составляющих получим следующие выражения:

$$\dot{U}_x = U'$$

и

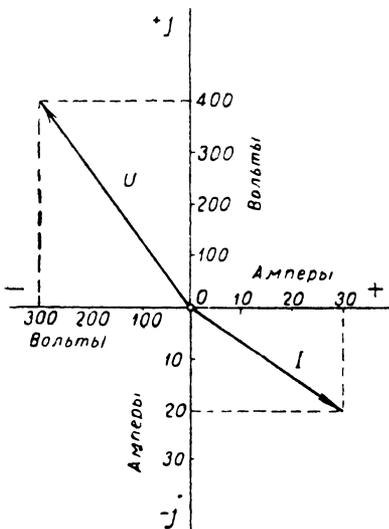
$$\dot{U}_y = jU''.$$

Если подставить эти выражения \dot{U}_x и \dot{U}_y в формулу (5, 1), то вектор \dot{U} изобразится комплексным числом

$$\dot{U} = U' + jU'', \tag{5, 2}$$

действительная часть которого представляет собой проекцию вектора на ось абсцисс (действительная ось), а мнимая часть — проекцию вектора на ось ординат (мнимая ось).

Если вектор расположен не в первой четверти, то U' или U'' или оба вместе оказываются отрицательными, т. е. совпадающими с отрицательным направлением соответствующей оси.



Фиг. 5, 3.

Пример 5.1. Построить вектор $\dot{U} = -300 + j 400$ вольт.

Откладываем (фиг. 5,3) по действительной оси влево ($-$) 300 V и по мнимой оси вверх ($+$) 400 V и по этим двум проекциям строим вектор \dot{U} , который оказывается во второй четверти.

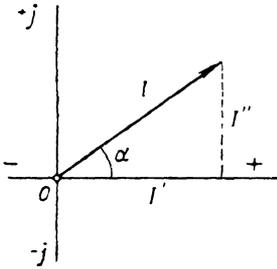
Пример 5.2. Выразить комплексным числом вектор \dot{I} (фиг. 5, 3).

Из диаграммы находим: $I' = 30\text{ A}$, $I'' = -20\text{ A}$. Поэтому

$$\dot{I} = 30 - j 20 \text{ ампер.}$$

5.2. Символическое изображение векторов тока и напряжения в полярной системе координат

Вектор может быть задан не только прямоугольными, но и полярными координатами своего конца, т. е. своей абсолютной величиной и величиной угла, образуемого вектором с положительным направлением действительной оси, являющейся в этом случае начальной осью полярной системы координат. Пусть, например, вектор тока \dot{I} образует угол α с положительным направлением действительной оси (фиг. 5, 4). Как видно из чертежа, проекции вектора \dot{I} на действительную (I') и мнимую (I'') ось выразятся через данные величины следующим образом:



Фиг. 5, 4.

$$\left. \begin{aligned} I' &= I \cos \alpha, \\ I'' &= I \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5, 3)$$

Комплексное выражение вектора \dot{I} поэтому примет вид

$$\dot{I} = I' + jI'' = I \cos \alpha + jI \sin \alpha = I (\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

Но по формуле Эйлера

$$\cos \alpha \pm j \sin \alpha = e^{\pm j\alpha},$$

где e — основание натуральных логарифмов, поэтому

$$\dot{I} = I e^{j\alpha}. \quad (5, 4)$$

Это — так называемая показательная форма, которую получает символическое выражение вектора в полярной системе координат. Эта форма особенно удобна тем, что она в явном виде содержит абсолютную величину вектора и его направление, т. е. как раз то, что обычно является целью практических подсчетов. Как будет показано ниже, комплексная форма имеет преимущество при аналитическом сложении и вычитании векторов, тогда как умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня удобнее проводить с векторами, выраженными в показательной форме.

Иногда для показательной формы символического выражения применяется сокращенный способ записи, состоящий в том, что фазовый угол α записывается после абсолютной величины вектора и знака угла \angle (обычно величина угла выражается при этом в градусах, а не в радианах).

Так, например, выражение

$$\dot{U} = 380 \angle -30^\circ \text{ вольт}$$

обозначает вектор напряжения, абсолютная величина которого составляет 380 V и который образует с положительным направлением действи-

тельной оси угол в 30° в сторону отставания (отрицательный угол). Так как угол в -30° имеет в радианах числовое значение

$$\alpha = -\frac{\pi}{180} \cdot 30 = -\frac{\pi}{6},$$

то при полной записи символическое выражение вектора U в показательной форме имело бы вид

$$\dot{U} = 380 e^{-j \frac{\pi}{6}} \text{ вольт.}$$

Впрочем, иногда и при полной записи выражают показатель в градусах. Наш вектор в этом случае был бы условно записан так:

$$\dot{U} = 380 e^{-j 30^\circ} \text{ вольт.}$$

Если нужно от показательной формы перейти к комплексной, то соответствующие значения проекции вектора могут быть вычислены по формулам (5,3). Если же требуется обратное преобразование, то абсолютная величина вектора (модуль комплекса) определяется по формуле

$$I = \sqrt{I'^2 + I''^2}, \quad (5,5)$$

являясь всегда положительной величиной, а угол вектора с действительной осью (аргумент) — по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I''}{I'}. \quad (5,6)$$

Каждому значению $\operatorname{tg} \alpha$ соответствуют два значения угла, отличающиеся друг от друга на 180° , и чтобы выяснить, какое из них следует взять, проще всего начертить приблизительное расположение вектора по данным проекциям его, учитывая, конечно, их знаки, и посмотреть, в какой четверти вектор находится. При этом удобнее (хотя это и необязательно) отсчитывать положительные углы только для векторов, расположенных в первой и второй четвертях (т. е. до 180°), а для векторов, находящихся в третьей или четвертой четверти, пользоваться соответствующими отрицательными углами. Так, например, выражение $\dot{I} = 100 \angle 290^\circ$ ампер удобнее заменить выражением $\dot{I} = 100 \angle -70^\circ$ ампер,

Пример 5,3. Представить в комплексной форме вектор

$$\dot{U} = 3000 \angle 120^\circ \text{ вольт.}$$

Так как $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5$, а $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = 0,866$ то $\dot{U} = 3000 (\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = 3000 (-0,5 + j 0,866) = -1500 + j 2600$ вольт.

Пример 5,4. Представить в показательной форме вектор $\dot{I} = -60 - j 80$ А.

Находим: $I = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{(3 \cdot 20)^2 + (4 \cdot 20)^2} = 20 \sqrt{3^2 + 4^2} = 20 \cdot 5 = 100$ А. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-80}{-60} = 1,33$, откуда $\alpha = 53^\circ$, или $\alpha = 53^\circ - 180^\circ = -127^\circ$. По знакам действительной и мнимой части комплексов (или по чертежу) устанавливаем, что вектор расположен в третьей четверти. Поэтому окончательно $\dot{I} = 100 e^{-j 127^\circ}$ ампер, или $I = 100 \angle -127^\circ$ ампер.

Символическое изображение гармонически изменяющихся величин. До сих пор при символическом изображении векторов мы относили их к произвольным осям координат, жестко связанным с самими векторами. Однако область применения символики может быть несколько расширена. В самом деле, мгновенное значение

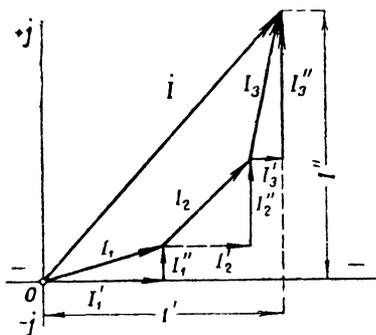
тока, напряжения, магнитного потока или еще какой-нибудь гармонически изменяющейся величины

$$y = A \sin(\omega t + \psi)$$

можно рассматривать как множитель при j в комплексном выражении вектора $\dot{A} = A e^{j(\omega t + \psi)} = A [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)]$. Таким образом и мгновенное значение вполне определяется величиной и направлением вектора, вращающегося с угловой скоростью ω .

5, 3. Сложение и вычитание векторов

Пусть нужно сложить три вектора: \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 (фиг. 5, 5), каждый из которых выражен в комплексной форме, так что $\dot{I}_1 = I_1' + jI_1''$; $\dot{I}_2 = I_2' + jI_2''$ и $\dot{I}_3 = I_3' + jI_3''$. Если каждый из этих векторов рассматривать как геометрическую сумму двух взаимно перпендикулярных векторов, то искомым суммарный вектор $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ представляет собой сумму шести векторов, три из которых (I_1' , I_2' , I_3') направлены параллельно действительной оси, а три другие (jI_1'' , jI_2'' и jI_3'') — параллельно мнимой оси. Так как от перестановки слагаемых сумма не изменяется, эти шесть векторов могут быть сгруппированы следующим образом:



Фиг. 5, 5.

Таким образом действительные части слагаемых векторов, суммируясь алгебраически, образуют действительную часть суммарного вектора

$$\begin{aligned} \dot{I} &= (I_1' + I_2' + I_3') + (jI_1'' + jI_2'' + jI_3'') = \\ &= (I_1' + I_2' + I_3') + j(I_1'' + I_2'' + I_3''). \end{aligned}$$

Таким образом действительные части слагаемых векторов, суммируясь алгебраически, образуют действительную часть суммарного вектора

$$I' = I_1' + I_2' + I_3',$$

а мнимые части слагаемых векторов, также алгебраически суммируясь, образуют мнимую часть суммарного вектора

$$I'' = I_1'' + I_2'' + I_3''.$$

Суммарный вектор

$$\dot{I} = I' + jI''.$$

Пример 5, 5. Сложить векторы:

$$\dot{I}_1 = 3 + j1, \quad \dot{I}_2 = -5 + j6 \quad \text{и} \quad \dot{I}_3 = 12 - j12 \text{ ампер.}$$

Суммарный вектор $\dot{I} = (3 - 5 + 12) + j(1 + 6 - 12) = 10 - j5$ ампер.

Так как вычесть вектор — значит прибавить вектор той же величины, но обратного направления, то вычитание вектора, данного в комплексной форме, сводится к прибавлению вектора, имеющего такую же абсолютную величину действительной и мнимой частей, но обратные знаки.

Пример 5, 6. Из вектора $\dot{U}_1 = 300 - j400$ вольт вычесть вектор $\dot{U}_2 = -100 + j200$ вольт.

Разность $\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 300 - j400 + (100 - j200) = 400 - j600$ вольт.

Если нужно аналитически сложить или вычесть векторы, выраженные в показательной форме, необходимо по формуле Эйлера перейти от показательной формы к комплексной, а затем производить сложение или вычитание, как только что было указано. Проще, однако, в этом случае

решить задачу графически, вычертив каждый вектор на миллиметровке по данным абсолютной величины и углу с действительной осью.

Пример 5, 7. Сложить векторы $\dot{U}_1 = 120 \angle 30^\circ$ вольт и $\dot{U}_2 = 80 \angle -60^\circ$ вольт. Если требуется аналитическое решение, находим сначала двучленное выражение векторов:

$$\dot{U}_1 = 120 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 120 (0,866 + j0,5) = 104 + j60 \text{ вольт};$$

$$\dot{U}_2 = 80 (\cos 60^\circ - j \sin 60^\circ) = 80 (0,5 - j0,866) = 40 - j69,3 \text{ вольт};$$

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 104 + 40 + j(60 - 69,3) = 144 - j9,3 = 144 \angle -3^\circ 40' \text{ вольт.}$$

5, 4. Геометрический смысл умножения и деления комплексных величин

В дальнейшем нам не раз придется встретиться с умножением и делением комплексных величин, которые при этом часто будут изображать собой не векторы гармонически изменяющихся величин (тока, напряжения, магнитного потока), а некоторые постоянные величины. Однако, как известно из курса математики, всякий комплекс, каково бы ни было его физическое значение, может быть изображен графически в виде отрезка, идущего из начала координат и направленного таким образом, что его проекции на оси координат равны действительной и мнимой частям комплекса. Результатом умножения или деления двух комплексных величин является, вообще говоря, также комплексное число, которое в свою очередь может быть изображено определенным отрезком (вектором). Наша задача заключается сейчас в том, чтобы установить геометрическую связь между вектором, изображающим произведение или отношение двух данных комплексных величин, и векторами, изображающими сами эти комплексы.

Возьмем два комплекса $\dot{A} = A' + jA''$ и $\dot{B} = B' + jB''$.

Представим их в показательной форме:

$$\dot{A} = Ae^{j\alpha},$$

где

$$A = \sqrt{A'^2 + A''^2} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = \frac{A''}{A'};$$

$$\dot{B} = Be^{j\beta},$$

где

$$B = \sqrt{B'^2 + B''^2} \text{ и } \operatorname{tg} \beta = \frac{B''}{B'}.$$

Величины A и B дают нам длины соответствующих векторов, а α и β — их углы с начальной осью. Произведение этих двух комплексных

$$\dot{M} = \dot{A}\dot{B} = Ae^{j\alpha}Be^{j\beta} = AB e^{j(\alpha+\beta)}$$

изображает, очевидно, вектор длиной AB , образующий с начальной осью угол $\alpha + \beta$. Таким образом умножение вектора \dot{A} на \dot{B} увеличивает вектор \dot{A} в B раз и поворачивает его вперед¹ на угол β или увеличивает вектор \dot{B} в A раз и поворачивает его вперед² на угол α . Результат не зависит от того, какой из векторов мы рассматриваем как множимое и какой — как множитель.³

¹ Если $\beta > 0$.

² Если $\alpha < 0$.

³ Необходимо иметь в виду, что здесь речь идет об умножении комплексных чисел, изображающих векторы или изображаемых векторами, а не об умножении векторов, и что правила векторной алгебры здесь неприменимы: рассматриваемое действие не является ни скалярным, ни векторным умножением.

Отношение комплексов \dot{A} и \dot{B}

$$\dot{N} = \frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha - \beta)}$$

изображает вектор длиной $\frac{A}{B}$, образующий с начальной осью угол $\alpha - \beta$.
Иначе говоря, деление вектора \dot{A} на \dot{B} уменьшает длину вектора \dot{A} в B раз и поворачивает его назад¹ на угол β .

Что касается размерности произведения и отношения двух комплексных величин, она зависит, очевидно, от размерности самих данных комплексов. В частности, отношение двух комплексов, выражающих однородные по своему физическому значению величины, представляет собою отвлеченное комплексное число.

Пример 5, 8. Умножить вектор $3\,000 \angle 20^\circ$ вольт на комплекс $1,5 - j2$.
 $\dot{A} = 3\,000 \cdot e^{j20^\circ}$ вольт; $B = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = \sqrt{2,25 + 4} = 2,5$; $\operatorname{tg} \beta = -\frac{2}{1,5} = -1,33$; $\beta = -53^\circ$, так как знаки действительной и мнимой части комплекса показывают, что вектор лежит в четвертой четверти:

$$3\,000e^{j20^\circ} \cdot 2,5e^{-j53^\circ} = 3\,000 \cdot 2,5e^{j(20^\circ - 53^\circ)} = 7\,500 \angle -33^\circ \text{ вольт.}$$

Размерность результата осталась без изменения (вольты), так как комплекс — множитель — был отвлеченным числом.

Пример 5, 9. Найти отношение векторов $\dot{U} = 8\,000 + j6\,000$ вольт и $\dot{I} = 120 - j90$ ампер.

Представим оба вектора в показательной форме:

$$U = \sqrt{8\,000^2 + 6\,000^2} = 2\,000 \sqrt{4^2 + 3^2} = 2\,000 \cdot 5 = 10\,000 \text{ V;}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6\,000}{8\,000} = 0,75; \quad \alpha = 37^\circ; \quad \dot{U} = 10\,000 \angle 37^\circ \text{ вольт;}$$

$$I = \sqrt{120^2 + 90^2} = 10 \sqrt{12^2 + 9^2} = 10 \sqrt{225} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ A;}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-90}{120} = -0,75; \quad \beta = -37^\circ; \quad I = 150 \angle -37^\circ \text{ ампер;}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{10\,000 \angle 37^\circ}{150 \angle -37^\circ} = \frac{10\,000}{150} \angle 37^\circ + 37^\circ = 66,7 \angle 74^\circ \text{ ом.}$$

Результат выражается в омах, так как $\frac{\text{вольт}}{\text{ампер}} = \text{ом}$.

Умножение и деление комплексных величин производится наиболее просто, если обе величины представлены в показательной форме. Однако это не является обязательным. Пусть, например, нужно умножить комплекс $\dot{A} = A' + jA''$ на комплекс $\dot{B} = B' + jB''$.
Имеем

$$\begin{aligned} \dot{A}\dot{B} &= (A' + jA'')(B' + jB'') = A'B' + jA''B'' + jA'B'' + \\ &+ jA''B' = A'B' - A''B'' + j(A'B'' + A''B'). \end{aligned}$$

Пример 5, 10. Умножить вектор $\dot{I} = 15 - j20$ ампер на комплекс $\dot{B} = 2 - j3$.

$$\begin{aligned} \dot{I}\dot{B} &= (15 - j20)(2 - j3) = 15 \cdot 2 - 20 \cdot 3 + j[15(-3) + \\ &+ (-20)2] = -30 - j85 \text{ ампер.} \end{aligned}$$

¹ Если $\beta > 0$

5, 5. Вычисление мощности по комплексным выражениям тока и напряжения

Как известно, средняя (активная) мощность переменного тока определяется выражением

$$P = UI \cos \varphi.$$

Пусть данные напряжение и ток выражаются комплексами

$$\dot{U} = U' + jU'' = Ue^{j\alpha} \quad \text{и} \quad \dot{I} = I' + jI'' = Ie^{j(\alpha - \varphi)}.$$

Можно представить себе, что этот ток \dot{I} течет по двум параллельным ветвям, включенным к напряжению \dot{U} , причем по первой ветви течет ток I' , а по второй jI'' . Тогда общую мощность можно определить как сумму мощностей в этих двух ветвях. Первый ток (фиг. 5, 6) отстает от напряжения на угол α , следовательно, мощность первой ветви равно

$$P' = UI' \cos \alpha.$$

Но

$$U \cos \alpha = U';$$

поэтому

$$P' = U'I'.$$

Ток второй ветви опережает напряжение на угол $90^\circ - \alpha$ и мощность второй ветви

$$P'' = UI'' \cos (90 - \alpha) = UI'' \sin \alpha.$$

Но

$$U \sin \alpha = U'';$$

поэтому

$$P'' = U''I''.$$

Общая мощность равна сумме найденных мощностей:

$$P = P' + P'' = U'I' + U''I''. \tag{5, 8}$$

При пользовании формулой (5, 8) для числовых расчетов необходимо иметь в виду, что величины U' , U'' , I' и I'' могут быть как положительными, так и отрицательными.

Пример 5, 11. Вычислить активную мощность по комплексным выражениям $\dot{U} = -300 + j400$ вольт и $\dot{I} = -20 - j5$ ампер.

В данном случае $U' = -300$; $U'' = 400$; $I' = -20$; $I'' = -5$.

Подставляя эти значения в формулу (5, 8), находим

$$P = -300 \cdot (-20) + 400 \cdot (-5) = 6\,000 - 2\,000 = 4\,000 \text{ W} = 4 \text{ kW}.$$

Реактивная мощность может быть вычислена подобным же образом как сумма реактивных мощностей в ветви с током I' и в ветви с током jI'' . Мощность первой ветви

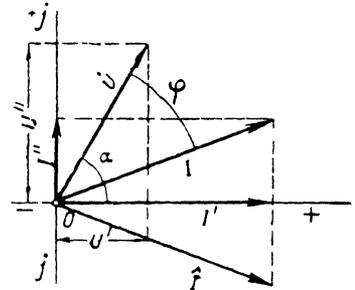
$$P_{r'} = UI' \sin \alpha = U''I'.$$

Мощность второй ветви

$$P_{r''} = UI'' \sin (\alpha - 90^\circ) = -UI'' \cos \alpha = -U'I''.$$

Реактивная мощность второй ветви отрицательна, так как в ней ток I'' опережает напряжение на угол $90^\circ - \alpha$.¹

¹ Если α больше 90° , но меньше 180° , и I'' положительно, мощность второй ветви должна быть положительна, но это будет автоматически учтено тем, что $\cos \alpha$ (а следовательно, и U') будет отрицательным.



Фиг. 5, 6.

Общая реактивная мощность

$$P_r = P_r' + P_r'' = U'I' - U''I'' \quad (5, 8a)$$

Сделанное выше замечание о знаках величин U' , U'' , I' и I'' , конечно, и здесь остается в силе.

Пример 5, 1а. По данным примера 5, 11 вычислить реактивную мощность $P_r = 400 \cdot (-20) - (-300) \cdot (-5) = -8000 - 1500 = -9500 \text{ VA} = -9,5 \text{ kVA}$.

Отрицательное значение полученной реактивной мощности указывает на ее емкостный характер.

Обе мощности: активная и реактивная, могут быть вычислены совместно путем простого умножения комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока¹. В самом деле,

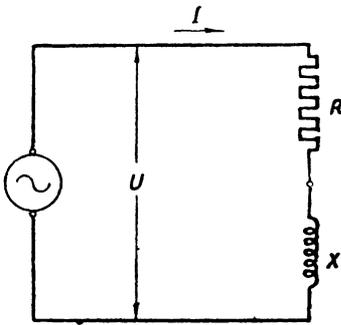
$$(U' + jU'')(I' - jI'') = U'I' + U''I'' + jU''I' - jU'I'' = \\ = U'I' + U''I'' + j(U''I' - U'I'')$$

Сравнивая полученный результат с формулами (5, 8) и (5, 8а), нетрудно убедиться в том, что действительная часть результата равна активной, а мнимая — реактивной мощности. Что касается кажущейся мощности, она может быть определена с помощью вычисленных P и P_r по формуле

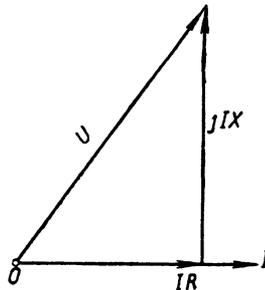
$$P_s = \sqrt{P^2 + P_r^2}$$

5, 6. Закон Ома. Символическое выражение кажущегося сопротивления

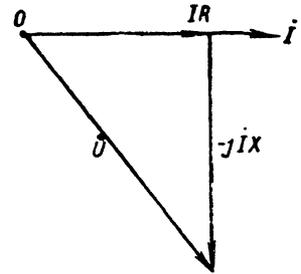
Символическое изображение векторов позволяет значительно упростить формулировку закона Ома для цепи переменного тока. Пусть, например, последовательно включены активное (R) и реактивное (X) сопротивление



Фиг. 5, 7.



Фиг. 5, 8.



Фиг. 5, 9.

ния (фиг. 5, 7). В зависимости от того, является ли реактивное сопротивление индуктивным или емкостным, векторная диаграмма цепи имеет вид фиг. 5, 8 или 5, 9. В обоих случаях вектор напряжения на зажимах цепи \dot{U} является суммой векторов: iR , совпадающего по фазе с током i , и $\pm jIX$, опережающего ток на 90° при преобладании индуктивного сопротивления над емкостным (X — положительно) и отстающего на 90° в обратном случае (X — отрицательно). Таким образом

$$\dot{U} = iR + jIX \quad (2)$$

¹ Сопряженным называется комплекс, отличающийся от данного комплекса только знаком мнимой части, или, что то же самое, знаком угла.

² Напомним, что в случае последовательного соединения емкости и индуктивности $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Решаем это уравнение относительно \dot{I} :

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{I}(R + jX); \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}}{R + jX}.\end{aligned}\quad (5, 9)$$

Полученное решение имеет форму закона Ома, причем роль сопротивления играет комплексное число $R + jX$, выражающее кажущееся или полное сопротивление. Поэтому вводя обозначение

$$Z = R + jX, \quad (5, 10)$$

получим для закона Ома формулу

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}, \quad (5, 11)$$

как всякий комплекс кажущееся сопротивление может быть представлено в показательной форме

$$Z = ze^{j\varphi}, \quad (5, 12)$$

где модуль комплекса $z = \sqrt{R^2 + X^2}$ определяется по известной формуле для кажущегося сопротивления, а угол $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ является ни чем иным, как сдвигом фаз между током и напряжением. Подставляя выражение (5, 12) в формулу (5, 11), получим

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{ze^{j\varphi}} = \frac{\dot{U}}{Z} e^{-j\varphi};$$

это выражение говорит нам, что положительное значение угла φ , соответствующее положительному знаку реактивного сопротивления X (преобладание индуктивности), соответствует отставанию тока от напряжения, как это и было принято ранее.

Необходимо иметь в виду, что Z не является такого же рода вектором, как векторы напряжения \dot{U} и тока \dot{I} , хотя и выражается, как они, в комплексной или показательной форме. Разница заключается в том, что напряжение и ток представляют собой переменные величины (гармонические функции времени), изображаемые проекциями вращающихся векторов, тогда как полное сопротивление является постоянной величиной, указывающей отношение модуля U к модулю I и постоянный сдвиг по фазе, существующий между соответствующими гармоническими функциями.

Пример 5, 12. Дано: $\dot{U} = 500 \angle 120^\circ$ вольт; $R = 30 \Omega$; $X = 40 \Omega$ (емкость).
Определить вектор тока \dot{I} .

$$\begin{aligned}Z &= 30 - j40 \Omega; \quad z = 10 \sqrt{3^2 + 4^2} = 10 \cdot 5 = 50 \Omega. \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{-40}{30} = -1,33; \quad \varphi = -57^\circ; \quad Z = 50 \angle -57^\circ \Omega. \\ \dot{I} &= \frac{500 \angle 120^\circ}{50 \angle -57^\circ} = \frac{500}{50} \angle (120^\circ + 57^\circ) = 10 \angle 177^\circ \text{А}.\end{aligned}$$

Пример 5, 13. Дано: $\dot{I} = 15 - j20$ ампер, $R = 5 \Omega$; $X = 8 \Omega$ (индуктивность).
Определить вектор напряжения.

$$\begin{aligned}Z &= 5 + j8 \text{ омов}; \quad \dot{U} = \dot{I}Z = (15 - j20)(5 + j8) = 15 \cdot 5 - j^2 20 \cdot 8 + \\ &+ j15 \cdot 8 - j20 \cdot 5 = 75 + 160 + j120 - j100 = 235 + j20 \text{ вольт}.\end{aligned}$$

5, 7. Символическое выражение кажущейся проводимости

Подобно кажущемуся сопротивлению проводимость цепи также может быть выражена в символической форме:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{z} e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi}, \quad (5, 13)$$

но

$$e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi = \frac{R}{z} - j \frac{X}{z}.$$

Поэтому

$$Y = \frac{1}{z} \left(\frac{R}{z} - j \frac{X}{z} \right) = \frac{R}{z^2} - j \frac{X}{z^2} = g + jb.$$

Выражение $\frac{R}{z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}$ представляет собой активную проводимость цепи (g), а выражение $-\frac{X}{z^2} = \frac{-X}{R^2 + X^2}$ — реактивную проводимость (b). Следовательно,

$$Y = g + jb, \quad (5, 14)$$

Закон Ома при этом примет следующий вид:

$$I = \dot{U}Y = \dot{U}(g + jb) = \dot{U}g + j\dot{U}b. \quad (5, 15)$$

Первый член полученного выражения представляет собой активную слагающую тока, совпадающую по фазе с напряжением, а второй — реактивную слагающую тока, отстающую от напряжения на 90° при преобладании индуктивности над емкостью (X — положительно, b — отрицательно) или опережающую напряжение на 90° в обратном случае (X — отрицательно, b — положительно).

Пример 5,14. Активная проводимость цепи равна $1,5 \cdot 10^{-3}$ S а индуктивная $2,5 \cdot 10^{-3}$ S. Определить активный и реактивный токи при напряжении $U = 6000$ V:

$$Y = 1,5 \cdot 10^{-3} - j2,5 \cdot 10^{-3} \text{ сименс;}$$

$$I = 6000 (1,5 \cdot 10^{-3} - j2,5 \cdot 10^{-3}) = 9 - j15 \text{ ампер.}$$

Так как вектор напряжения направлен по действительной оси (мнимая часть комплекса \dot{U} равна нулю), то действительная часть полученного комплекса представляет собой активный ток, а мнимая — реактивный.

5, 8. Законы Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа. В предыдущей главе было доказано, что геометрическая (векторная) сумма токов в каждой точке разветвления любой сложной цепи должна быть равна нулю. Но применение символических выражений позволяет заменить геометрическое сложение векторов алгебраическим сложением соответствующих комплексов. Поэтому в комплексной форме первый закон Кирхгофа выражается следующим образом:

$$\sum (I_k' + jI_k'') = 0$$

или

$$\sum I_k' + j \sum I_k'' = 0.$$

Для того чтобы комплекс равнялся нулю, нужно, чтобы действительная и мнимая его части в отдельности равнялись нулю. Поэтому полученное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sum I_k' = 0$$

и

$$\sum I_k'' = 0,$$

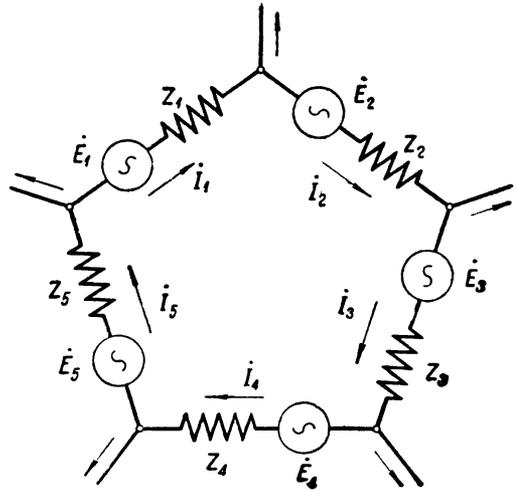
совокупность которых и является выражением первого закона Кирхгофа. Более коротко этот закон может быть выражен формулой

$$\sum \dot{I}_k = 0. \tag{5, 16}$$

Пример 5, 15. В одной точке сходятся три тока: \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 , два из которых известны: $\dot{I}_1 = 30 - j80$ ампер и $\dot{I}_2 = -10 + j40$ ампер. Определить третий ток.

$$\begin{aligned} \sum I_k' &= 30 - 10 + I_3' = 0; & \sum I_k'' &= -80 + 40 + I_3'' = 0; \\ I_3' &= -30 + 10 = -20 \text{ A}; & I_3'' &= +80 - 40 = 40 \text{ A}; \\ \dot{I}_3 &= -20 + j40 \text{ ампер.} \end{aligned}$$

Второй закон Кирхгофа. Если в любой сложной цепи, состоящей из источников тока и сопротивлений, выделить произвольный замкнутый контур (фиг. 5, 10) и вычислить сумму мгновенных значений напряжения между концами всех составляющих его участков, то в любой момент эта сумма окажется равной нулю, так как она представляет собой напряжение между двумя совпадающими точками. В силу этого геометрическая сумма соответствующих векторов должна быть равна нулю. Напряжение между концами какого-нибудь участка равно разности между э. д. с. \dot{E}_k включенного в этот участок источника и падением напряжения $\dot{I}_k Z_k$ в сопротивлении этого участка, т. е.



Фиг. 5, 10.

$$\dot{U}_k = \dot{E}_k - \dot{I}_k Z_k,$$

Сумма таких выражений по замкнутому контуру должна равняться нулю, т. е.

$$\sum \dot{U}_k = \sum \dot{E}_k - \sum (\dot{I}_k Z_k) = 0,$$

или

$$\sum \dot{E}_k = \sum \dot{I}_k Z_k. \tag{5, 17}$$

Таково выражение второго закона Кирхгофа в символической форме.

Пример 5, 16. Определить токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 в схеме, представленной на фиг. 5, 11, если дано: $Z_1 = 30 + j40 \Omega$; $Z_2 = 40 + j30 \Omega$; $Z_3 = 80 - j80 \Omega$; $E_1 = 6600 \text{ V}$ и $E_2 = 6300 \text{ V}$, причем \dot{E}_2 отстает от \dot{E}_1 на 20° .

Направим действительную ось по вектору э. д. с. \dot{E}_1 , который выразится тогда действительным числом: $\dot{E}_1 = 6600 \text{ V}$. Вектор \dot{E}_2 , как отстающий от \dot{E}_1 на 20° , выразится в виде $\dot{E}_2 = 6300 \angle -20^\circ \text{ V}$. По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3, \tag{a}$$

причем положительные направления токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 произвольно приняты нами совпадающими с положительными направлениями э. д. с. \dot{E}_1 и \dot{E}_2 . По второму закону Кирхгофа для левого контура

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_3 Z_3, \quad (б)$$

а для правого контура

$$\dot{E}_2 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_3 Z_3, \quad (в)$$

причем левый контур обходился по часовой стрелке, а правый — против. Определяя \dot{I}_1 из уравнения (б) и \dot{I}_2 из уравнения (в) и подставляя их в уравнение (а), получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{I}_3 Z_3}{Z_1}; \quad (г)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{I}_3 Z_3}{Z_2}; \quad (д)$$

$$\frac{\dot{E}_1}{Z_1} - \frac{\dot{I}_3 Z_3}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2} - \frac{\dot{I}_3 Z_3}{Z_2} = \dot{I}_3,$$

или

$$\frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2} = \dot{I}_3 \left(\frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_3}{Z_2} + 1 \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \frac{\dot{E}_1}{Z_1 \left(1 + \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_3}{Z_2} \right)} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2 \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2} + \frac{Z_3}{Z_1} \right)} = \\ &= \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}}. \end{aligned}$$

Вычисляем отдельные части последнего уравнения:

$$Z_1 + Z_3 = 30 + j40 + 80 - j80 = 110 - j40 \Omega;$$

$$Z_2 + Z_3 = 40 + j30 + 80 - j80 = 120 - j50 \Omega;$$

в показательной форме

$$Z_1 = \sqrt{30^2 + 40^2} e^{j \arctg \frac{40}{30}} = 50 e^{j53^\circ 10'} \Omega;$$

$$Z_2 = \sqrt{40^2 + 30^2} e^{j \arctg \frac{30}{40}} = 50 e^{j36^\circ 50'} \Omega;$$

$$Z_3 = \sqrt{80^2 + 80^2} e^{j \arctg \frac{-80}{80}} = 113,2 e^{-j45^\circ} \Omega;$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} &= \frac{50 e^{j53^\circ 10'} \cdot 113,2 e^{-j45^\circ}}{50 e^{j36^\circ 50'}} = 113,2 e^{-j28^\circ 40'} = 113,2 (\cos 28^\circ 40' - j \sin 28^\circ 40') = \\ &= 113,2 \cdot 0,877 - j113,2 \cdot 0,480 = 99,2 - j54,4 \Omega; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} &= \frac{50 e^{j36^\circ 50'} \cdot 113,2 e^{-j45^\circ}}{50 e^{j53^\circ 10'}} = 113,2 e^{-j61^\circ 20'} = 113,2 (\cos 61^\circ 20' - j \sin 61^\circ 20') = \\ &= 113,2 \cdot 0,480 - j113,2 \cdot 0,877 = 54,4 - j99,2 \Omega; \end{aligned}$$

$$Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} = 110 - j40 + 99,2 - j54,4 = 209,2 - j94,4 = 229 e^{-j24^\circ 20'} \Omega;$$

$$Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1} = 120 - j50 + 54,4 - j99,2 = 174,4 - j149,2 = 229 e^{-j40^\circ 30'} \Omega.$$

Подставляя полученные значения в уравнение (е), находим

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \frac{6\,600}{229 e^{-j21^\circ 20'}} + \frac{6\,300 e^{-j20^\circ}}{229 e^{-j40^\circ 30'}} = 28,8 e^{j21^\circ 20'} + 27,5 e^{j20^\circ 30'} = \\ &= 28,8 (0,910 + j0,412) + 27,5 (0,936 + j0,350) = 26,2 + j11,9 + 25,7 + j9,6 = \\ &= 51,9 + j21,5 = 56,2 \angle 22^\circ 30' \text{ А.} \end{aligned}$$

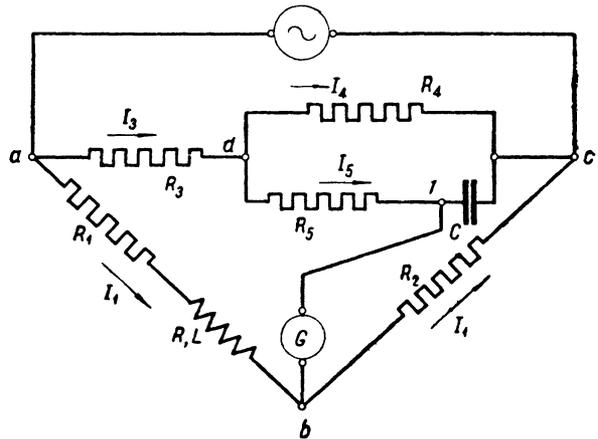
Подставляя найденное значение в уравнения (г) и (д), получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{6\,600}{50 e^{j58^\circ 10'}} - \frac{56,2 e^{j22^\circ 30'} 113,2 e^{-j45^\circ}}{50 e^{j53^\circ 10'}} = 132 e^{-j53^\circ 10'} - 127,2 e^{-j75^\circ 40'} = \\ &= 132 (0,6 - j0,8) - 127,2 (0,247 - j0,968) = 79,2 - j105,7 - 31,4 + j123,1 = \\ &= 47,8 + j17,3 = 50,8 \angle 20^\circ \text{ А;} \\ \dot{I}_2 &= \frac{6\,300 e^{-j20^\circ}}{50 e^{j36^\circ 50'}} - \frac{56,2 e^{j22^\circ 30'} 113,2 e^{-j45^\circ}}{50 e^{j36^\circ 50'}} = 126 e^{-j56^\circ 50'} - 127,2 e^{-j59^\circ 20'} = \\ &= 126 (0,547 - j0,836) - 127,2 (0,51 - j0,86) = 68,9 - j105,2 - 64,8 + j109,4 = \\ &= 4,1 + j4,2 = 5,8 \angle 45^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

Для проверки сложим в комплексной форме \dot{I}_1 и \dot{I}_2 и убедимся в том, что сумма совпадает с комплексным выражением \dot{I}_3 . Действительно,

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 47,8 + j17,3 + 4,1 + j4,2 = 51,9 + j21,5 \text{ А.}$$

Для измерения сопротивлений, индуктивностей, емкостей и т. д. с помощью переменного тока часто применяются так называемые мосты: Уитстона, Томсона, Шеринга и др. Существует целый ряд различных систем мостов к. в. Все они основаны на том, что при известном соотношении между входящими в схему мостика сопротивлениями (активными и реактивными) напряжение между двумя определенными точками схемы оказывается равным нулю, что и показывает включенный между этими точками гальванометр или телефон. В нижеследующем примере разобран один из таких мостиков, служащий для измерения индуктивности.



Фиг. 5, 12.

Пример 5, 7. На фиг. 5, 12 представлена схема мостика Андерсона. Установить соотношение между определяемой индуктивностью L и известными: емкостью C и сопротивлениями R, R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 , при котором отклонение гальванометра равно нулю.

Так как напряжение между точками b и f должно при этом условии равняться нулю ($U_{bf} = 0$), то

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{af} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{fc},$$

или

$$\dot{I}_1 (R_1 + R + j\omega L) = \dot{I}_3 R_3 + \dot{I}_5 R_5;$$

и

$$\dot{I}_1 R_2 = \dot{I}_5 \left(-j \frac{1}{\omega C} \right).$$

Кроме того,

$$i_4 R_4 = i_5 \left(R_5 - j \frac{1}{\omega C} \right)$$

и

$$i_3 = i_4 + i_5.$$

Эти четыре уравнения с пятью неизвестными (i_1, i_3, i_4, i_5 и L) недостаточны для определения токов,¹ но дают вполне определенное соотношение между L и другими постоянными схемы. Действительно, подставляя i_3 из четвертого уравнения в первое, получим

$$i_1 (R_1 + R + j\omega L) = i_4 R_3 + i_5 (R_3 + R_5).$$

Подстановка сюда из третьего уравнения

$$i_4 = \frac{i_5}{R_4} \left(R_5 - j \frac{1}{\omega C} \right)$$

даст

$$i_1 (R_1 + R + j\omega L) = i_5 \left[\frac{R_3}{R_4} \left(R_5 - j \frac{1}{\omega C} \right) + R_3 + R_5 \right].$$

Разделим это уравнение на второе:

$$\frac{R_1 + R + j\omega L}{R_2} = \frac{\frac{R_3}{R_4} R_5 - \frac{R_3}{R_4} j \frac{1}{\omega C} + R_3 + R_5}{-j \frac{1}{\omega C}}$$

или

$$\frac{R_1 + R}{R_2} + \frac{j\omega L}{R_2} = \frac{\frac{R_3}{R_4} R_5 + R_3 + R_5}{-j \frac{1}{\omega C}} + \frac{R_3}{R_4}.$$

Так как комплексы равны, если равны в отдельности их действительные и мнимые части, то это уравнение распадается на два:

$$\frac{R_1 + R}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{A}$$

и

$$\frac{j\omega L}{R_2} = \frac{\frac{R_3}{R_4} R_5 + R_3 + R_5}{-j \frac{1}{\omega C}},$$

или, умножая на $j\omega C$ числитель и знаменатель правой части

$$\frac{j\omega L}{R_2} = j\omega C \left(\frac{R_3}{R_4} R_5 + R_3 + R_5 \right),$$

или

$$\frac{L}{C} = R_2 \left[\left(\frac{R_3}{R_4} + 1 \right) R_5 + R_3 \right]. \tag{B}$$

Таким образом, для того чтобы гальванометр не давал отклонения, необходимо соблюдение двух соотношений [(A) и (B)]. Измерив предварительно (например, с помощью постоянного тока) сопротивление исследуемой катушки R и выбрав произвольно R_2 (например, взяв его равным $R_1 + R$),²

¹ Потому что токи зависят от напряжения источника, которое мы не ввели в уравнения.

² Сопротивление R_1 необходимо при малых R , чтобы величина R_2 не получалась слишком малой.

определяем по (А) отношение $\frac{R_3}{R_4}$ и, сохраняя его постоянным, изменяем R_3 , R_4 и R_5 , пока гальванометр не перестанет давать отклонения. Тогда по (В) определяем искомую индуктивность.

Если взято $R_2 = R_1 + R$, то

$$\frac{R_3}{R_4} = 1$$

и

$$\frac{L}{C} = R_2 (2R_5 + R_3).$$

Если, например, при отсутствии тока в гальванометре $R_2 = 20 \Omega$; $R_5 = 100 \Omega$; $R_3 = 400 \Omega$ и $C = 2 \mu F$, то

$$\frac{L}{C} = 20 (2 \cdot 100 + 400) = 1200 \Omega^2$$

и

$$L = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12000 = 24 \cdot 10^{-8} H = 24 \text{ мН.}$$

5.9. Сопrotивление и проводимость при последовательном и параллельном соединениях

Во всех точках неразветвленной цепи, состоящей из нескольких последовательно соединенных сопротивлений: Z_1, Z_2, Z_3, \dots , проходит один и тот же ток I , и уравнение (5,17) получает вид

$$\sum \dot{E}_k = I \sum Z_k. \quad (5,18)$$

Так как эквивалентное сопротивление цепи, при котором она потребляет тот же ток, определяется формулой

$$Z = \sum \frac{\dot{E}_k}{I},$$

то в данном случае эквивалентное сопротивление

$$Z = \sum Z_k, \quad (5,19)$$

т. е. при последовательном соединении сопротивлений выражающие их комплексы складываются.

Если вместо сопротивлений ввести полные проводимости, то уравнение (5,19) примет вид

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \dots$$

В частном случае, когда имеется всего два последовательно соединенных сопротивления, это уравнение может быть преобразовано так:

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} = \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 Y_2},$$

или

$$Y = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad (5,20)$$

т. е. эквивалентная проводимость при последовательном соединении двух приемников равна произведению их полных проводимостей, деленному на их сумму.

При параллельном соединении нескольких приемников одинаковым является напряжение \dot{E} на их общих зажимах, а общий ток равен сумме токов отдельных приемников:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots,$$

каждый из которых равен в свою очередь

$$i_k = \frac{\dot{U}}{Z_k}.$$

Поэтому

$$i = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} + \frac{\dot{U}}{Z_3} + \dots = \dot{U} \sum \frac{1}{Z_k} = \dot{U} \sum Y_k,$$

и эквивалентна проводимость всей цепи

$$Y = \frac{i}{\dot{U}} = \sum Y_k \quad (5,21)$$

равна сумме комплексных выражений проводимостей отдельных параллельно соединенных приемников.

Переходя снова к сопротивлениям, получим

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots$$

В частном случае, при параллельном соединении двух, приемников, их общее сопротивление определится следующим образом:

$$\frac{1}{Z} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2}, \quad \text{или} \quad Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (5,22)$$

т. е. оно равно произведению параллельно включенных сопротивлений, деленному на их сумму.

Таким образом с помощью символических выражений общее сопротивление и общая проводимость цепи при последовательном и при параллельном соединении вычисляется совершенно так же, как при постоянном токе.

Пример 5,18. Найти общее сопротивление цепи, состоящей из двух параллельных ветвей, одна из которых имеет омическое (активное) сопротивление $R_1 = 8 \Omega$ и индуктивное $X_1 = 10 \Omega$, а другая — омическое (активное) сопротивление $R_2 = 6 \Omega$ и емкостное $X_2 = 2 \Omega$.

В комплексной форме $Z_1 = 8 + j 10$ омов и $Z_2 = 6 - j 2$ омов. По формуле (5,22)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(8 + j10)(6 - j2)}{8 + j10 + 6 - j2} = \frac{48 + 20 + j60 - j16}{14 + j8} = \frac{68 + j44}{14 + j8} = \\ &= \frac{81 e^{j32^\circ 50'}}{16.1 e^{j29^\circ 50'}} = 5,03 e^{j3^\circ} = 5,03 (0,998 + j0,052) = 5,02 + j0,26 \text{ ома.} \end{aligned}$$

ГЛАВА 6

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

6.1. Графическое определение общего сопротивления или проводимости сложной цепи

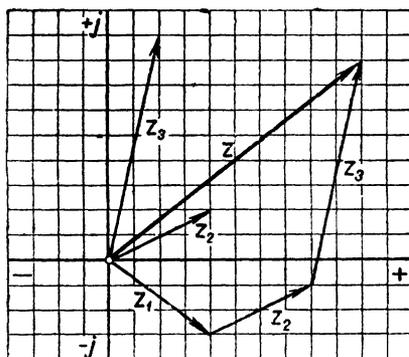
Общее сопротивление сложной цепи, состоящей из ряда последовательно и параллельно включенных сопротивлений, может быть определено без всяких вычислений чисто графическим путем.

При последовательном соединении нескольких сопротивлений Z_1, Z_2, Z_3, \dots комплексное выражение общего сопротивления Z равно сумме комплексных выражений отдельных сопротивлений и может быть получено путем графического сложения отрезков, изображающих эти комплексы. На фиг. 6,1 представлено графическое определение общего сопротивления цепи, состоящей из трех последовательно включенных сопротивлений: $Z_1 = 4 - j3$ ома, $Z_2 = 4 + j2$ ома и $Z_3 = 2 + j9$ омов, первое из которых содержит кроме активного сопротивления емкость, а остальные два — индуктивности. Общее сопротивление $Z = 10 + j8$ омов. Если составляющие сопротивления заданы в показательной форме, они легко могут быть изображены соответствующими отрезками, длина которых определяется абсолютной величиной сопротивления, а угол с положительным направлением действительной оси — величиной и знаком показателя. Разумеется, и результат всего построения — общее сопротивление — непосредственно из диаграммы может быть получен, если это нужно, в показательной форме. Измерив, например, на фиг. 6,1 длину полученного отрезка и его угол с действительной осью, найдем, что $Z = 12,8e^{j39^\circ}$ ома. Для обеспечения большей точности результата следует выбирать более крупный масштаб.

Подобным же образом может быть определена общая проводимость нескольких параллельно соединенных приемников, выражаемая, очевидно, геометрической суммой проводимостей отдельных приемников.

Особым построением весьма просто находится общее сопротивление Z двух параллельно включенных приемников, если известны сопротивления Z_1 и Z_2 каждого из них. Как было доказано выше,

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2},$$



Фиг. 6,1.

а следовательно,

$$\frac{Z}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Обозначив $Z_3 = Z_1 + Z_2$ и подставив все сопротивления в показательной форме, найдем

$$\frac{ze^{j\varphi}}{z_1 e^{j\varphi_1}} = \frac{z_2 e^{j\varphi_2}}{z_3 e^{j\varphi_3}},$$

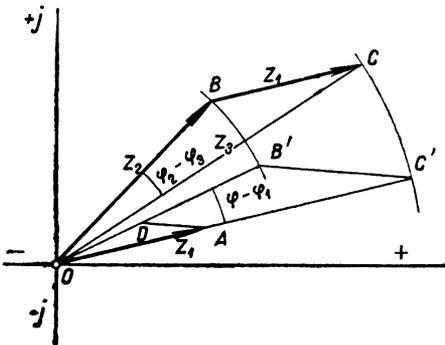
или

$$\frac{z}{z_1} e^{j(\varphi - \varphi_1)} = \frac{z_2}{z_3} e^{j(\varphi_2 - \varphi_3)},$$

откуда

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z_2}{z_3} \quad \text{и} \quad \varphi - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_3, \quad (6,1)$$

т. е. искомый отрезок Z образует с отрезком Z_1 такой же угол $(\varphi - \varphi_1)$, какой отрезок Z_2 образует с суммарным отрезком Z_3 , т. е. $(\varphi_2 - \varphi_3)$, а по своей абсолютной величине отрезок Z является четвертой пропорциональной по отношению к отрезкам Z_1 , Z_2 и Z_3 . Соответствующее построение сделано на фиг. 6, 2. Данные сопротивления Z_1 и Z_2 изображены отрезками OA и OB , а их геометрическая сумма Z_3 — отрезком OC .



Фиг. 6, 2.

Повернем треугольник OBC вокруг точки O так, чтобы отрезок OC совпал по направлению с OA . Для этого через точку C проведем дугу окружности с центром O до пересечения в C' с продолжением OA , а через точку B — другую дугу с тем же центром. Делая затем из точки C' засечку этой дуги радиусом, равным отрезку BC , полученную точку B' соединяем прямыми с точками O и C' . В найденном, таким образом, треугольнике $OB'C'$ угол при вершине O равен такому же углу в треугольнике OBC , т. е. $\varphi_2 - \varphi_3 = \varphi - \varphi_1$, а так как отрезок OC' образует с действительной осью угол φ_1 , то отрезок OB' образует с той же осью угол $\varphi_1 + (\varphi - \varphi_1) = \varphi$, т. е. отрезок, изображающий искомое сопротивление Z , должен иметь направление отрезка OB' . Остается определить его величину. Для этого из точки A проведем прямую параллельно $C'B'$ до пересечения с OB' в точке D . Отрезок OD будет изображать искомое сопротивление. В самом деле, из подобия треугольников OAD и $OC'B'$ имеем

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OB'}{OC'}, \quad \text{или} \quad \frac{OD}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_3},$$

откуда

$$OD = \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} = Z.$$

Подобным же графическим построением могут быть определены выражения $\frac{Z_1 Z_3}{Z_2}$ и $\frac{Z_2 Z_3}{Z_1}$ в примере 5, 16.

6.2. Круговая диаграмма цепи с переменным реактивным и постоянным активным сопротивлением

Если неразветвленная цепь с постоянным активным и переменным реактивным сопротивлением (индуктивным или емкостным — безразлично) включена на неизменное напряжение U , то при изменении реактивного сопротивления вектор тока изменяется и по величине и по направлению. При этом изменении конец вектора тока, как сейчас будет доказано, перемещается по окружности.

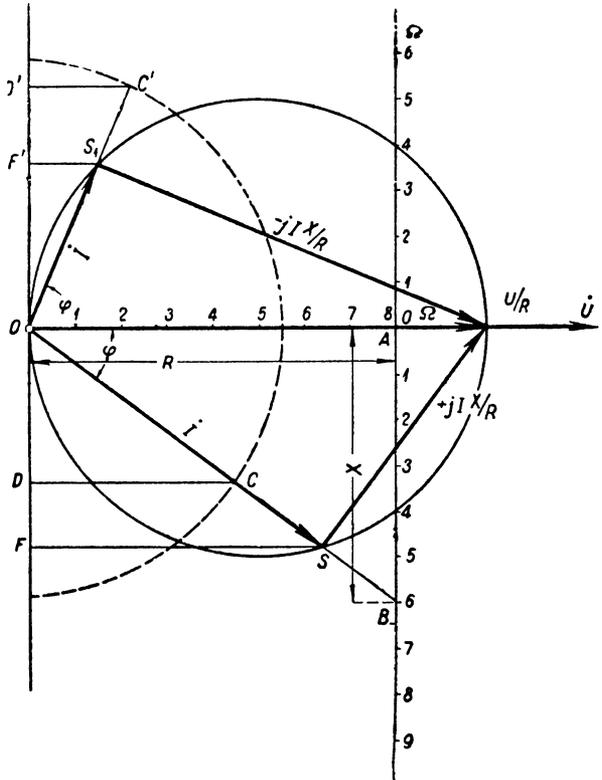
Для такой цепи мы имели уравнение (5, 9):

$$\dot{U} = iR + j\dot{I}X.$$

Разделим все члены этого уравнения на постоянную величину R и поменяем местами правую и левую части его:

$$i + j\dot{I}\frac{X}{R} = \frac{\dot{U}}{R}. \quad (6, 2)$$

В левой части полученного уравнения мы имеем сумму двух переменных векторов, угол между которыми равен 90° , а в правой части — постоянный вектор $\frac{\dot{U}}{R}$. Таким образом конец вектора i является вершиной прямого угла, опирающегося на постоянный отрезок $\frac{\dot{U}}{R}$, совпадающий по направлению с вектором напряжения \dot{U} . Как известно из геометрии, такая точка должна лежать на окружности,



Фиг. 6.3.

для которой постоянный отрезок $\frac{\dot{U}}{R}$ является диаметром. Эта окружность изображена на фиг. 6.3. Диаметр ее $\frac{\dot{U}}{R}$ представляет собой по величине и направлению силу тока при $X=0$, т. е. когда переменное реактивное сопротивление замкнуто накоротко. Если реактивное сопротивление имеет индуктивный характер, ток должен отставать от напряжения, и конец вектора i перемещается по нижней части окружности. Это соответствует положительному значению X в уравнениях (5, 9) и (6, 2). При $X = \infty$, т. е. при разомкнутой цепи, конец вектора i совпадает с точкой O (началом векторов), т. е. ток становится равным нулю. Если же реактивное сопротивление емкостного характера, ток должен опережать напряжение, и конец вектора i перемещается по верхней части окружности. Это соответствует отрицательному значению X в уравнениях (5, 9) и (6, 2). И снова при $X = \infty$ (т. е. при $C=0$) конец вектора i оказывается в точке O . Таким образом при изменении реактивного сопротивления

от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора I описывает полную окружность. Точка O является точкой холостого хода (разомкнутая цепь), а конец вектора $\frac{\dot{U}}{R}$ — точкой короткого замыкания.

Построение такой круговой диаграммы удобнее всего делать на миллиметровке. При этом очень важно выбрать такой масштаб для ее диаметра $\frac{\dot{U}}{R}$, чтобы 1) окружность поместилась на имеющемся листе бумаги, чтобы 2) она не была слишком маленькой, так как это сделает ее непригодной для точных расчетов, и чтобы 3) сам масштаб выражался таким числом ампер в миллиметре, на которое легко будет потом умножать длины различных отрезков для получения абсолютной величины векторов тока. Такими числами являются: 1, 2, 4 и 5, умноженные на 10 в любой целой степени (положительной или отрицательной), например, 0,02; 0,5; 20; 100; 5000 А/мм и т. д.

С помощью простого добавочного построения можно графически определить величину и направление вектора тока, соответствующего тому или иному значению реактивного сопротивления X . Отложив в произвольном масштабе величину постоянного сопротивления R по направлению вектора \dot{U} (отрезок OA) и проведя через полученную точку A перпендикулярную прямую, увидим, что отрезок этой прямой от точки A до точки пересечения этой прямой с вектором I или его продолжением (точка B) изобразит в том же масштабе реактивное сопротивление X . В самом деле, из треугольника OAB имеем

$$AB = OA \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Но $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$, а $R = OA \cdot m_1$, где m_1 — тот масштаб, в котором отрезок OA изображает сопротивление R .

Поэтому

$$X = R \operatorname{tg} \varphi = m_1 \cdot OA \cdot \operatorname{tg} \varphi = m_1 \cdot AB, \quad (6,3)$$

т. е. величина X изображается отрезком AB в масштабе m_1 (Ω/мм). Нанося этот масштаб в виде шкалы вниз и вверх от точки A (вниз — для индуктивных, а вверх — для емкостных сопротивлений) и соединяя различные точки этой шкалы с точкой O , получим на пересечении проводимых лучей с окружностью концы соответствующих векторов тока и можем измерить их абсолютную величину и угол φ .

Если нужно получить из диаграммы не сам угол φ , а его \cos , то наиболее точно это может быть сделано следующим образом:

Приняв точку O за центр, следует провести окружность произвольным радиусом и из точки пересечения этой окружности с вектором I (точка C) или его продолжением (точка C') опустить перпендикуляр на ось ординат (перпендикулярную вектору \dot{U}). Отношение длины этого перпендикуляра (CD или $C'D'$) к длине радиуса равно $\cos \varphi$. Если взять радиус вспомогательной окружности равным 100 мм, то длина перпендикуляра в мм непосредственно выражает $\cos \varphi$ в сотых долях единицы.

По круговой диаграмме можно также легко определить мощность, потребляемую цепью при том или ином реактивном сопротивлении. Эта мощность выражается уравнением

$$P = UI \cos \varphi.$$

Но $I = OS \cdot m$, где m — основной масштаб диаграммы, в котором отложен вектор $\frac{\dot{U}}{R}$. Поэтому $P = Um OS \cos \varphi$. Но $OS \cdot \cos \varphi$ представляет

собой проекцию OS на ось абсцисс или длину перпендикуляра SF , опущенного из точки S на ось ординат, а произведение $U \cdot t$ является постоянной величиной, измеряемой в W/mm , так как масштаб t измеряется в A/mm . Обозначив $m_2 = U \cdot t$, получим

$$P = m_2 \cdot SF, \quad (6,4)$$

т. е. отрезок SF (или $S'F'$) изображает потребляемую мощность в масштабе m_2 .

Если нужно построить кривую зависимости тока или мощности от величины переменного реактивного сопротивления, то удобнее всего для всех величин принять те же масштабы, в которых они изображаются на круговой диаграмме, так как в этом случае построение кривой сводится к переносу на новую диаграмму отрезков, взятых с круговой диаграммы.

Пример 6.1. Цепь с постоянным сопротивлением $R = 8 \Omega$ и переменной индуктивностью включена на напряжение $U = 2000 V$. Построить круговую диаграмму и по ней кривые зависимости тока и потребляемой мощности от величины индуктивного сопротивления.

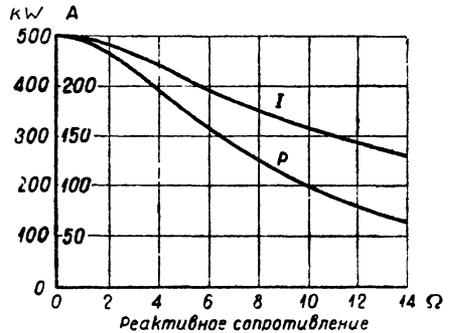
Ток короткого замыкания

$$I_k = \frac{U}{R} = \frac{2000}{8} = 250 A.$$

В масштабе $m = 5 A/mm$ он выразится отрезком в $\frac{250 A}{5 A/mm} = 50 mm$ (фиг. 6,3).

Отложив этот отрезок по направлению вектора \dot{U} (построенного не в масштабе, так как нам важно только его направление), строим на нем, как на диаметре, окружность. Отложив снова по направлению вектора \dot{U} активное сопротивление 8Ω , которое в масштабе $0,2 \Omega/mm$ выразится отрезком длиной $\frac{R}{m} = \frac{8}{0,2} = 40 mm$, наносим на перпендикуляре такую же масштабную шкалу для индуктивных сопротивлений (вниз).

Далее, взяв новые оси координат (фиг. 6,4) и отложив по оси абсцисс такую же масштабную шкалу сопротивлений, а по оси ординат — шкалу токов, соответствующую масштабу $5 A/mm$, переносим на новую диаграмму длины векторов тока, соответствующие различным значениям X . Получаем, таким образом, кривую $I = f(X)$. Для получения кривой мощности откладываем при тех же абсциссах длины соответствующих отрезков SF . Масштаб мощности $m_2 = U \cdot m = 2000 V \times 5 A/mm = 10000 W/mm = 10 kW/mm$. Иначе масштаб мощности может быть определен, пользуясь тем, что наибольшая мощность при коротком замыкании реактивного сопротивления составляет



Фиг. 6, 4.

$$P_k = UI_k = 2000 V \cdot 250 A = 500000 W = 500 kW,$$

так как в этом случае $\varphi = 0$, а $\cos \varphi = 1$. Выражающий эту мощность диаметр окружности равен $50 mm$, поэтому масштаб мощности

$$m_2 = \frac{500 kW}{50 mm} = 10 kW/mm.$$

6.3. Круговая диаграмма цепи с переменным активным и постоянным реактивным сопротивлениями

Если цепь, включенная на неизменное напряжение \dot{U} , имеет постоянное реактивное и переменное активное сопротивления, то и для такой цепи имеет место круговая диаграмма, но окружность располагается иначе, чем в предыдущем случае.

При рассмотрении вопроса снова будем исходить из основного уравнения (5, 9):

$$\dot{U} = iR + jIX$$

(X — положительно в случае цепи с индуктивным сопротивлением и отрицательно в случае цепи с емкостным сопротивлением).

Разделим все члены уравнения на постоянную величину jX и поменяем местами правую и левую части его:

$$\frac{iR}{jX} + i = \frac{\dot{U}}{jX}.$$

Так как деление вектора на j равносильно умножению его на $-j$, то, поменяв местами члены левой части, получим

$$i - j \frac{R}{X} = -j \frac{\dot{U}}{X}. \quad (6, 5)$$

В левой части полученного уравнения мы видим снова сумму двух переменных векторов, второй из которых отстает от первого на 90° , а в правой части — постоянный вектор $-j \frac{\dot{U}}{X}$, отстающий от U на 90° и являющийся диаметром окружности, по которой может перемещаться конец вектора i . Эта окружность представлена на фиг. 6,5 (нижняя окружность). Так как ток не может отставать от напряжения больше чем на 90° , левая половина окружности, на которой не может находиться конец вектора тока, изображена пунктиром. Правая (сплошная) половина окружности является ее рабочей дугой. Конец основного диаметра $-j \frac{\dot{U}}{X}$ дает точку короткого замыкания. Начало векторов O является точкой холостого хода.

Чтобы получить вектор i , соответствующий определенному значению сопротивления R , откладываем в произвольном масштабе постоянное индуктивное сопротивление X вниз по оси ординат (отрезок OA) и из конца полученного отрезка проводим прямую, параллельную вектору \dot{U} , на которой и наносим шкалу сопротивлений в том же самом масштабе. Отрезок OB этой прямой до пересечения ее с вектором i или его продолжением изображает в нанесенном масштабе соответствующее сопротивление R . Это легко может быть доказано самим читателем по аналогии с разобранным на стр. 260.

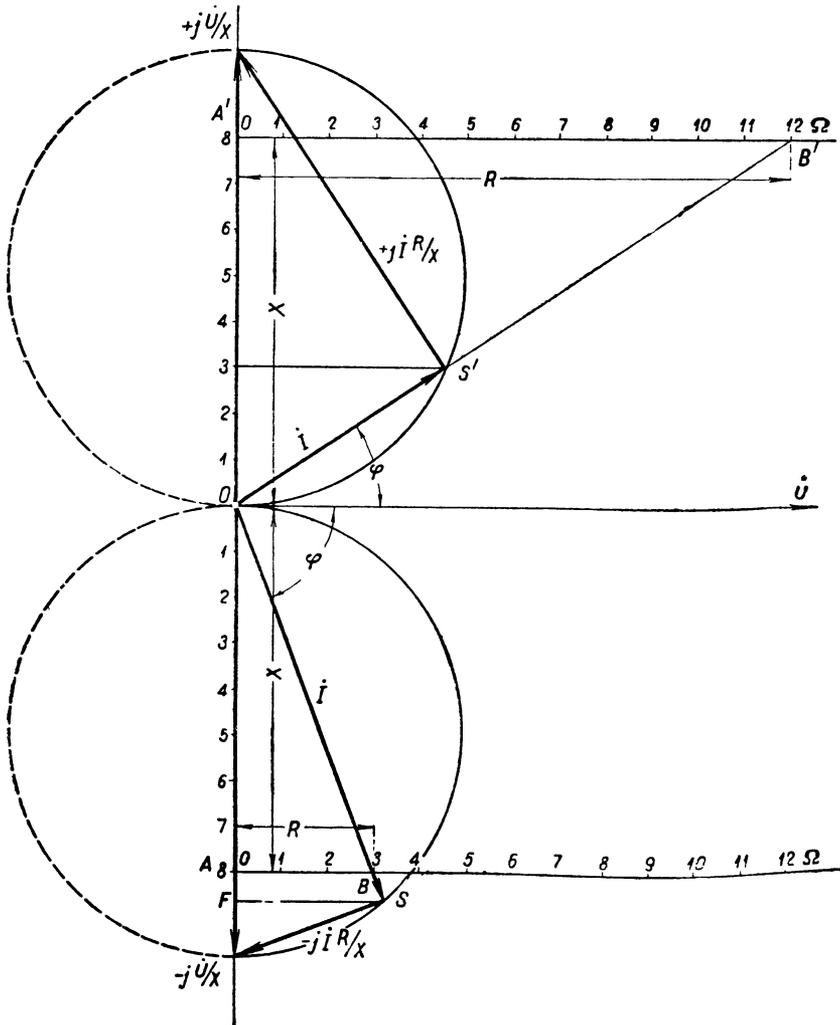
В случае емкостного сопротивления X будет отрицательным и может быть обозначено так: $X = -|X|$, где $|X|$ — абсолютная величина реактивного сопротивления. Вводя это обозначение в (6, 5), получим

$$i + j \frac{R}{|X|} = +j \frac{\dot{U}}{|X|}. \quad (6, 6)$$

Это уравнение отличается от уравнения (7, 5) знаками двух членов. В силу этого при построении круговой диаграммы основным диаметром окружности, равный $+j \frac{\dot{U}}{|X|}$, нужно откладывать под углом 90° к вектору \dot{U}

в сторону опережения. Рабочей дугой и в этом случае будет только правая (сплошная) половина окружности.

Построение масштаба для переменного сопротивления R отличается в этом случае только тем, что постоянное реактивное сопротивление X откладывается вверх, а не вниз.



Фиг. 6, 5.

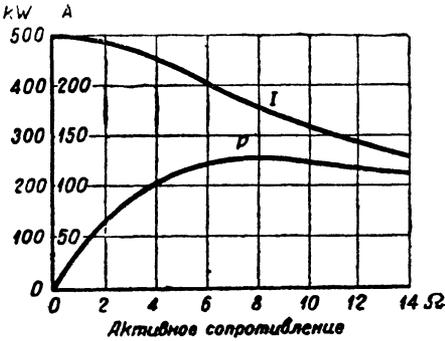
Определение потребляемой мощности и $\cos \varphi$ производится в обоих случаях совершенно так же, как в цепи с постоянным R и переменным X . (На фиг. 6,5 вспомогательная окружность для определения $\cos \varphi$ не показана.)

Пример 6.2. Цепь с постоянным индуктивным сопротивлением $X = 8 \text{ } \Omega$ и переменным омическим включена на напряжение $\dot{U} = 2000 \text{ V}$. Построить круговую диаграмму и по ней кривые зависимости тока и потребляемой мощности от величины омического сопротивления.

Ток короткого замыкания $I_k = \frac{U}{X} = \frac{2000 \text{ V}}{8 \text{ } \Omega} = 250 \text{ A}$. В масштабе

$m = 5 \text{ A/mm}$ он выразится отрезком в $\frac{250 \text{ A}}{5 \text{ A/mm}} = 50 \text{ mm}$ (фиг. 6, 5). Отложив этот

отрезок от точки O под углом 90° к \dot{U} в сторону отставания, строим на нем, как на диаметре, полуокружность (сплошную). Отложив на построенном диаметре индуктивное сопротивление 8Ω , которое в масштабе $0,2 \Omega/\text{mm}$ выразится отрезком длиной 40 mm , наносим на перпендикуляре к этому отрезку (т. е. на



Фиг. 6, 6.

прямой, параллельной \dot{U}) такую же масштабную шкалу для активного сопротивления. С помощью знакомого уже нам метода строим по круговой диаграмме кривые $I = f(R)$ и $P = f_1(R)$, изображенные на фиг. 6, 6, сохраняя для всех величин те же масштабы, в которых они откладывались или получались на круговой диаграмме.

Сравнивая эти кривые с кривыми, полученными в примере 6, 1, где были взяты те же числовые значения напря-

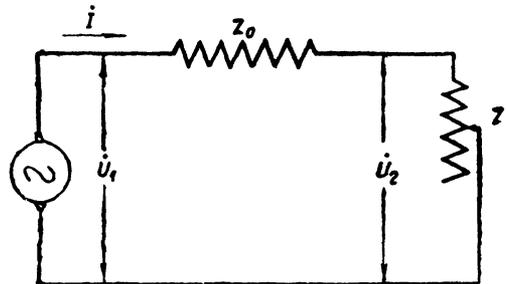
жения и постоянного сопротивления, видим, что кривые тока получились в обоих случаях одинаковыми, тогда как кривая мощности носит в данном случае совершенно иной характер, чем в цепи с постоянным R , начинаясь здесь с нуля, проходя через максимум и далее асимптотически снижаясь до нуля. Величина максимума мощности соответствует, очевидно, радиусу круговой диаграммы и равна

$$P = U \frac{I_k}{2} = U \frac{U}{2X} = \frac{U^2}{2X}.$$

Как видно из построения, она имеет место при $\varphi = 45^\circ$, т. е. при $R = X$, в нашем случае при $R = 8 \Omega$.

6.4. Круговая диаграмма цепи с переменной нагрузкой при постоянном $\cos \varphi$ потребителя

Часто бывает, что цепь, обладающая постоянным сопротивлением Z_0 , передает энергию приемнику, имеющему переменное сопротивление Z , т. е. работающему с переменной нагрузкой, но сохраняющему постоянным $\cos \varphi$ (фиг. 6, 7). Если при этом напряжение на первичных зажимах цепи \dot{U}_1 остается постоянным, то, как сейчас будет доказано, конец вектора тока и в этом случае перемещается по окружности.



Фиг. 6, 7.

Представим Z_0 и Z в показательной форме:

$$Z_0 = z e^{j\varphi_0} \text{ и } Z = z e^{j\varphi},$$

где z_0 , φ_0 и φ являются постоянными величинами, а z — переменной величиной.

Общее сопротивление цепи

$$Z_{\text{общ}} = Z_0 + Z = z_0 e^{j\varphi_0} + z e^{j\varphi}$$

и по закону Ома

$$\dot{U}_1 = i(Z_0 + Z),$$

или

$$i z_0 e^{j\varphi_0} + i z e^{j\varphi} = \dot{U}_1. \tag{6, 7}$$

Деля обе части этого уравнения на постоянную величину $z_0 e^{j\varphi_0}$, получим

$$i + i \frac{z}{z_0} e^{j(\varphi - \varphi_0)} = \frac{\dot{U}_1}{z_0} e^{-j\varphi_0}. \tag{6, 8}$$

Правая часть полученного уравнения является постоянной величиной и представляет собой не что иное, как ток I_k при коротком замыкании потребителя, когда в цепи остается одно сопротивление Z_0 :

$$i_k = \frac{\dot{U}_1}{Z_0} = \frac{\dot{U}_1}{z_0} e^{-j\varphi_0}. \tag{6, 9}$$

Левая часть уравнения состоит из двух слагаемых переменных векторов, второй из которых опережает первый на постоянный угол $\varphi - \varphi_0$. (Если $\varphi < \varphi_0$, то имеет место опережение на отрицательный угол $\varphi - \varphi_0$ или отставание на положительный угол $\varphi_0 - \varphi$.) Эти два вектора являются, следовательно, сторонами постоянного угла, опирающегося на постоянный отрезок \dot{I}_k . Как известно из геометрии, вершина такого угла (т. е. конец вектора \dot{I}) должна лежать на окружности, проходящей через концы вектора \dot{I}_k .

Для построения этой окружности необходимо найти ее центр. Для этого у нас есть следующие данные (фиг. 6, 8):

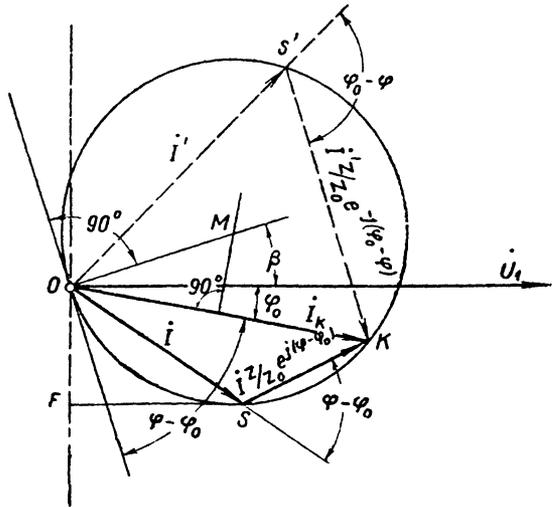
1) окружность проходит через начало векторов O (точка холостого хода);

2) окружность проходит через конец K известного вектора \dot{I}_k , сдвинутого относительно \dot{U}_1 на угол φ_0 (точка короткого замыкания), и

3) постоянство угла между продолжением вектора \dot{I} , проведенного в любую точку S рабочей дуги и отрезком SK , соединяющим эту точку с точкой короткого замыкания и выражающим вектор $i \frac{z}{z_0} e^{j(\varphi - \varphi_0)}$. Этот угол равен $\varphi - \varphi_0$.

Последнее условие может быть выражено иначе. Если точка S , перемещаясь по рабочей дуге, приближается к точке O , то в предельном положении направление линии OS совпадает с направлением касательной к окружности в точке O , а отрезок SK — с вектором \dot{I}_k , угол же между ними остается равным $\varphi - \varphi_0$. Так как сам вектор \dot{I}_k отстает от \dot{U}_1 на угол φ_0 , то угол между касательной и вектором \dot{U}_1 равен $\varphi - \varphi_0 + \varphi_0 = \varphi$.

Отыскание центра круговой диаграммы сводится теперь к следующим построениям:



Фиг. 6, 8.

Через точку O проводим прямую под углом φ к вектору \dot{U}_1 , откладывая этот угол в сторону отставания, если он положительный. Центр должен находиться, во-первых, на перпендикуляре к этой прямой в точке O , так как касательная всегда перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, а во-вторых, на перпендикуляре к вектору \dot{I}_k , восстановленному в его середине, так как он является хордой искомой окружности. Построив эти два перпендикуляра, находим на пересечении их центр окружности M .

По построению видно, что угол между вектором \dot{U}_1 и радиусом, проведенным в точку O ,

$$\beta = 90^\circ - \varphi, \quad (6, 10)$$

причем положительные углы β откладываются от вектора \dot{U}_1 в сторону опережения, а отрицательные — в сторону отставания. Пользуясь формулой (6, 10), можно избежать построения касательной к окружности и упростить таким образом нахождение центра.

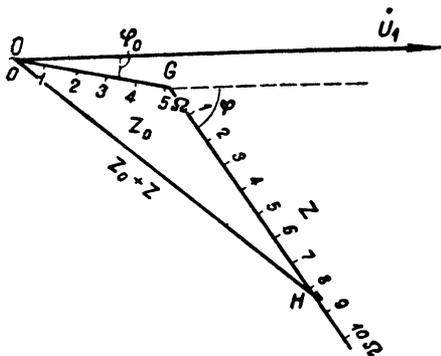
Найдя центр и построив круговую диаграмму, нужно еще выяснить, какая из двух частей ее между точками O и K является рабочей дугой. Если угол $\varphi - \varphi_0$ положителен, то отрезок SK опережает на этот угол отрезок OS . Это может быть только в том случае, если OS отстает от OK , т. е. смотря из точки O вдоль вектора \dot{I}_k , мы будем иметь рабочую дугу справа. При отрицательном угле $\varphi - \varphi_0$ отрезок SK должен отставать от OS , и рабочая дуга будет расположена влево от \dot{I}_k .

Есть и более простой способ определения рабочей дуги. Как и в рассмотренных ранее круговых диаграммах, потребляемая цепью мощность выражается отрезком SF . Так как эта мощность по сути дела не может быть отрицательной, то точка S не может оказаться влево от пунктирной прямой, проведенной через точку O перпендикулярно к \dot{U}_1 , т. е. рабочей дугой является та часть окружности, которая не пересекает этой прямой. Если вектор \dot{U}_1 проходит через центр окружности M , пунктирная прямая не пересекает окружности, а совпадает с касательной, проходящей через точку O .

В этом частном случае рабочая дуга распространяется на всю окружность (см. фиг. 6, 3).

Рассмотренная цепь является обобщением ранее разобранных цепей с переменным X и с переменным R , круговые диаграммы которых являются частными случаями круговой диаграммы данной цепи.

Направление вектора тока, соответствующего тому или иному значению переменного сопротивления Z , может быть найдено следующим графическим построением (показано отдельно от круговой диаграммы на фиг. 6, 9). Общее сопротивление цепи $Z_0 + Z$ может быть найдено путем графического сложения постоянного сопротивления $Z_0 = z_0 e^{j\varphi_0}$ и переменного сопротивления $Z = z e^{j\varphi}$. Условившись для данного вспомогательного построения считать положительным поворот векторов по часовой стрелке, отложим в произвольном масштабе постоянную величину Z_0 в виде отрезка OG под углом φ_0 к вектору \dot{U}_1 (вниз, если φ_0 положительно), т. е. по направлению вектора \dot{I}_k и проведем из точки



Фиг. 6, 9.

Г прямую под углом φ к \dot{U}_1 , нанеся на ней шкалу в том же масштабе, в котором отложено z_0 . При каком-нибудь сопротивлении Z , выражаемом в этом масштабе отрезком **ГН**, полное сопротивление цепи $Z_0 + Z$ изобразится отрезком **ОН**, направление которого совпадает с направлением соответствующего вектора \dot{I} . Таким образом, если наложить фиг. 6, 9 на фиг. 6, 8, точка пересечения отрезка **ОН** (или его продолжения) с окружностью представит собой конец вектора \dot{I} , соответствующего данному значению Z .

6. 5. Определение вторичного напряжения и вторичной мощности по круговой диаграмме

Круговая диаграмма позволяет весьма просто определять значения напряжения U_2 на зажимах приемника и потребляемой им мощности P_2 при любом значении тока I или сопротивления приемника Z .

Отрезок **СК** на круговой диаграмме (фиг. 6, 8) изображал в основном масштабе m вектор $\dot{I} \frac{Z}{z_0}$, т. е. по абсолютной величине

$$SK \cdot m = I \frac{Z}{z_0}.$$

Но $\dot{I}Z = \dot{U}_2$ и, следовательно, $Iz = U_2$. Поэтому

$$SK \cdot m = \frac{U_2}{z_0},$$

или

$$U_2 = SK \cdot m \cdot z_0.$$

Приняв постоянную величину mz_0 за новый масштаб

$$m_3 = mz_0, \tag{6, 11}$$

получим

$$U_2 = \overline{SK} \cdot m_3, \tag{6, 12}$$

т. е. отрезок **СК** в масштабе m_3 выражает вторичное напряжение U_2 (по величине, но не по направлению).

Следует при этом обратить внимание на то, что размерность масштаба изменилась в соответствии с изменившейся природой, изображаемой в этом масштабе величины. Действительно, размерность масштаба m была

$$[m] = A/mm,$$

а размерность нового масштаба m_3

$$[m_3] = [m] [z_0] = \frac{A}{mm} \cdot \Omega = V/mm.$$

Получаемая приемником мощность P_2 (вторичная мощность) выражается известной формулой

$$P_2 = U_2 I \cos \varphi,$$

где φ — тот самый угол, через который было выражено в показательной форме переменное сопротивление $Z = ze^{j\varphi}$. Подставляя сюда

$$U_2 = \overline{SK} \cdot m_3$$

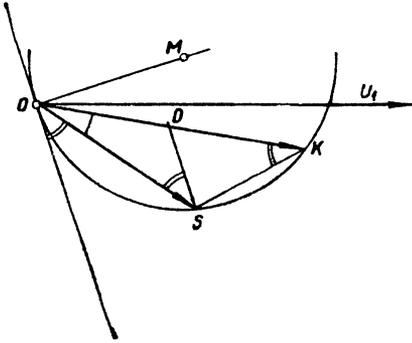
и

$$I = OS \cdot m,$$

получим

$$P_2 = SK \cdot OS \cdot m_3 \cdot m \cdot \cos \varphi.$$

Вторичная мощность представилась таким образом в виде произведения двух переменных отрезков, умножаемого затем на несколько постоянных величин. Удобнее, однако, выразить P_2 каким-нибудь одним переменным отрезком, и это, как сейчас увидим, возможно.



Фиг. 6, 10.

Проведем из точки S (фиг. 6, 10) прямую, параллельную касательной в точке O , т. е. перпендикулярную к радиусу OM до пересечения в точке D с постоянным отрезком OK . Получившийся треугольник ODS подобен треугольнику OSK , так как угол O является общим для обоих треугольников, а угол S первого треугольника или равный ему угол между отрезком OS и касательной в точке O измеряется половиной той же дуги, что и вписанный угол K второго

треугольника. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{SD}{SK} = \frac{OS}{OK},$$

или

$$SK \cdot OS = SD \cdot OK.$$

Подставляя это выражение в найденное выше уравнение для P_2 , получим

$$P_2 = SD \cdot OK \cdot m_3 \cdot m \cdot \cos \varphi.$$

Так как

$$OK \cdot m = I_k = \frac{U_1}{z_0},$$

или

$$OK = \frac{U_1}{mz_0} = \frac{U_1}{m_3},$$

то

$$P_2 = SD \cdot \frac{U_1}{m_3} m_3 m \cos \varphi,$$

или

$$P_2 = SD \cdot m_4, \quad (6, 13)$$

где

$$m_4 = U_1 m \cos \varphi \quad (6, 14)$$

представляет собой новый масштаб, в котором отрезок SD выражает вторичную мощность. Так как масштаб первичной мощности $m_2 = U \cdot m$, то

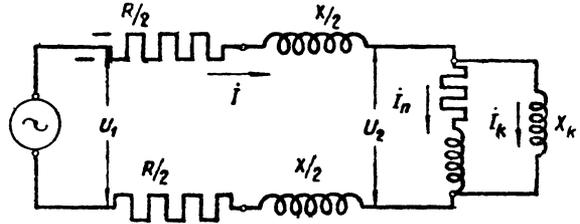
$$m_4 = m_2 \cos \varphi. \quad (6, 15)$$

В частном случае, когда $\cos \varphi = 1$ и переменное сопротивление потребителя является чисто активным, $m_4 = m_2$, т. е. обе мощности измеряются соответствующими отрезками в одинаковом масштабе.

6.6. Регулирование напряжения с помощью реактивного тока

Как пример графического решения практической задачи, рассмотрим вопрос о регулировании напряжения в конце линии электропередачи с помощью реактивного тока, расходуемого почти чисто реактивным приемником — компенсатором, включенным параллельно потребителю (фиг. 6, 11).

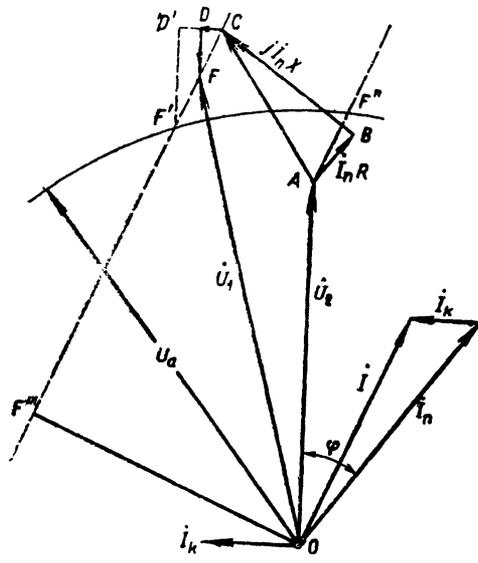
Таким компенсатором служит большей частью ненагруженный синхронный электродвигатель (по устройству ничем не отличающийся от генератора). Изменение возбуждающего тока, проходящего по обмотке его полюсов, вызывает изменение индуктируемой в его якоре э. д. с. и таким образом влияет на сдвиг фаз между током и напряжением. При слабом возбуждении двигатель потребляет отстающий от напряжения ток, а при сильном — опережающий.



Фиг. 6, 11.

Задача регулирования напряжения при заданном постоянном напряжении U_1 в начале линии и изменяющейся нагрузке I_n потребителя

поддерживать на его зажимах постоянное напряжение U_2 , обычно более низкое, чем U_1 (как увидим дальше, напряжение U_2 может быть и выше, чем U_1). Построение векторной диаграммы (фиг. 6, 12) удобнее начинать с напряжения U_2 , которое, как и U_1 , является заданным. Однако угол между векторами \dot{U}_1 и \dot{U}_2 остается неизвестным. Ток \dot{I}_n отстает на угол φ от напряжения \dot{U}_2 . При отсутствии компенсатора падение напряжения в линии представится суммой векторов $AB = I_n R$ и $BC = jI_n X$, где R — активное, а X — индуктивное сопротивление обоих проводов линии. При наличии компенсатора к току \dot{I}_n прибавляется ток \dot{I}_k компенсатора, который в зависимости от возбуждающего тока опережает \dot{U}_2 или отстает от него на 90° . Таким образом ток в линии



Фиг. 6, 12.

опережает \dot{U}_2 или отстает от него на 90° . Таким образом ток в линии

$$\dot{i} = \dot{I}_n + \dot{I}_k,$$

и падение напряжения в ней

$$\Delta \dot{U} = \dot{I}R + j\dot{I}X = (\dot{I}_n + \dot{I}_k)R + j(\dot{I}_n + \dot{I}_k)X = \dot{I}_n R + j\dot{I}_n X + \dot{I}_k R + j\dot{I}_k X.$$

Первые два члена полученного выражения представляют собой падение напряжения в линии при отсутствии компенсатора (отрезок AC на векторной диаграмме). Для получения напряжения \dot{U}_1 остается, следовательно, прибавить в точке C вектор падения напряжения от реактивного тока компенсатора, активная слагающая которого $CD = \dot{I}_k R$ опережает \dot{U}_2 на 90° , а индуктивная DF направлена противоположно \dot{U}_2 (рассматривается случай работы компенсатора с опережающим током). Если ток \dot{I}_k уве-

личить, то во столько же раз увеличатся оба катета треугольника CDF , углы же его останутся без изменения, и точка F —конец вектора U_1 —переместится по пунктирной прямой, являющейся продолжением отрезка CF . Напряжение U_1 при этом будет меньше.

Нетрудно определить ток I_k , при котором напряжение U_1 будет иметь заданную величину U_a . Засечем пунктирную прямую дугой радиуса U_a с центром в точке O . Точка пересечения F' явится концом вектора U_1 , и в то же время отрезок CF' представит собой в том же масштабе величину $I_k z$, где z —полное сопротивление линии. Деля эту величину на z , получим реактивный ток компенсатора. Чтобы не вводить в расчет новую величину z , можно из точки F' опустить перпендикуляр на направление катета CD . Длина этого перпендикуляра

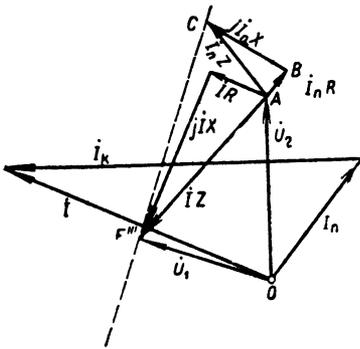
$$DF = I_k X,$$

откуда уже легко найти I_k .

Подобным же образом можно найти необходимый ток компенсатора при другой нагрузке потребителя. В частности, при холостом ходе треугольник ABC исчезнет, и точка C совпадет с точкой A , направление же отрезка CF будет параллельно прежнему. Проводя поэтому из точки A прямую параллельно CF , на пересечении ее с дугой радиуса U_a найдем новое положение F'' конца вектора U_1 и по длине отрезка AF'' (или его вертикальной слагающей) определяем величину I_k . В нашем случае I_k получается уже отстающим от напряжения U_2 , т. е. компенсатор при холостом ходе должен потреблять отстающий ток (он должен быть слабо возбужден).

Из построения, проведенного для нахождения точки F' , видно, что напряжение U_1 может быть выбрано и меньше, чем U_2 , лишь бы соответствующая дуга пересекала пунктирную прямую. Минимальное значение U_1 выражается, очевидно, длиной перпендикуляра OF''' , опущенного из точки O на пунктирную прямую. Таким образом в конце линии можно поддерживать напряжение U_2 , даже значительно превышающее напряжение центральной станции. Здесь происходит в сущности то же самое явление, которое в еще более резкой форме уже знакомо нам под названием резонанса напряжений и которое может иметь место при последовательном соединении индуктивности и емкости. В самом деле, для получения малого U_1 необходимо иметь настолько большой опережающий ток компенсатора, что суммарный ток в линии I_1 становится опережающим по

отношению к напряжению U_2 . Процесс, следовательно, происходит так, как будто в конце линии вместо потребителя и компенсатора включен эквивалентный приемник, содержащий активное сопротивление и емкость. Последовательное соединение этой емкости с индуктивностью линии и дает повышение напряжения на приемнике по сравнению с напряжением станции. На фиг. 6,13 представлена векторная диаграмма для случая минимального напряжения U_1 . Напряжение U_1 получается здесь как сумма напряжения U_2 и падения напряжения iZ в линии от суммарного тока $i = i_n + i_k$. Ток компенсатора i_k получается в этом случае очень большой. Дальнейшее же его увеличение будет соответствовать еще более низкому положению точки F''' на пунктирной прямой и большему, а не меньшему значению напряжения U_1 .



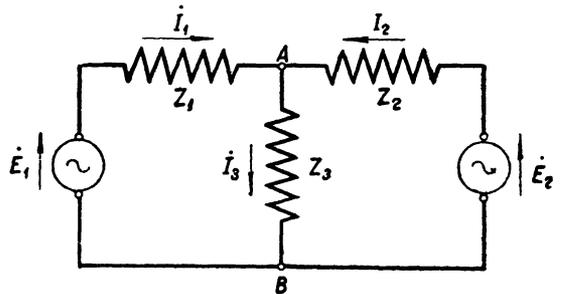
Фиг. 6,13.

ГЛАВА 7

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

7.1. Принцип наложения

Так же как расчеты сложных цепей постоянного тока, исследование сложных цепей переменного тока часто может быть значительно упрощено путем применения принципа наложения (см. гл. 1). Конечно, при переменном токе мы должны рассматривать напряжения, токи и сопротивления как комплексные величины и вести вычисления согласно правилам символического метода. Порядок расчета остается здесь тот же, что и для постоянного тока. Сначала определяем токи, создаваемые независимо каждой из э. д. с., действующих в исследуемой цепи. Затем, учитывая относительное направление, складываем или вычитаем токи, создаваемые каждой э. д. с. на одном и том же участке цепи, и таким путем определяем токи, создаваемые в исследуемой цепи совместным действием всех имеющихся в ней э. д. с.



Фиг. 7, 1.

Пример 7.1. В цепи, изображенной на фиг. 7, 1,

$\dot{E}_1 = 120 \text{ V}$; $\dot{E}_2 = 110 \angle -10^\circ \text{ V}$;
 $Z_1 = 3 + j4 \ \Omega$; $Z_2 = 2 + j1,5 \ \Omega$;
 $Z_3 = 20 + j0 \ \Omega$. Определить токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .

Находим сперва токи от э. д. с. $\dot{E}_1 = 120 \text{ V}$. Общее сопротивление цепи в этом случае:

$$\begin{aligned} Z' &= Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 3 + j4 + \frac{(2 + j1,5) \cdot 20}{2 + j1,5 + 20} = 3 + j4 + \frac{(2 + j1,5) \cdot 20}{22 + j1,5} = \\ &= 3 + j4 + \frac{2,5e^{j36^\circ 50'} \cdot 20}{22e^{j3^\circ 50'}} = 3 + j4 + 2,27e^{j33^\circ} = 3 + j4 + 1,91 + j1,24 = \\ &= 4,91 + j5,24 = 7,18 \angle 47^\circ \text{ ома.} \end{aligned}$$

Ток

$$\dot{I}'_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z'} = \frac{120}{7,18e^{j47^\circ}} = 16,7e^{-j47^\circ} = 11,4 - j12,3 \text{ A.}$$

Напряжение между точками A и B

$$\dot{U}'_{AB} = \dot{I}'_1 Z_3 = 16,7e^{-j47^\circ} \cdot 20 = 334e^{-j47^\circ} \text{ V,}$$

и токи

$$i_2' = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_2} = \frac{37,9e^{-j14^\circ}}{2,5e^{j36^\circ 50'}} = 15,2e^{-j50^\circ 50'} = 9,6 - j11,8 \text{ A}$$

и

$$i_3' = \frac{\dot{U}'_{AB}}{Z_3} = \frac{37,9e^{-j14^\circ}}{20} = 1,9e^{-j14^\circ} = 1,8 - j0,5 \text{ A},$$

причем в качестве положительного направления тока i_2' принято направление, противоположное указанному стрелкой на фиг. 7, 1.

Затем находим токи от э. д. с. $\dot{E}_2 = 110e^{-j10^\circ} \text{ V}$. В этом случае будет уже другое общее сопротивление:

$$\begin{aligned} Z'' &= Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = 2 + j1,5 + \frac{(3 + j4)20}{3 + j4 + 20} = 2 + j1,5 + \frac{(3 + j4)20}{23 + j4} = \\ &= 2 + j1,5 + \frac{5e^{j53^\circ 10'} \cdot 20}{23,2e^{j9^\circ 50'}} = 2 + j1,5 + 4,31e^{j43^\circ 20'} = 2 + j1,5 + 3,13 + j2,96 = \\ &= 5,13 + j4,46 = 6,78 \angle 41^\circ \Omega. \end{aligned}$$

Ток

$$i_2'' = \frac{\dot{E}_2}{Z''} = \frac{110e^{-j10^\circ}}{6,78e^{j41^\circ}} = 16,2e^{-j51^\circ} = 10,2 - j12,6 \text{ A}.$$

Напряжение между точками A и B

$$\dot{U}'_{AB} = i_2'' Z_{13} = 16,2e^{-j51^\circ} \cdot 4,31e^{j43^\circ 20'} = 69,7e^{-j7^\circ 40'} \text{ V},$$

и токи

$$i_1'' = \frac{\dot{U}'_{AB}}{Z_1} = \frac{69,7e^{-j7^\circ 40'}}{5e^{j53^\circ 10'}} = 13,9e^{-j60^\circ 50'} = 6,8 - j12,2 \text{ A}$$

и

$$i_3'' = \frac{\dot{U}'_{AB}}{Z_3} = \frac{69,7e^{-j7^\circ 40'}}{20} = 3,48e^{-j7^\circ 40'} = 3,4 - j0,4 \text{ A},$$

причем в качестве положительного направления тока i_1'' принято направление, противоположное указанному стрелкой на фиг. 7, 1.

Складывая теперь одинаково направленные и вычитая противоположно направленные токи одного и того же участка, найдем искомые токи:

$$i_1 = i_1' - i_1'' = 11,4 - j12,3 - (6,8 - j12,2) = 4,6 - j0,1 = 4,6 \angle -1^\circ 20' \text{ A};$$

$$i_2 = i_2'' - i_2' = 10,2 - j12,6 - (9,6 - j11,8) = 0,6 - j0,8 = 1 \angle -53^\circ 10' \text{ A};$$

$$i_3 = i_3' + i_3'' = 1,8 - j0,5 + 3,4 - j0,4 = 5,2 - j0,9 = 5,3 \angle -10^\circ \text{ A}.$$

Если подсчет сделан правильно, то $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Подставляя цифры, находим

$$\dot{I}_3 = 4,6 - j0,1 + 0,6 - j0,8 = 5,2 - j0,9 \text{ A},$$

как мы и получили.

Принцип наложения может быть применен также и для определения изменений тока, вызываемых изменением постоянных самой цепи, как, например, включением или выключением одного из участков или изменением сопротивления всей цепи. Во всех этих случаях, вводя некоторые фиктивные э. д. с., определенным образом выбранные, можно рассматривать процесс в измененной цепи как результат наложения токов, вызванных фиктивной э. д. с., на токи, имевшие место до наступления изменения в цепи.

В следующих параграфах подробно разобраны основные случаи изменения постоянных цепи.

7.2. Выключение одного из участков цепи

Если выключается какой-либо участок цепи S (фиг. 7,2,а) с полным сопротивлением Z_s , по которому протекал ток I_s и с э. д. с. E_s (которая в частном случае может равняться нулю), то влияние этого выключения на распределение тока по всем остальным участкам может быть проще всего учтено следующим образом:

Напряжение между концами участка до его выключения ¹

$$\dot{U}_s = I_s Z_s - \dot{E}_s,$$

если \dot{E}_s имеет одинаковое направление с I_s . Ток в участке S может прекратиться не только вследствие его выключения, но и благодаря введению в него нового источника тока

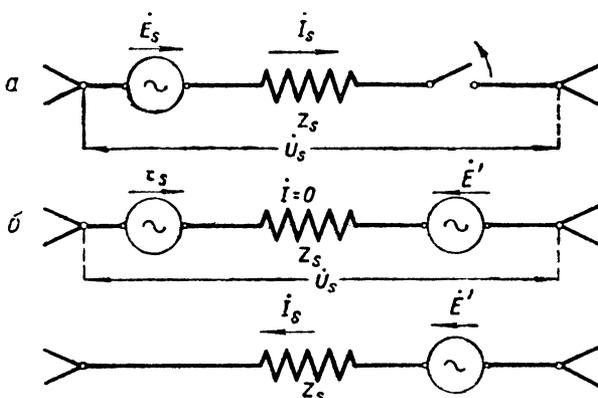
(фиг. 7,2,б) с такой э. д. с. \dot{E}' , которая сама по себе создала бы в участке S ток, равный I_s , но противоположно направленный. Очевидно,

$$\dot{E}' = -I_s (Z_s + Z_{\text{ока}}), \quad (7,1)$$

где $Z_{\text{ока}}$ обозначает эквивалентное сопротивление всех остальных участков цепи току I_s .

При введении э. д. с. \dot{E}' токи во всех участках цепи получатся такие же, как и при выключении участка S .

Полученную систему по принципу наложения можно представить как сумму двух систем, первая из которых содержит \dot{E}_s и все э. д. с. прочих участков, т. е. является данной нам системой до выключения, а вторая содержит только одну э. д. с. \dot{E}' (фиг. 7,2,в). Токи во всех участках от этой э. д. с. и представляют собой влияние выключения участка S на распределение токов в цепи.



Фиг. 7,2.

Пример 7.2. Потребитель Z_3 (фиг. 7,3) получает ток от двух генераторов при напряжении $\dot{U} = 220$ V. Первый генератор имеет сопротивление $Z_1 = 0,5 \angle 50^\circ \Omega$ и дает ток $40 \angle -30^\circ$ A, а второй имеет сопротивление $Z_2 = 0,3 \angle 50^\circ \Omega$ и дает ток $60 \angle -60^\circ$ A. Как изменится ток потребителя, если второй генератор выключить?

При работе обоих генераторов ток потребителя

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 40e^{-j30^\circ} + 60e^{-j60^\circ} = 34,6 - j20 + 30 - j52 = 64,6 - j72 = \\ &= 96,8 \angle -48^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

При выключении второго генератора на этот ток наложится ток от фиктивной э. д. с. (фиг. 7,4):

$$\dot{E}' = -\dot{I}_2 (Z_2 + Z_{\text{ока}}),$$

¹ За положительное принято для всех величин направление слева направо.

где

$$Z_{\text{оке}} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}.$$

Соответствующее напряжение на клеммах потребителя

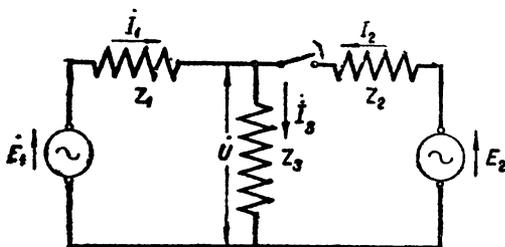
$$\dot{U}' = \dot{E}' - (-i_2 Z_2) = -i_2 (Z_2 + Z_{\text{оке}}) + i_2 Z_2 = -i_2 Z_{\text{оке}}.$$

С другой стороны,

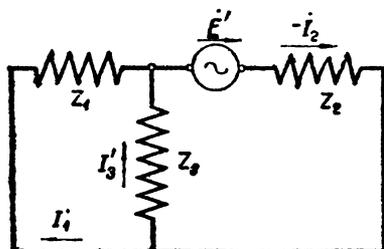
$$\dot{U}' = i_3' Z_3,$$

где i_3' — ток потребителя от э. д. с. \dot{E}' . Поэтому

$$i_3' Z_3 = -i_2 Z_{\text{оке}},$$



Фиг. 7, 3.



Фиг. 7, 4.

откуда

$$i_3' = -i_2 \frac{Z_{\text{оке}}}{Z_3} = -i_2 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}.$$

Сопротивления

$$Z_3 = \frac{\dot{U}}{i_3} = \frac{220}{96,8e^{-j48^\circ}} = 2,27e^{j48^\circ} = 1,52 + j1,69 \Omega;$$

$$Z_1 = 0,5e^{j60^\circ} = 0,32 + j0,38 \Omega;$$

$$Z_1 + Z_3 = 1,52 + 0,32 + j(1,69 + j0,38) = 1,84 + j2,07 = 2,77e^{j48^\circ} \Omega.$$

Следовательно,

$$i_3' = -60e^{-j80^\circ} \frac{0,5e^{j60^\circ}}{2,77e^{j48^\circ}} = -10,8e^{-j68^\circ} = -5,7 + j9,2 \text{ A.}$$

Ток потребителя при выключении второго генератора будет

$$i_3'' = i_3 + i_3' = 64,6 - j72 - 5,7 + j9,2 = 58,9 - j62,8 = 86 \angle -47^\circ \text{ A.}$$

7.3. Включение в цепь нового участка

Если между двумя точками какой-либо цепи включается новый участок S с полным сопротивлением Z_s , содержащий источник с э. д. с. \dot{E}_s или не содержащий никакого источника тока ($\dot{E}_s = 0$), то распределение токов во всей цепи изменится, и новое распределение может быть найдено следующим образом:

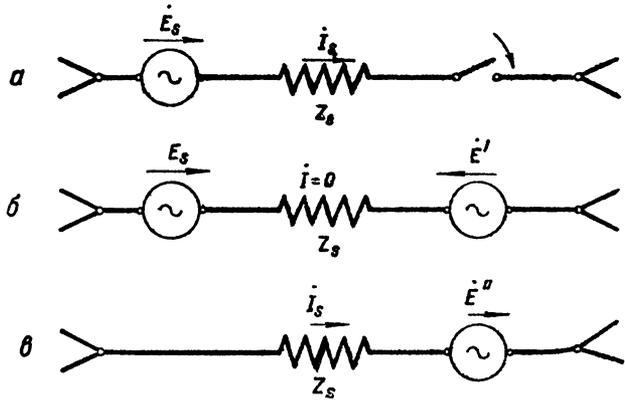
Представим себе, что участок S (фиг. 7,5) уже включен. Введя в него (фиг. 7,5,б) э. д. с.

$$\dot{E}' = -(\dot{U}_s + \dot{E}_s), \quad (7,2)$$

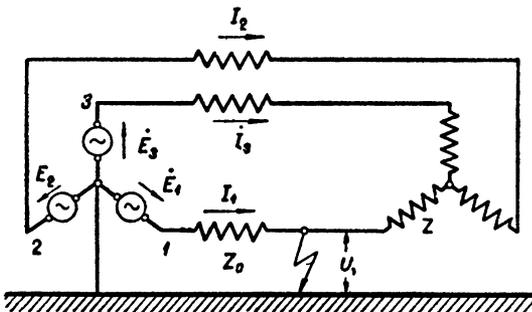
где \dot{U}_s — напряжение на концах участка S , когда он выключен, мы тем самым прекратим ток в этом участке, а в остальных участках получим такие же токи, какие в них текут при выключенном участке S . Введем теперь в этот участок вторую фиктивную э. д. с. \dot{E}'' , равную \dot{E}' , но противоположно направленную.

Она уничтожит действие \dot{E}' , и мы получим ту систему, в которой ищем распределение токов. При этом, пользуясь принципом наложения, мы можем искать токи, вызванные только одной э. д. с. \dot{E}_s'' (фиг. 7, 5, в), чтобы наложить их затем на токи, имевшие место до включения участка.

Пример 7.3. Три генератора имеют одинаковые по величине, но взаимно сдвинутые на $\pm 120^\circ$ э. д. с. $E = 1000$ V и соединены, как показано на фиг. 7, 6. Внутреннее сопротивление каждого генератора $Z_0 = 0,5 + j2$ ома. Потребитель состоит из трех одинаковых сопротивлений $Z = 16 + j12$ омов. Определить ток в месте замыкания на землю одного из проводов.



Фиг. 7.5.



Фиг. 7.6.

1) Нормальный режим. По законам Кирхгофа

$$\dot{E}_1 - \dot{E}_3 = i_1(Z_0 + Z) - i_3(Z_0 + Z);$$

$$\dot{E}_2 - \dot{E}_3 = i_2(Z_0 + Z) - i_3(Z_0 + Z);$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Определяя из первых двух уравнений i_1 и i_2 найдем

$$i_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_3}{Z_0 + Z} + i_3;$$

$$i_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{E}_3}{Z_0 + Z} + i_3.$$

Складывая эти два уравнения и имея в виду, что $i_1 + i_2 = -i_3$, получаем

$$\frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_3 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3}{Z_0 + Z} + 3i_3 = 0,$$

или

$$3i_3 = \frac{2\dot{E}_3 - (\dot{E}_1 + \dot{E}_2)}{Z_0 + Z}.$$

Сумма трех одинаковых по величине векторов, сдвинутых на $\pm 120^\circ$, равна нулю, в чем нетрудно убедиться, построив векторную диаграмму. Поэтому

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0,$$

откуда

$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 = -\dot{E}_3.$$

Подставляя это в полученное выше уравнение, найдем

$$3\dot{I}_3 = \frac{2\dot{E}_3 + \dot{E}_3}{Z_0 + Z} = \frac{3\dot{E}_3}{Z_0 + Z},$$

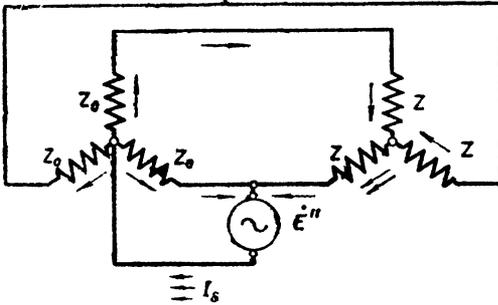
или

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3}{Z_0 + Z}.$$

В силу симметричности системы можно по аналогии написать

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_0 + Z} \text{ и } \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_0 + Z},$$

т. е. токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 равны по величине, но взаимно сдвинуты на $\pm 120^\circ$. Поэтому достаточно определить ток \dot{I}_1 , считая \dot{E}_1 направленным по действительной оси. Суммарное сопротивление



Фиг. 7,7.

$$Z_0 + Z = 0,5 + j2 + 16 + j12 = 16,5 + j14 = 21,6e^{j40^\circ 20'}$$

и ток

$$\dot{I}_1 = \frac{1000}{21,6e^{j40^\circ 20'}} = 46,3e^{-j40^\circ 20'} \text{ А.}$$

Напряжение в точке замыкания на землю

$$\dot{U}_1 = \dot{E}_1 - \dot{I}_1 Z_0 = 1000 - 46,3e^{-j40^\circ 20'} (0,5 + j2) = 1000 - 46,3e^{-j40^\circ 20'} 2,06e^{j76^\circ} = 1000 - 95,4e^{j35^\circ 40'} = 1000 - (77,3 + j55,7) = 922,7 - j55,7 = 924 \angle -3^\circ 30' \text{ В.}$$

2) Аварийный режим. Замыкание на землю можно рассматривать как включение между проводом и землей нового участка с $\dot{E}_g = 0$ и $Z_g = 0$. Искомый ток в месте аварии определится как ток \dot{I}'_g , текущий в этом участке под действием э. д. с.

$$\dot{E}'' = \dot{U}_1 = 924 \angle -3^\circ 30' \text{ В.}$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи Z'' составит согласно фиг. 7,7 следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z''} &= \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{\frac{Z_0 + Z}{2} + Z} = \frac{1}{Z_0} + \frac{2}{Z_0 + 3Z} = \\ &= \frac{Z_0 + 3Z + 2Z_0}{Z_0(Z_0 + 3Z)} = \frac{3(Z_0 + Z)}{Z_0(Z_0 + 3Z)}; \\ Z'' &= \frac{Z_0(Z_0 + 3Z)}{3(Z_0 + Z)} = \frac{(0,5 + j2)[0,5 + j2 + 3(16 + j12)]}{3(0,5 + j2 + 16 + j12)} = \\ &= \frac{(0,5 + j2)(48,5 + j38)}{3(16,5 + j14)} = \frac{2,06e^{j76^\circ} 61,6e^{j52^\circ}}{3 \cdot 21,6e^{j40^\circ 20'}} = 1,94e^{j87^\circ 40'} \Omega. \end{aligned}$$

Если нас интересует только абсолютная величина искомого тока, но не его фаза, то

$$I_s = \frac{E''}{Z''} = \frac{924}{1,94} = 477 \text{ А.}$$

7.4. Изменение сопротивления одного из участков цепи

Если сопротивление Z_s какого-нибудь участка цепи S (фиг. 7, 8, а) изменится на ΔZ , то меняется и сила тока как в этом, так и в других участках. При увеличении сопротивления на ΔZ ток I_s уменьшается на ΔI_s . Для того чтобы восстановить в цепи прежние токи, нужно ввести в участок э. д. с. \dot{E}' (фиг. 7, 8, б), которая компенсировала бы падение напряжения в сопротивлении ΔZ при токе I_s , т. е.

$$\dot{E}' = I_s \Delta Z.$$

Чтобы найти теперь искомое токораспределение, нужно на старое токораспределение наложить новые токи, вызываемые действием такой э. д. с. \dot{E}'' (фиг. 7, 8, в), которая уничтожила бы действие э. д. с. \dot{E}' . Очевидно,

$$\dot{E}'' = -\dot{E}' = -I_s \Delta Z. \quad (7,3)$$

Ток в участке S , вызываемый действием этой э. д. с.,

$$\Delta I_s = \frac{\dot{E}''}{Z_s' + Z_{\text{оке}}} = -I_s \frac{Z_s' - Z_s}{Z_s' + Z_{\text{оке}}}, \quad (7,4)$$

где $Z_{\text{оке}}$ представляет собой эквивалентное сопротивление току I_s всех остальных участков цепи. Новое значение тока в участке S будет

$$I_s' = I_s + \Delta I_s = I_s \left(1 - \frac{Z_s' - Z_s}{Z_s' + Z_{\text{оке}}} \right) = I_s \frac{Z_s + Z_{\text{оке}}}{Z_s' + Z_{\text{оке}}}. \quad (7,5)$$

Пример 7,4. В качестве примера подсчитаем влияние изменения сопротивления потребителя на распределение токов в цепи, разобранный в примере 7,2 (фиг. 7, 3). Пусть сопротивление $Z_3 = 1,52 + j1,69$ ома уменьшается на 40% , т. е.

$$Z_3' = 0,60 \cdot (1,52 + j1,69) = 0,91 + j1,01 \Omega,$$

или иначе

$$Z_3' = 0,60 \cdot 2,27 e^{j48^\circ} = 1,36 e^{j48^\circ} \Omega.$$

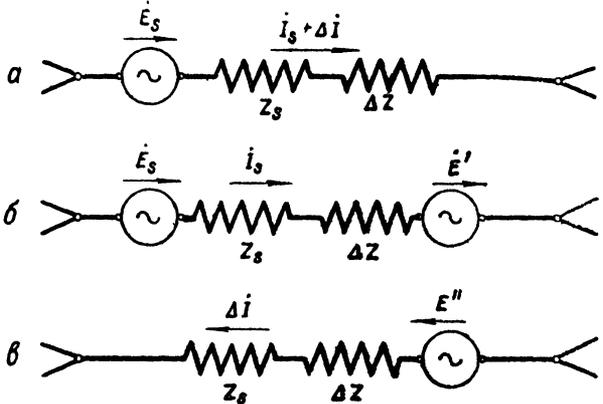
Эквивалентное сопротивление остальных участков цепи

$$Z_{\text{оке}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{0,5 e^{j50^\circ} 0,3 e^{j50^\circ}}{(0,5 + 0,3) e^{j50^\circ}} = \frac{0,5 \cdot 0,3}{0,8} e^{j50^\circ} = 0,19 e^{j50^\circ} = 0,12 + j0,14 \Omega.$$

Далее,

$$Z_3' - Z_3 = \Delta Z = 0,60 Z_3 - Z_3 = -0,40 Z_3 = -0,40 \cdot 2,27 e^{j48^\circ} = -0,91 e^{j48^\circ} \Omega;$$

$$Z_3' + Z_{\text{оке}} = 0,91 + j1,01 + 0,12 + j0,14 = 1,03 + j1,15 = 1,54 e^{j48^\circ} \Omega;$$



Фиг. 7, 8.

В примере 7,2 было подсчитано, что $i_3 = 96,8e^{-j48^\circ}$ А.
По формуле (7,4) находим

$$\Delta i_3 = -96,8e^{-j48^\circ} \left(-\frac{0,91e^{j48^\circ}}{1,54e^{j43^\circ}} \right) = +57,2e^{-j48^\circ} \text{ А.}$$

Соответствующее напряжение между концами Z_3'

$$\Delta \dot{U} = \Delta i_3 Z_3' - \dot{E}'' = -\Delta i_3 Z_{\text{вкз}},$$

так как его можно также рассматривать как падение напряжения во внешней (по отношению к ветви \mathcal{Z}) цепи ($Z_{\text{вкз}}$). Следовательно,

$$\Delta \dot{U} = -57,2e^{-j48^\circ} \cdot 0,19e^{j50^\circ} = -10,9e^{j2^\circ} \text{ В,}$$

а потому

$$\begin{aligned} \Delta i_1 &= \frac{\Delta \dot{U}}{Z_1} = -\frac{10,9e^{j2^\circ}}{0,5e^{j50^\circ}} = -21,8e^{-j48^\circ} = -(14,6 - j16,2) = \\ &= -14,6 + j16,2 \text{ А} \end{aligned}$$

и

$$\Delta i_2 = \frac{\Delta \dot{U}}{Z_2} = -\frac{10,9e^{j2^\circ}}{0,3e^{j50^\circ}} = \Delta i_1 \frac{0,5}{0,3} = \frac{5}{3} (-14,6 + j16,2) = -24,3 + j27 \text{ А.}$$

Новое токораспределение будет

$$i_1' = i_1 - \Delta i_1 = 34,6 - j20 + 14,6 - j16,2 = 49,2 - j36,2 = 61 \angle -36^\circ 20' \text{ А;}$$

$$\begin{aligned} i_2' &= i_2 - \Delta i_2 = 30 - j52 + 24,3 - j27 = 54,3 - j79 = \\ &= 96 \angle -55^\circ 40' \text{ А;} \end{aligned}$$

$$i_3' = i_3 + \Delta i_3 = 96,8e^{-j48^\circ} + 57,2e^{-j48^\circ} = 154 \angle -48^\circ \text{ А.}$$

Построив полученные векторы токов, следует убедиться в том, что

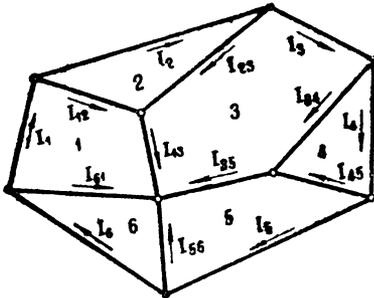
$$i_1' + i_2' = i_3'.$$

При решении этого примера, мы не воспользовались формулой (7,5), так как это потребовало бы большего количества вычислений.

7.5. Контурные токи

Распределение токов в сложной цепи, пример которой изображен на фиг. 7,9, может быть найдено с помощью первого и второго законов Кирхгофа. Задача сводится при этом к составлению и решению системы уравнений, число которых равно числу неизвестных токов (во взятом примере 14). Введение так называемых контурных токов позволяет значительно уменьшить число этих уравнений, сделав его равным числу многоугольников (контуров), образованных звеньями рассматриваемой цепи (в данном случае 6)¹.

На фиг. 7,9 токи внешних звеньев цепи обозначены: I_1, I_2, I_3 и т. д., тогда как токи внутренних звеньев, каждое из которых входит в состав двух смежных контуров, имеют два индекса, обозначающие номера этих



Фиг. 7,9.

¹ Число контуров k , на которые должна быть разбита сложная цепь, должно быть равным числу отдельных ветвей b плюс единица, минус число узлов u , т. е. $k = b + 1 - u$. При этом каждая ветвь должна войти, по крайней мере, в один контур.

двух контуров. По второму закону Кирхгофа для какого-нибудь контура, например, для контура 3

$$\dot{I}_3 Z_3 + \dot{I}_{34} Z_{34} + \dot{I}_{35} Z_{35} - \dot{I}_{13} Z_{13} - \dot{I}_{23} Z_{23} = (\sum \dot{E})_3, \quad (7,5)$$

где $(\sum \dot{E})_3$ — алгебраическая сумма комплексных выражений всех э. д. с., действующих в данном контуре. (За положительное принято направление по часовой стрелке.)

Но по первому закону Кирхгофа

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{34} &= \dot{I}_3 - \dot{I}_4; \\ \dot{I}_{35} &= \dot{I}_{34} + \dot{I}_{45} = (\dot{I}_3 - \dot{I}_4) + (\dot{I}_4 - \dot{I}_5) = \dot{I}_3 - \dot{I}_5; \\ \dot{I}_{23} &= \dot{I}_2 - \dot{I}_3; \\ \dot{I}_{13} &= \dot{I}_{12} + \dot{I}_{23} = (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + (\dot{I}_2 - \dot{I}_3) = \dot{I}_1 - \dot{I}_3. \end{aligned} \right\} \quad (7,6)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7,5), получим

$$\dot{I}_3 Z_3 + (\dot{I}_3 - \dot{I}_4) Z_{34} + (\dot{I}_3 - \dot{I}_5) Z_{35} - (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) Z_{13} - (\dot{I}_2 - \dot{I}_3) Z_{23} = (\sum \dot{E})_3,$$

или

$$\dot{I}_3 (Z_3 + Z_{34} + Z_{35} + Z_{13} + Z_{23}) - \dot{I}_1 Z_{13} - \dot{I}_2 Z_{23} - \dot{I}_4 Z_{34} - \dot{I}_5 Z_{35} = (\sum \dot{E})_3.$$

Сумма полных сопротивлений, на которую умножается ток \dot{I}_3 , представляет собой не что иное, как суммарное сопротивление контура Z_{33} .

Следовательно,

$$\dot{I}_3 Z_{33} - \dot{I}_1 Z_{13} - \dot{I}_2 Z_{23} - \dot{I}_4 Z_{34} - \dot{I}_5 Z_{35} = (\sum \dot{E})_3. \quad (7,7)$$

Уравнения (7,6) и (7,7) могут быть истолкованы следующим образом:

Токи в каждом из внутренних звеньев представляют собой результат наложения соответствующих контурных токов, которые в чистом виде имеют место во внешних звеньях цепи. Сумма э. д. с., действующих в каком-нибудь контуре, равна сумме падений напряжения от собственного контурного тока по всему контуру и от контурных токов смежных контуров по соответствующим звеньям. Так как в каждом звене ток смежного контура имеет иное положительное направление, чем собственный контурный ток, то соответствующие падения напряжения отрицательны.

Уравнения типа (7,7) могут быть легко написаны сразу для любого из контуров сложной цепи. Таким образом в данном случае может быть составлена система шести уравнений с шестью неизвестными. Так, например, для контура 5

$$\dot{I}_5 Z_{55} - \dot{I}_6 Z_{56} - \dot{I}_3 Z_{35} - \dot{I}_4 Z_{45} = (\sum \dot{E})_5.$$

Определив из этой системы контурные токи, уже нетрудно с помощью уравнений (7,6) или просто руководствуясь принципом наложения контурных токов найти действительные токи во всех звеньях цепи.

Если в цепь входят контуры, состоящие исключительно из внутренних звеньев, необходимо и для них ввести соответствующие контурные токи, особенность которых будет заключаться в том, что ни в одном звене цепи они не будут единственными слагающими. Если какое-либо звено является общим больше чем для двух контуров, его ток будет складываться из всех токов тех контуров, которым принадлежит данное звено. При этом придется пользоваться не двумя, а большим числом индексов для обозначения тока и сопротивления.

Разлагая этот детерминант по элементам второго столбца и имея в виду, что все элементы этого столбца кроме первого равны нулю, получим

$$\Delta'_2 = -E \begin{vmatrix} -Z_{21} - Z_{23} \dots - Z_{2n} \\ -Z_{31} + Z_{33} \dots - Z_{3n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ -Z_{n1} - Z_{n3} \dots + Z_{nn} \end{vmatrix} \quad (7, 9)$$

Во втором случае, когда э. д. с. E действует в звене b , входящем во второй контур, первые два уравнения изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1'' Z_{11} - i_2'' Z_{12} - i_3'' Z_{13} - \dots - i_n'' Z_{1n} &= 0; \\ -i_1'' Z_{21} + i_2'' Z_{22} - i_3'' Z_{23} - \dots - i_n'' Z_{2n} &= E. \end{aligned}$$

Все остальные уравнения останутся без изменения.

Для интересующего нас теперь тока в звене a найдем

$$i_1'' = \frac{\Delta_1''}{\Delta}, \quad (7, 10)$$

где Δ имеет прежнее значение, а Δ_1'' получается из Δ путем замены всех элементов первого столбца свободными членами соответствующих уравнений:

$$\Delta_1'' = \begin{vmatrix} 0 - Z_{12} - Z_{13} \dots - Z_{1n} \\ E + Z_{22} - Z_{23} \dots - Z_{2n} \\ 0 - Z_{32} + Z_{33} \dots - Z_{3n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 - Z_{n2} - Z_{n3} \dots + Z_{nn} \end{vmatrix}$$

Разлагая этот детерминант по элементам первого столбца, имеем

$$\Delta_1'' = -E \begin{vmatrix} -Z_{12} - Z_{13} \dots - Z_{1n} \\ -Z_{32} + Z_{33} \dots - Z_{3n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ -Z_{n2} - Z_{n3} \dots + Z_{nn} \end{vmatrix} \quad (7, 11)$$

Сравнивая это выражение с выражением (7, 9), видим, что каждый столбец детерминанта (7, 10) тождественен с соответствующей строкой детерминанта (7, 9)¹, т. е. оба детерминанта равны между собой, а следовательно,

$$\Delta_1'' = \Delta'_2$$

и

$$i_1'' = i_2',$$

что и требовалось доказать.

7.7. Графический способ преобразования звезды в треугольник и обратно (метод Кеннелли)

В гл. 1 мы рассмотрели метод Кеннелли, значительно упрощающий расчеты путем преобразования части схемы, соединенной треугольником, в эквивалентную звезду или наоборот (трансфигурация). Этот метод при-

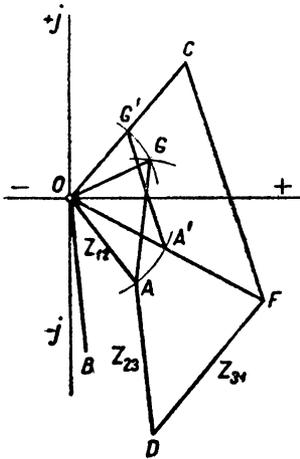
¹ Соответствующие Z отличаются только порядком записи индексов, но, как уже указано выше, $Z_{m\dot{k}} = Z_{k\dot{m}}$.

меняется и для расчета сложных цепей переменного тока, только в формулы взаимных преобразований треугольника и звезды подставляются комплексные выражения кажущихся сопротивлений соответствующих ветвей цепи переменного тока. На примерах расчета мы остановимся в главе „Многофазные токи“, так как метод Кеннелли применяется, главным образом, для расчета трехфазных систем. Здесь же мы только рассмотрим графический метод трансформации треугольника в звезду или обратно.

Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду или обратно очень просто может быть выполнено графически, если пользоваться в первом случае сопротивлениями, а во втором — проводимостями.

Пусть на фиг. 7,11 отрезки OA , OB и OC изображают сопротивления сторон треугольника Z_{12} , Z_{23} и Z_{31} , а отрезок OF — их геометрическую сумму. Согласно формуле преобразования

$$\frac{Z_1}{Z_{12}} = \frac{Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \text{ или } \frac{OG}{OA} = \frac{OC}{OF}, \quad (7, 12)$$



Фиг. 7, 11.

где OG — отрезок, изображающий искомую величину Z_1 . Если построить на отрезке OA треугольник OAG , подобный треугольнику OFC , то его сторона OG будет удовлетворять указанному соотношению. Самое построение проще всего выполнить следующим образом.

Отложим на направлении OF отрезок $OA' = OA$. Из точки A' проведем прямую $A'G'$ параллельно прямой FC , соединяющей концы отрезков OF и OC до пересечения с OC в точке G' . Треугольник $OA'G'$ подобен треугольнику OFC , но построен не на OA , а на равном ему отрезке OA' . Чтобы перенести его на отрезок OA , засекаем из точки O как из центра дугу радиусом OG' , а из точки A как из центра другую дугу радиусом, равным $A'G'$. Точка G пересечения этих дуг и будет концом искомого отрезка OG .

Подобным же образом могут быть найдены и сопротивления двух других лучей звезды.

Следует иметь в виду, что такое построение может быть применено во всех случаях, когда к трем каким-либо комплексным величинам (\dot{a}_1 , \dot{a}_2 и \dot{a}_3) надо найти четвертую пропорциональную (\dot{a}_4), удовлетворяющую соотношению

$$\frac{\dot{a}_4}{\dot{a}_3} = \frac{\dot{a}_2}{\dot{a}_1},$$

т. е. когда искомая величина \dot{a}_4 выражается через известные величины формулой типа

$$\dot{a}_4 = \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{\dot{a}_1}.$$

Построение для случая обратного преобразования звезды в треугольник отличается от приведенного только тем, что в нем участвуют не сопротивления, а проводимости как для данных, так и для искомым элементов.

7.8. Индуктивно связанные цепи

Если две цепи переменного тока (фиг. 7,12) имеют между собой индуктивную связь, численным выражением которой является их взаимная индуктивность (или коэффициент взаимоиндукции) M , то мгновенные значения напряжений и токов связаны между собой следующей, уже известной нам, системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (7,13)$$

где R_1 и R_2 — сопротивления обеих цепей, а L_1 и L_2 — их индуктивности (см. формулы 3,93).

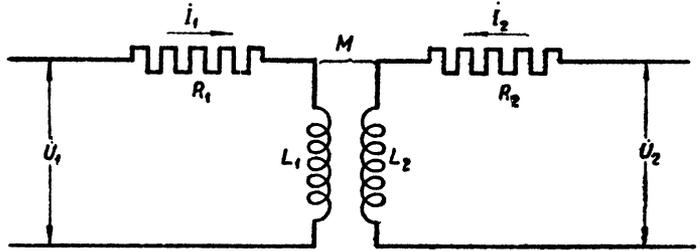
Если токи i_1 и i_2 синусоидальны, то они могут быть выражены уравнениями

$$i_1 = I_{1m} \sin \omega t$$

и

$$i_2 = I_{2m} \sin (\omega t + \psi),$$

где ψ — угол между векторами \dot{i}_1 и \dot{i}_2 . Содержащиеся в уравнениях (7,13) производные этих токов по времени



Фиг. 7, 12.

$$\frac{di_1}{dt} = I_{1m} \omega \cos \omega t = I_{1m} \omega \sin (\omega t + 90^\circ)$$

и

$$\frac{di_2}{dt} = I_{2m} \omega \cos (\omega t + \psi) = I_{2m} \omega \sin (\omega t + \psi + 90^\circ)$$

могут быть изображены векторами, опережающими соответствующие токи на 90° и равными по абсолютной величине $I_{1m} \omega$ и $I_{2m} \omega$. В символической форме эти векторы могут быть представлены так:

$$\frac{d\dot{i}_1}{dt} = j\dot{I}_1 \omega \quad \text{и} \quad \frac{d\dot{i}_2}{dt} = j\dot{I}_2 \omega. \quad (7,14)$$

С помощью этих выражений уравнения (7,13) могут быть заменены следующими символическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 R_1 + j\dot{I}_1 \omega L_1 + j\dot{I}_2 \omega M \\ \dot{U}_2 &= \dot{I}_2 R_2 + j\dot{I}_2 \omega L_2 + j\dot{I}_1 \omega M \end{aligned} \right\} \quad (7,15)$$

Входящее в последние члены обоих уравнений выражение ωM аналогично индуктивным сопротивлениям ωL_1 и ωL_2 и называется реактивным сопротивлением взаимоиндукции.

Если источник тока имеется только в первой цепи, а во вторую цепь энергия передается исключительно через индуктивную связь, то в урав-

нениях (7, 15) следует положить $\dot{U}_2 = 0$ и преобразовать схему, как показано на фиг. 7,13. Второе уравнение (7, 15) дает тогда

$$\dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2) = -j\dot{I}_1\omega M;$$

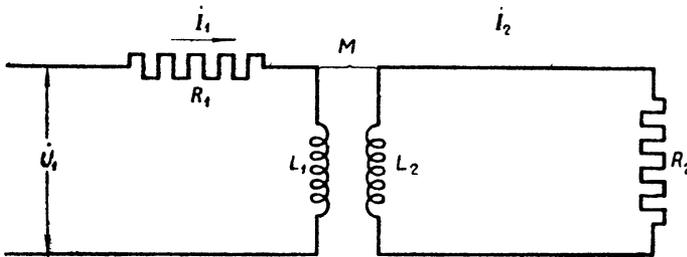
$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{\omega M e^{-j90^\circ}}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2} e^{j\varphi_2}},$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{R_2}.$$

Иначе

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} e^{-j(90^\circ + \varphi_2)} \quad (7, 16)$$



Фиг. 7, 13.

Обозначая через a модуль этого отношения:

$$a = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}}, \quad (7, 17)$$

мы получаем

$$\dot{I}_2 = a\dot{I}_1 e^{-j(90^\circ + \varphi_2)}. \quad (7, 18)$$

Подставим это выражение в первое уравнение (7, 15):

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 [R_1 + j\omega L_1 + j\omega M a e^{-j(90^\circ + \varphi_2)}],$$

но

$$e^{-j(90^\circ + \varphi_2)} = \cos(90^\circ + \varphi_2) - j \sin(90^\circ + \varphi_2) = -\sin \varphi_2 - j \cos \varphi_2 = -\frac{\omega L_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} - j \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}};$$

поэтому

$$j\omega M a e^{-j(90^\circ + \varphi_2)} = -j \frac{\omega M a \omega L_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} - j^2 \frac{\omega M a R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}} = -j a^2 \omega L_2 + a^2 R_2$$

и

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 [R_1 + j\omega L_1 - j a^2 \omega L_2 + a^2 R_2],$$

или

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + a^2 R_2 + j\omega(L_1 - a^2 L_2)}.$$

(7, 19)

Таким образом включение вторичной цепи как бы увеличивает омическое сопротивление первичной на $a^2 R_2$ и уменьшает ее индуктивность на $a^2 L_2$. Однако ни при каком значении L_2 выражение $L_1 - a^2 L_2$ не может стать отрицательным или равным нулю. В самом деле,

$$L_1 - a^2 L_2 = L_1 - L_2 \frac{(\omega M)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2}.$$

Так как $M^2 < L_1 L_2$ (см. гл. 3), то

$$L_1 - a^2 L_2 > L_1 - L_2 \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2},$$

или

$$L_1 - a^2 L_2 > L_1 \left[1 - \frac{(\omega L_2)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2} \right],$$

или

$$L_1 - a^2 L_2 > \frac{L_1 R_2^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2} > 0.$$

Пример 7.5. Определить токи в первичной и вторичной цепях (фиг. 7.13) при $U_1 = 120 \text{ В}$; $R_1 = 6 \text{ }\Omega$; $R_2 = 2 \text{ }\Omega$; $L_1 = 80 \text{ мН}$; $L_2 = 4 \text{ мН}$ и коэффициенте рассеяния $\sigma = 0,35$, а также построить векторную диаграмму.

Так как коэффициентом рассеяния называется величина

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2},$$

то

$$M^2 = L_1 L_2 (1 - \sigma)$$

и

$$M = \sqrt{L_1 L_2 (1 - \sigma)} = \sqrt{80 \cdot 4 (1 - 0,35)} = \sqrt{320 \cdot 0,65} = 14,4 \text{ мН} = 14,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Реактивное сопротивление взаимной индукции ωM :

$$\omega M = 314 \cdot 14,4 \cdot 10^{-3} = 4,52 \text{ }\Omega,$$

а индуктивные сопротивления первичной и вторичной цепей

$$\omega L_1 = 314 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 25,1 \text{ }\Omega$$

и

$$\omega L_2 = 314 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 1,26 \text{ }\Omega.$$

Отношение токов

$$a = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4,52}{\sqrt{2^2 + 1,26^2}} = \frac{4,52}{2,36} = 1,92.$$

Из уравнения (7, 19) находим абсолютную величину первичного тока

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{(R_1 + a^2 R_2)^2 + (\omega L_1 - a^2 \omega L_2)^2}}.$$

Так как

$$R_1 + a^2 R_2 = 6 + 1,92^2 \cdot 2 = 6 + 3,68 \cdot 2 = 13,36 \text{ }\Omega$$

и

$$\omega L_1 - a^2 \omega L_2 = 25,1 - 3,68 \cdot 1,26 = 20,5 \text{ }\Omega,$$

то

$$I_1 = \frac{120}{\sqrt{13,36^2 + 20,5^2}} = \frac{120}{24,5} = 4,9 \text{ А},$$

а

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1 - a^2 \omega L_2}{R_1 + a^2 R_2} = \frac{20,5}{13,36} = 1,54,$$

откуда $\varphi_1 = 57^\circ$.

Вторичный ток

$$I_2 = a I_1 = 1,92 \cdot 4,9 = 9,4 \text{ А}$$

согласно уравнению (7, 18) отстает от первичного на угол $90^\circ + \varphi_2$, где

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{R_2} = \frac{1,26}{2} = 0,63 \text{ и } \varphi_2 = 32^\circ.$$

Вторичный ток отстает таким образом на

$$90 + 32 = 122^\circ.$$

Для построения векторной диаграммы вычислим все члены уравнений (7, 15)

$$\begin{aligned}
 I_1 R_1 &= 4,9 \cdot 6 = 29,4 \text{ V;} \\
 I_1 \omega L_1 &= 4,9 \cdot 25,1 = 123 \text{ V;} \\
 I_2 \omega M &= 9,4 \cdot 4,52 = 42,4 \text{ V;} \\
 I_2 R_2 &= 9,4 \cdot 2 = 18,8 \text{ V;} \\
 I_2 \omega L_2 &= 9,4 \cdot 1,26 = 11,8 \text{ V;} \\
 I_1 \omega M &= 4,9 \cdot 4,52 = 22,1 \text{ V.}
 \end{aligned}$$

Построение диаграммы (фиг. 7,14) начинаем с вектора \dot{U}_1 , который направляем по действительной оси, вектора \dot{I}_1 , отстающего от \dot{U}_1 на $\varphi_1 = 57^\circ$ и вектора \dot{I}_2 , отстающего от \dot{I}_1 на 122° , а от \dot{U}_1 , следовательно, на $57 + 122 = 179^\circ$. Далее наносим остальные вычисленные нами величины, направляя активные падения напряжения параллельно, а индуктивные — перпендикулярно к соответствующим токам (в сторону опережения). При этом уравнение (7, 15) представляем в виде

$$-j\dot{I}_1 \omega M = \dot{I}_2 R_2 + j\dot{I}_2 \omega L_2,$$

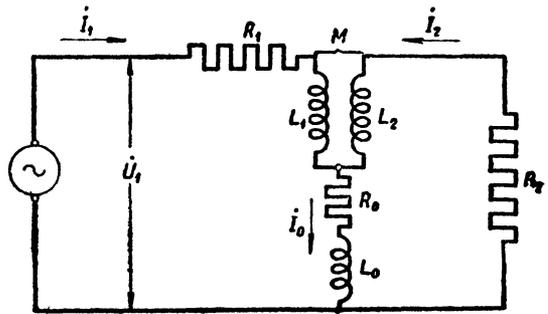
Фиг. 7, 14.

рассматривая э. д. с. взаимной индукции $-j\dot{I}_1 \omega M$ как причину тока \dot{I}_2 и

откладывая ее на векторной диаграмме противоположно направлению вектора $j\dot{I}_1 \omega M$.

Построение векторной диаграммы служит проверкой правильности решения задачи: если векторы $\dot{I}_1 R_1$, $j\dot{I}_1 \omega L_1$ и $j\dot{I}_2 \omega M$ дают в сумме вектор \dot{U}_1 , а векторы $\dot{I}_2 R_2$ и $j\dot{I}_2 \omega L_2$ дают в сумме вектор $-j\dot{I}_1 \omega M$, то решение правильно.

Довольно часто бывает, что две цепи, связанные индуктивно, имеют в то же время и непосредственную электрическую связь. Пример такой сложной цепи представлен на фиг. 7,15, где в первичной цепи, питаемой напряжением \dot{U}_1 , включено сопротивление $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, а во вторичной цепи сопротивление $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$, кроме того, имеется общий для обеих цепей участок с сопротивлением $Z_0 = R_0 + j\omega L_0$, по которому проходит суммарный ток $\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ (положительные направления токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 выбраны так, чтобы эти токи в одинаковом направлении проходили по индуктивно связанным участкам, создавая одинаково направленные магнитные потоки).



Фиг. 7, 15.

Применяя второй закон Кирхгофа к левому и правому контурам, напишем:

Применяя второй закон Кирхгофа к левому и правому контурам, напишем:

для левого контура

$$\left. \begin{aligned} \text{для правого контура} \quad \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 Z_1 + j \dot{I}_2 \omega M + \dot{I}_0 Z_0; \\ 0 &= \dot{I}_2 Z_2 + j \dot{I}_1 \omega M + \dot{I}_0 Z_0. \end{aligned} \right\} \quad (7, 20)$$

Подставляя в оба уравнения вместо \dot{I}_0 сумму $\dot{I}_1 + \dot{I}_2$, приведем их к виду

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 (Z_1 + Z_0) + \dot{I}_2 (Z_0 + j \omega M) \\ \text{и} \quad 0 &= \dot{I}_2 (Z_2 + Z_0) + \dot{I}_1 (Z_0 + j \omega M). \end{aligned}$$

Введя для краткости обозначения

$$\begin{aligned} Z_{10} &= Z_1 + Z_0, \\ Z_{20} &= Z_2 + Z_0 \end{aligned}$$

и

$$Z_{0M} = Z_0 + j \omega M,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 Z_{10} + \dot{I}_2 Z_{0M} \\ \text{и} \quad \dot{I}_2 Z_{20} &= -\dot{I}_1 Z_{0M}. \end{aligned} \right\} \quad (7, 21)$$

Определяя \dot{I}_2 из второго уравнения и подставляя в первое, найдем

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \frac{Z_{0M}}{Z_{20}} \quad (7, 22)$$

и

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{10} - \dot{I}_1 \frac{Z_{0M}}{Z_{20}} Z_{0M},$$

или

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left(Z_{10} - \frac{Z_{0M}^2}{Z_{20}} \right),$$

или

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \frac{Z_{10} Z_{20} - Z_{0M}^2}{Z_{20}},$$

или

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 Z_{20}}{Z_{10} Z_{20} - Z_{0M}^2}. \quad (7, 23)$$

Подставляя это выражение в уравнение (7, 22), получим

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_1 Z_{0M}}{Z_{10} Z_{20} - Z_{0M}^2}, \quad (7, 24)$$

а складывая оба последние выражения, найдем

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1 (Z_{20} - Z_{0M})}{Z_{10} Z_{20} - Z_{0M}^2}. \quad (7, 25)$$

Пример 7.6. Определить токи во всех частях цепи, показанной на фиг. 7,15, при $U_1 = 120$ В; $R_1 = 6$ Ω; $R_2 = 2$ Ω; $L_1 = 80$ мН; $L_2 = 4$ мН; $M = 14,4$ мН; $R_0 = 4$ Ω и $L_0 = 10$ мН.

Воспользовавшись некоторыми подсчетами примера (7,5), все данные которого вошли в настоящий пример, имеем:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 6 + j25,1 \Omega; \\ Z_2 &= 2 + j1,26 \Omega; \\ Z_M &= j\omega M = j4,52 \Omega, \end{aligned}$$

и далее,

$$\begin{aligned} Z_0 &= 4 + j314 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 4 + j3,14 \Omega; \\ Z_{10} &= 6 + j25,1 + 4 + j3,14 = 10 + j28,24 \Omega; \\ Z_{20} &= 2 + j1,26 + 4 + j3,14 = 6 + j4,4 = 7,45e^{j36^\circ} \Omega; \\ Z_{0M} &= 4 + j3,14 + j4,52 = 4 + j7,66 = 8,63e^{j32^\circ} \Omega; \\ Z_{10}Z_{20} &= 10 \cdot 6 - 28,24 \cdot 4,4 + j(10 \cdot 4,4 + 6 \cdot 28,24) = \\ &= 60 - 124,2 + j(44 + 169,5) = -64,2 + j213,5 \Omega^2; \\ Z_{0M}^2 &= (4 + j7,66)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot j7,66 + j^2 7,66^2 = \\ &= 16 + j61,3 - 58,6 = -42,6 + j61,3 \Omega^2; \\ Z_{10}Z_{20} - Z_{0M}^2 &= -64,2 + j213,5 + 42,6 - j61,3 = -21,6 + j152,2 = \\ &= 153,6e^{j38^\circ} \Omega^2; \\ Z_{20} - Z_{0M} &= Z_2 - Z_M = 2 + j1,26 - j4,52 = 2 - j3,26 = 3,82e^{-j38^\circ} \Omega. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в уравнения (7,23), (7,24) и (7,25), получим

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{120 \cdot 7,45e^{j36^\circ}}{153,6e^{j38^\circ}} = 5,82 \angle -62^\circ \text{ A}, \\ i_2 &= -\frac{120 \cdot 8,63e^{j32^\circ}}{153,6e^{j38^\circ}} = -6,59e^{-j36^\circ} = 6,59 \angle 144^\circ \text{ A}, \\ i_0 &= \frac{120 \cdot 3,82e^{-j38^\circ}}{153,6e^{j38^\circ}} = 2,99 \angle -156^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

Построением полученных векторов следует убедиться в том, что сумма первых двух равна третьему. Если это окажется не так, нужно проверить вычисления.

ГЛАВА 8

МНОГОФАЗНЫЕ ТОКИ

8,1. Многофазные и трехфазные системы

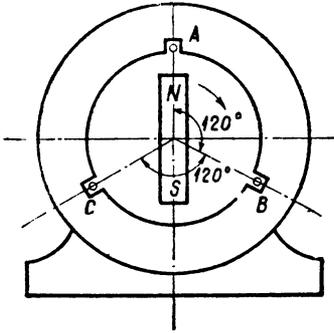
Многофазную систему можно рассматривать, как объединение в определенном порядке общими проводами линии передачи энергии нескольких цепей известного нам простого переменного тока. В отдельных цепях, составляющих многофазную систему и называемых ее фазами, э. д. с. должны обладать одинаковой частотой, но по фазе они могут быть сдвинуты друг по отношению к другу. В симметричных многофазных системах э. д. с. смежных цепей должны быть сдвинуты друг относительно друга на одинаковую долю периода. Таким образом так называемый многофазный ток является соединением в известном порядке нескольких однофазных токов (т. е. простых переменных токов), обладающих одинаковой частотой, но разнящихся друг от друга по фазе на одну и ту же величину. Цепь каждого однофазного тока, входящего в многофазную систему, можно рассчитывать как известную уже нам цепь простого переменного тока, а расчет многофазной системы в целом сводится к совместному расчету всех цепей однофазного тока, составляющих данную многофазную систему.

Из многофазных систем исключительное практическое значение имеет трехфазная система, состоящая из трех цепей переменного тока с относительным сдвигом фаз между э. д. с. или токами отдельных цепей в одну треть периода. Трехфазный ток обладает двумя важными преимуществами по сравнению с простым переменным током: одновременное действие токов трехфазной системы может создавать в неподвижной магнитной цепи вращающееся магнитное поле (на этом основано устройство чрезвычайно простых по конструкции и практичных двигателей); второе существенное преимущество трехфазного тока заключается в том, что для передачи одной и той же мощности при том же напряжении генератора и при тех же потерях для многофазного тока требуется меньшее суммарное сечение проводов, чем для простого переменного тока.

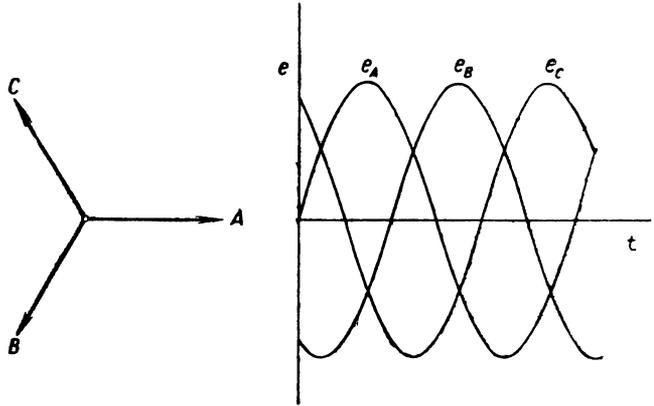
Для получения трехфазного тока служит трехфазный генератор, построенный по тому же принципу, что и вышеописанный однофазный генератор. Но обмотка статора трехфазного генератора представляет собой соединение трех отдельных обмоток, сдвинутых одна по отношению к другой на одну треть двойного полюсного деления. В качестве примера на фиг. 8,1 показана упрощенная схема обмотки трехфазного генератора.

В силу тождественности устройства трех обмоток генератора в них наводятся э. д. с., обладающие одинаковой амплитудой и частотой, но каждая из этих э. д. с. сдвинута по фазе по отношению к э. д. с. двух соседних

обмоток на одну треть периода. Векторы этих трех э. д. с. равны по величине, но направлены друг к другу под углами 120° (фиг. 8, 2).



Фиг. 8, 1.



Фиг. 8, 2.

Мгновенные значения э. д. с. трехфазного генератора (также показанные на фиг. 8, 2) могут быть выражены аналитически следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin (\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_m \sin (\omega t - 240^\circ), \end{aligned} \right\} \quad (8, 1)$$

где e_A , e_B и e_C — мгновенные значения э. д. с. отдельных обмоток и E_m — одинаковая во всех фазовых обмотках амплитуда э. д. с.; $\omega = 360^\circ f$ здесь выражено в градусах.

Векторы э. д. с. равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_A &= E e^{j^\circ}; \\ \dot{E}_B &= E e^{-j 120^\circ} = E e^{j 240^\circ}; \\ \dot{E}_C &= E e^{-j 240^\circ} = E e^{j 120^\circ}, \end{aligned} \right\} \quad (8, 2)$$

где E — одинаковое для всех фаз эффективное значение э. д. с. Для краткости письма обозначают единичный вектор, повернутый на 120° в положительном направлении (против стрелки часов), через a . Эта величина называется оператором трехфазной системы и хотя является комплексным числом условно пишется без обычного знака комплекса. Очевидно,

$$a = e^{j 120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j 0,867 \quad (8, 3)$$

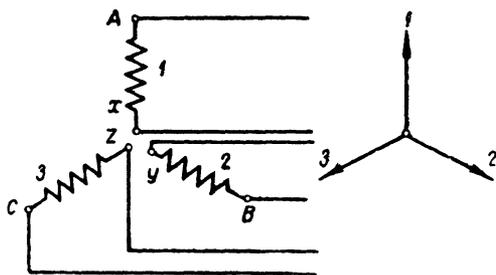
и

$$a^2 = e^{j 240^\circ} = -0,5 - j 0,867. \quad (8, 4)$$

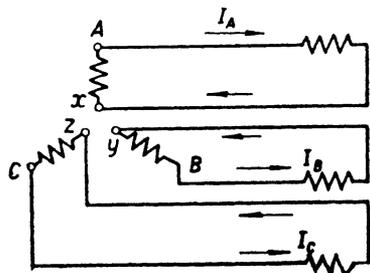
При помощи оператора a уравнения (8, 2) могут быть более просто выражены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_A &= E; \\ \dot{E}_B &= a^2 E; \\ \dot{E}_C &= a E. \end{aligned} \right\} \quad (8, 5)$$

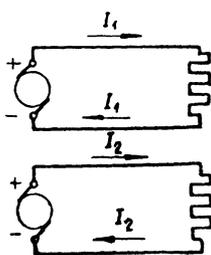
Схематическое изображение фазовых обмоток трехфазного генератора дано на фиг. 8,3; отдельные обмотки повернуты одна относительно другой на углы, равные углам сдвига фаз между векторами э. д. с. Подобное схематическое изображение дает не только представление об электрической схеме соединения, но, кроме того, напоминает векторную диаграмму э. д. с., наводимых в фазовых обмотках. Так как каждая обмотка имеет два конца, то генератор мог бы иметь всего шесть выведенных концов. Если каждую фазовую обмотку соединить двумя проводами с приемником электрической энергии, мы получили бы три независимые и электрически несвязанные между собой однофазные цепи, объединенные только тем обстоятельством, что наведение э. д. с. в них осуществляется в одном генераторе (фиг. 8,4). При этом трехфазный генератор соединяется с приемниками энергии шестью проводами и, следовательно, никакой экономии в количестве проводникового материала не получается. Заметим, что точки *A, B, C* называются началами, а точки *x, y, z* — концами обмоток; при этом выбор начала и конца фазовой обмотки производится таким образом, чтобы э. д. с. была направлена внутри обмотки от конца к началу. Для того чтобы уяснить возможность уменьшения числа проводов в трехфазной системе, напомним о способе объединения двух цепей, с которым



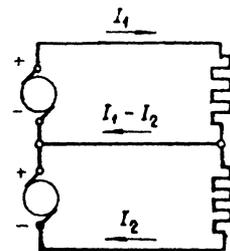
Фиг. 8, 3.



Фиг. 8, 4.



Фиг. 8, 5.



Фиг. 8, 6.

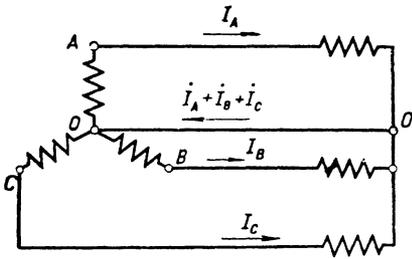
мы познакомились в первой главе, рассматривая трехпроводную систему постоянного тока. В трехпроводной системе постоянного тока объединяются два провода двух цепей (фиг. 8,5), имеющих близкие по величине нагрузки, а именно прямой провод второй цепи и обратный провод первой цепи. После объединения получается трехпроводная система (фиг. 8,6). В случае почти одинаковой нагрузки обеих цепей ток в нулевом проводе будет весьма мал, так как он равен лишь разности токов нагрузок ($I_1 - I_2$). Поэтому сечение этого нулевого провода может быть взято меньшим, чем сечение двух крайних проводов.

Можно было бы совсем отказаться от нулевого провода; при этом экономия проводов составила бы 50%, но в этом случае при неравномерной нагрузке цепей имело бы место неравномерное распределение напряжений между приемниками, включенными в разные половины системы. Очевидно, что экономия в проводах при трехпроводной системе объясняется тем, что по существу передача энергии производится с удвоенным

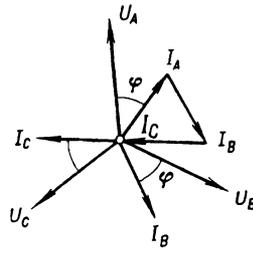
напряжением. Аналогичную трехпроводную систему с двумя генераторами можно было бы получить и в случае переменного тока. Однако гораздо больше преимущества дает рассматриваемая нами трехфазная система. Уменьшение числа проводов получается при этом так же, как и в трехпроводной системе постоянного тока, путем объединения части проводов. Существует два способа такого объединения: соединение звездой и соединение треугольником.

8.2. Соединение звездой

Для соединения трехфазного генератора звездой концы всех фаз соединяются в одну точку, называемую нейтралью или нулевой точкой. Схема трехфазного генератора, соединенного звездой, представлена на фиг. 8,7 (ср. с фиг. 8,4). Обратные провода, т. е. провода, соединенные с концами обмоток, всех фаз при этом объединяются в один



Фиг. 8, 7.



Фиг. 8, 8.

общий или нулевой провод. Выясним, чему равен ток в этом нулевом проводе при равномерной нагрузке фаз, т. е. в том случае, когда сопротивлениия, включенные в каждую фазу, равны по величине и по фазовому углу. Векторы токов равны во всех фазах и сдвинуты в каждой фазе на один и тот же угол φ по отношению к своему напряжению. На фиг. 8,8 показана векторная диаграмма напряжений и токов трехфазного генератора при равномерной нагрузке фаз. Ток в общем обратном проводе будет, очевидно, равен сумме токов всех фаз. Но векторная сумма этих токов равна нулю (фиг. 8,8), так как векторы токов образуют замкнутый треугольник. То обстоятельство, что сумма токов трехфазной системы при равномерной нагрузке равна нулю, может быть доказано и аналитически. Мгновенные значения токов в каждой из фаз соответственно равны [ср. уравнения (8,1)]:

$$\left. \begin{aligned} i_A &= I_m \sin(\omega t - \varphi); \\ i_B &= I_m \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi); \\ i_C &= I_m \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (8,6)$$

Складывая уравнения (8,6), определим ток i_0 в нулевом проводе:

$$i_0 = i_A + i_B + i_C = I_m [\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi) + \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi)].$$

Пользуясь соотношением

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

получим, складывая сначала второй и третий члены в квадратных скобках и полученный результат прибавляя к первому члену:

$$\begin{aligned} i_0 &= I_m [\sin(\omega t - \varphi) + 2 \sin(\omega t - 180^\circ - \varphi) \cos 60^\circ] = \\ &= I_m [\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\omega t - 180^\circ - \varphi)] = \\ &= I_m [2 \sin(\omega t - \varphi - 90^\circ) \cos(+90^\circ)] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом ток в нулевом проводе при равномерной нагрузке фаз равен нулю, а следовательно, что очень важно отметить, напряжение

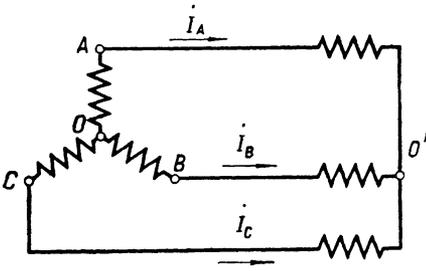
между нейтральными точками генератора и приемника O и O' (фиг. 8, 7) в этом случае также равно нулю. Ввиду изложенного нулевой провод является при равномерной нагрузке фаз излишним и может быть устранен (фиг. 8, 9)¹.

Из уравнения $i_A + i_B + i_C = 0$ вытекает следующее соотношение:

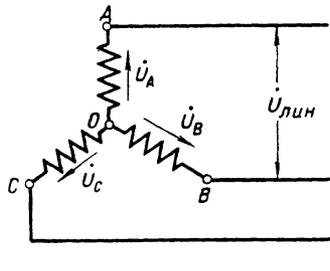
$$i_B + i_C = -i_A,$$

т. е. в любой момент времени ток первой фазы i_A возвращается по проводам других фаз; то же самое справедливо и для остальных фаз, так как $i_A + i_C = -i_B$ и $i_A + i_B = -i_C$.

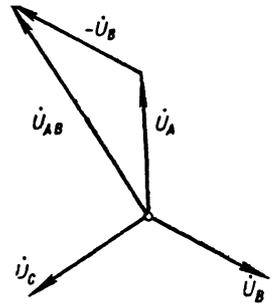
При неравномерной нагрузке фаз, как и в трехпроводной системе постоянного тока, применение нулевого провода оказывается необходимым для того, чтобы избежать неравномерности напряжений в отдельных



Фиг. 8, 9.



Фиг. 8, 10.



Фиг. 8, 11.

фазах приемника. В этом случае ток в нулевом проводе равен сумме токов всех фаз и может отличаться от нуля. Сечение нулевого провода часто берут равным 50% сечения основных проводов.

Перейдем к некоторым основным определениям. Напряжение между проводами трехфазной линии передачи носит название линейного (или междуфазового) напряжения (фиг. 8, 10). Определим соотношение между линейным и фазовым напряжениями для соединения звездой. На фиг. 8, 11 дана векторная диаграмма фазовых напряжений при соединении звездой. Мгновенное значение напряжения между фазами A и B u_{AB} будет равно (фиг. 8, 10) разности напряжений первой и второй фаз: u_A и u_B , так как в цепи AOB эти напряжения действуют навстречу друг другу. Поэтому

$$u_{AB} = u_A - u_B = U_m \sin \omega t - U_m \sin (\omega t - 120^\circ).$$

Пользуясь соотношением

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

получим

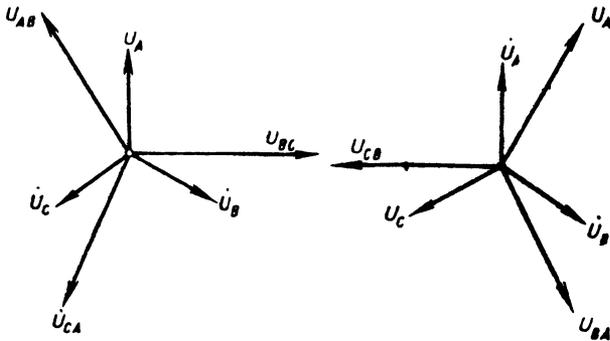
$$\begin{aligned} u_{AB} &= U_m [\sin \omega t - \sin (\omega t - 120^\circ)] = \\ &= U_m 2 \sin 60^\circ \cos (\omega t - 60^\circ) = U_m 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin (\omega t - 60^\circ + 90^\circ) = \\ &= \sqrt{3} U_m \sin (\omega t + 30^\circ). \end{aligned} \quad (8, 7)$$

¹ Приемники энергии при этом также соединены звездой (ср. фиг. 8, 14).

Тот же результат может быть получен графическим путем (фиг. 8, 11) на основании векторной диаграммы, так как

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B.$$

Следовательно, при соединении звездой линейное напряжение в $\sqrt{3}$ раз больше фазового. Сказанное относится как к амплитуде, так и к эффективному значению. Если при определении линейных напряжений измерять напряжение между какой-либо фазой и следующей по порядку, т. е. измерять напряжения \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} , то



Фиг. 8, 12.

Фиг. 8, 13.

полученная звезда векторов линейных напряжений опережает звезду фазовых напряжений на 30° (фиг. 8, 12).

Если же определять линейные напряжения как разность между напряжениями данной фазы и предыдущей по порядку, т. е. измерять напряжения \dot{U}_{AC} , \dot{U}_{BA} , \dot{U}_{CB} , то получится звезда линейных напряжений, отстающая на 30° по отношению к звезде фазовых напряжений (фиг. 8, 13).

Условимся считать положительными линейные напряжения между данной фазой и следующей по порядку, т. е. \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} и \dot{U}_{CA} . Ток в проводах соединительной линии носит название линейного тока. Как выше указано, напряжение между нейтралью генератора и приемника при равномерной нагрузке фаз равно нулю, поэтому каждую фазу системы, начиная от нейтрали генератора и кончая нейтралью нагрузки, можно рассматривать как замкнутый контур. Это обстоятельство дает возможность очень просто определять линейные токи в отдельных фазах по заданным значениям э. д. с. Можно, например, рассматривать как замкнутый контур цепь OAO' (фиг. 8, 9). В этом контуре действует э. д. с. E_A , и следовательно, линейный ток в фазе A будет равен

$$I_A = \frac{E_A}{Z_A},$$

где Z_A — полное сопротивление всей цепи фазы A , включая генератор и соединительные провода. Так как токи других фаз равны по величине току в фазе A и отличаются лишь сдвигом фаз, то расчет трехфазной системы при равномерной нагрузке сводят к расчету одной лишь фазы. Больше того, в этом случае и электрическая схема соединений сети наносится лишь для одной фазы, что весьма упрощает схему (однолинейные схемы). Случай неравномерной нагрузки фаз будет рассмотрен ниже.

Пример 8, 1. Фазовая э. д. с. генератора равна 75 В. Активные и реактивные сопротивления фазы генератора, линии и нагрузки известны и соответственно равны:

$$\begin{aligned} R_2 &= 0,2 \, \Omega; & R_{\lambda} &= 0,3 \, \Omega; & R_n &= 4,0 \, \Omega; \\ X_2 &= 1,0 \, \Omega; & X_{\lambda} &= 0,4 \, \Omega; & X_n &= 3,0 \, \Omega. \end{aligned}$$

Требуется определить линейный ток (фиг. 8, 14) и линейные напряжения в начале и в конце линии. Кажущееся сопротивление фазы нагрузки равно

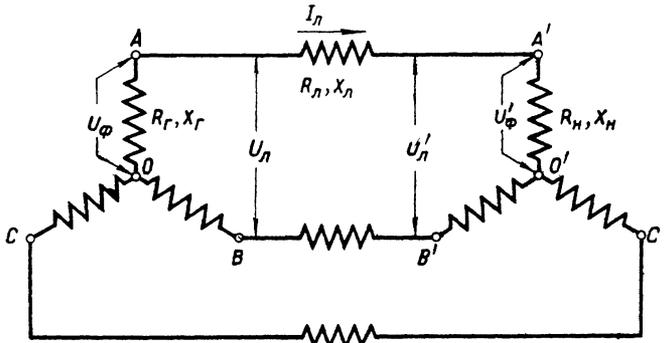
$$z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X)^2} = \sqrt{(4,5)^2 + (4,4)^2} = 6,29 \Omega.$$

Ток в линии равен

$$I_{\text{л}} = \frac{E_{\phi}}{z} = \frac{75}{6,29} = 11,9 \text{ A.}$$

Фазовое напряжение нагрузки равно

$$U_{\phi}' = I_{\text{л}} z_{\text{н}} = I_{\text{л}} \sqrt{R_{\text{н}}^2 + X_{\text{н}}^2} = 11,9 \cdot 5 = 59,5 \text{ V.}$$



Фиг. 8, 14.

Линейное напряжение в конце линии (у нагрузки)

$$U_{\text{л}}' = \sqrt{3} U_{\phi}' = \sqrt{3} \cdot 59,5 = 103 \text{ V.}$$

Фазовое напряжение в начале линии

$$U_{\phi} = I_{\text{л}} \sqrt{(R_{\text{н}} + R_{\text{л}})^2 + (X_{\text{н}} + X_{\text{л}})^2} = 11,9 \cdot 5,52 = 65,9 \text{ V.}$$

Линейное напряжение в начале линии (у генератора)

$$U_{\text{л}} = U_{\phi} \sqrt{3} = 65,9 \cdot \sqrt{3} = 114 \text{ V.}$$

8.3. Соединение треугольником

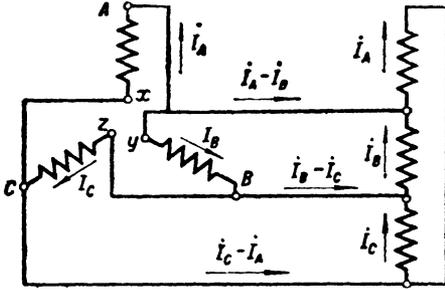
Другой способ соединения обмоток трехфазного генератора (фиг. 8, 15) заключается в следующем: объединяются провод, идущий от начала первой фазы (прямой провод), с проводом, идущим от конца (обратный провод) второй фазы, прямой провод второй фазы с обратным проводом третьей и т. д. При этом начало одной фазовой обмотки соединяется с концом следующей по порядку, так что все фазовые обмотки образуют замкнутый контур даже при разомкнутой внешней цепи. Более наглядно такое соединение показано на фиг. 8, 16, из которой видно, что обмотки генератора образуют треугольник, в силу чего и самое соединение получило название соединения треугольником. На фиг. 8, 16 нагрузка также соединена треугольником. При соединении обмоток генератора треугольником может возникнуть опасение, не будут ли в этом замкнутом контуре циркулировать значительные токи даже при отсутствии внешней нагрузки, что могло бы привести к большим потерям энергии и опасному нагреванию обмотки. Однако легко убедиться, что действующая в треугольнике э. д. с., представляющая собой

сумму э. д. с. отдельных фаз, равна нулю, так как эти э. д. с. равны по величине и сдвинуты по фазе на равные углы.

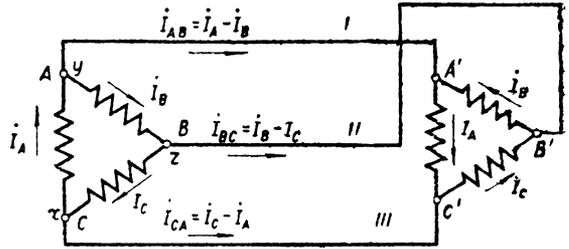
Аналитическое доказательство этого положения совершенно аналогично приведенному в § 8,2 для суммы токов.

Линейный ток в проводе I равен разности токов первой и второй фаз (фиг. 8, 16). При равномерной нагрузке фаз

$$i_I = i_{AB} = i_A - i_B = I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi) = \sqrt{3} I_m \sin(\omega t - \varphi + 30^\circ). \tag{8, 8}$$

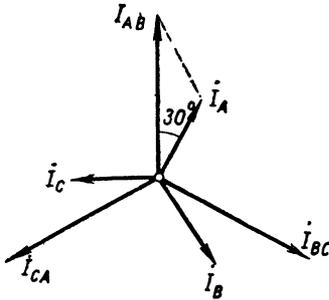


Фиг. 8, 15.

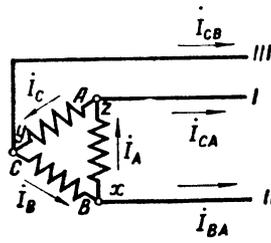


Фиг. 8, 16.

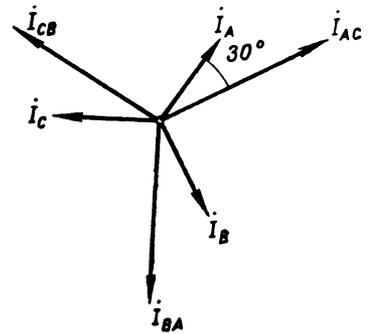
Следовательно, линейный ток при соединении треугольником в случае равномерной нагрузки фаз в $\sqrt{3}$ больше фазового тока; сказанное справедливо как для амплитуд, так и для эффективных значений. Тот же результат может быть получен графическим путем (фиг. 8, 17) из вектор-



Фиг. 8, 17.



Фиг. 8, 18.



Фиг. 8, 19.

ной диаграммы. Звезда линейных токов опережает на 30° звезду фазовых токов.

Соединение треугольником могло бы быть получено иным способом. Объединяя прямой провод первой фазы с обратным проводом не второй, а третьей фазы и т. д., мы получили бы схему фиг. 8, 18. При этом ток в проводе I равнялся бы разности токов первой и третьей фаз:

$$i_I = i_{AC} = i_A - i_C = I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi) = \sqrt{3} I_m \sin(\omega t - \varphi - 30^\circ).$$

Соотношение между амплитудами и эффективными значениями линейных и фазовых токов остается таким же, как и в предыдущем случае, но

звезда линейных токов теперь на 30° отстает от звезды фазовых (фиг. 8, 19).

Первое соединение иногда называют правым треугольником (фиг. 8, 16 и 8, 17), а второе (фиг. 8, 18 и 8, 19) — левым.

Линейное напряжение при соединении треугольником равно фазовому.

Сравнивая соединения генератора звездой или треугольником, отметим, что при соединении звездой линейные напряжения генератора получаются в $\sqrt{3}$ раз больше, чем при соединении треугольником (при одинаковом значении фазовых напряжений), а линейные токи в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем при соединении треугольником (при одинаковых значениях фазовых токов генератора). Следовательно, в тех случаях, когда желательно получить большее линейное напряжение, целесообразным является соединение звездой; соединение же треугольником является целесообразным в том случае, если желательно получить большие линейные токи. Генераторы в большинстве случаев соединяются звездой. Что касается нагрузки, то вопрос о наиболее целесообразном ее соединении зависит от соотношений линейного напряжения питающей сети и номинального напряжения приемников. Если, например, линейное напряжение распределительной трехфазной сети равно 220 В, то потребители, имеющие номинальное напряжение 220 В, должны быть включены треугольником, а потребители с номинальным напряжением 120—130 В должны быть соединены звездой, так как в последнем случае фазовое напряжение в $\sqrt{3}$ раз меньше линейного, т. е. равно $\frac{220 \text{ В}}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В}$.

При неравномерной нагрузке фаз следует предпочитать соединение звездой с нулевым проводом.

8,4. Преобразование треугольника в звезду при равномерной нагрузке фаз

Соединение треугольником (генератора или нагрузки) может быть для упрощения расчета заменено эквивалентным соединением звездой. Рассмотрим сначала преобразование треугольника нагрузки в звезду; при этом нагрузка фаз предполагается равномерной. Условия эквивалентности таковы: при тех же значениях линейных напряжений линейные токи в эквивалентной звезде нагрузки должны по величине и фазе равняться линейным токам при соединении треугольником. На фиг. 8, 20 представлена схема соединения треугольником и схема эквивалентной звезды.

Пользуясь формулами преобразования треугольника в звезду (см. стр. 59) и обозначив через Z_m и Z_s полные сопротивления треугольника и эквивалентной звезды, найдем:

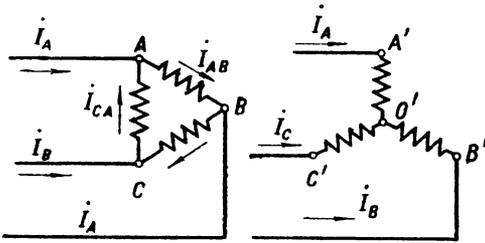
$$\left. \begin{aligned} Z_s &= \frac{Z_m^2}{3Z_m} = \frac{Z_m}{3}, \\ R_s &= \frac{R_m}{3}; \quad X_s = \frac{X_m}{3} \end{aligned} \right\} \quad (8,9)$$

и следовательно,

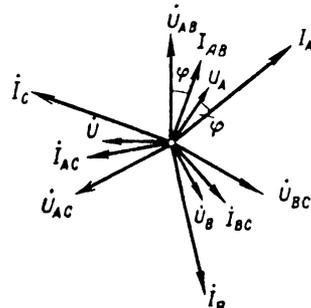
Таким образом при равномерной нагрузке фаз для преобразования треугольника в эквивалентную звезду необходимо все сопротивления фазы треугольника уменьшить в три раза для получения сопротивлений фазы эквивалентной звезды. Аналогичное правило для сопротивлений справедливо и в случае преобразования генератора, соединенного треугольником в эквивалентную звезду. При этом фазовые э. д. с. в экви-

валентном генераторе должны быть в $\sqrt{3}$ меньше фазовых э. д. с. фактического генератора и сдвинуты на 30° в соответствующем направлении (см. § 8, 2).

На фиг. 8, 21 представлена векторная диаграмма напряжений и токов треугольника и эквивалентной звезды. Векторы \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} и \dot{U}_{CA} образуют звезду линейных напряжений для обоих соединений. Токи в фазах треугольника могут быть представлены векторами \dot{I}_{AB} , \dot{I}_{BC} , \dot{I}_{CA} , сдвинутыми на угол φ от соответствующих фазовых напряжений \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} . Линейные токи обеих схем могут быть представлены векторами \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C , которые отстают на 30° от векторов \dot{I}_{AB} , \dot{I}_{BC} , \dot{I}_{CA} и в $\sqrt{3}$ раз больше их по величине. Наконец, векторы фазовых напряжений эквивалентной



Фиг. 8, 20.



Фиг. 8, 21.

звезды \dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C должны на 30° отставать от векторов \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} и должны быть в $\sqrt{3}$ раз меньше их по величине. Из фиг. 8, 21 видно, что угол сдвига фаз между векторами \dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C и векторами \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C равен φ , т. е. угол сдвига фаз в эквивалентной звезде равен углу сдвига фаз в треугольнике.

8.5. Мгновенная мощность трехфазного тока

Мгновенное значение мощности трехфазного тока представляет собой сумму мгновенных мощностей отдельных фаз. Мгновенное значение мощности одной фазы равно (см. гл. 4)

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi) = \\ &= U_\varphi I_\varphi \cos \varphi_\varphi - U_\varphi I_\varphi \cos (2\omega t - \varphi_\varphi), \end{aligned}$$

где U_φ , I_φ , φ_φ — фазовые напряжения, ток и угол сдвига. Таким образом мгновенная мощность одной фазы является величиной переменной, так же как и при простом переменном токе. При равномерной нагрузке фаз мгновенные мощности отдельных фаз будут равны

$$\begin{aligned} p_A &= u_A i_A = U_m \sin \omega t I_m \sin (\omega t - \varphi) = \\ &= U_\varphi I_\varphi \cos \varphi_\varphi - U_\varphi I_\varphi \cos (2\omega t - \varphi_\varphi); \\ p_B &= u_B i_B = U_m \sin (\omega t - 120^\circ) I_m \sin (\omega t - 120^\circ - \varphi) = \\ &= U_\varphi I_\varphi \cos \varphi_\varphi - U_\varphi I_\varphi \cos (2\omega t - 240^\circ - \varphi_\varphi); \end{aligned}$$

$$p_C = u_C i_C = U_m \sin(\omega t - 240^\circ) I_m \sin(\omega t - 240^\circ - \varphi) = \\ = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi - U_\phi I_\phi \cos(2\omega t - 120^\circ - \varphi_\phi).$$

Суммарная мгновенная мощность равна

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi - U_\phi I_\phi [\cos(2\omega t - \varphi_\phi) + \\ + \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi_\phi) + \cos(2\omega t - 120^\circ - \varphi_\phi)].$$

Сумма трех косинусов в квадратных скобках равна нулю, поэтому

$$p = P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi. \quad (8, 10)$$

Суммарная мгновенная мощность трехфазной системы является таким образом при равномерной нагрузке постоянной величиной, что весьма благоприятно для работы генератора, соединенного общим валом с механическим двигателем, имеющим постоянный крутящий момент, например, с паровой турбиной. Система, суммарная мгновенная мощность которой является постоянной величиной, называется уравновешенной системой.

При неравномерной нагрузке фаз мгновенная мощность генератора может быть определена лишь как сумма мгновенных мощностей отдельных фаз

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C \quad (8, 11)$$

и является в общем случае величиной переменной.

8,6. Активная мощность трехфазного тока

При равномерной нагрузке активная мощность каждой фазы равна при любом соединении

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi. \quad (8, 12)$$

Поэтому активная мощность при равномерной нагрузке фаз независимо от характера соединения равна

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi, \quad (8, 13)$$

т. е. активная мощность (средняя) равна мгновенной [см. формулу (8, 10)]. Если учесть, что при соединении звездой

$$U_\phi = \frac{U_\lambda}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad I_\phi = I_\lambda,$$

а при соединении треугольником

$$U_\phi = U_\lambda \quad \text{и} \quad I_\phi = \frac{I_\lambda}{\sqrt{3}},$$

где U_λ и I_λ — линейные напряжение и ток, то мощность трехфазной системы при любом соединении выразится через значения линейного тока и напряжения следующим образом:

$$P = 3 \frac{U_\lambda I_\lambda}{\sqrt{3}} \cos \varphi_\phi = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \cos \varphi_\phi. \quad (8, 14)$$

Последняя формула при равномерной нагрузке фаз справедлива для любого соединения трехфазной системы.

Пример 8,2. Линейное напряжение 6 000 В, линейный ток 250 А, $\cos \varphi = 0,8$; определить активную мощность. По формуле (8, 14)

$$P = \sqrt{3} \cdot 6\,000 \cdot 250 \cdot 0,8 = 2\,075\,000 \text{ W} = 2\,075 \text{ kW}.$$

Пример 8,3. Определить ток в линии при передаче мощности 10 000 кВт при линейном напряжении 30 кВ и $\cos \varphi = 0,7$:

$$I_{\text{л}} = \frac{P}{\sqrt{3} U_{\text{л}} \cos \varphi} = \frac{10\,000 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 0,7} = 275 \text{ A}.$$

8,7. Реактивная и кажущаяся мощность трехфазного тока

При равномерной нагрузке фаз реактивная мощность каждой фазы равна

$$P_r = U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi_{\phi}. \quad (8, 15)$$

Эта величина, как известно, представляет собой максимальное значение мощности, накапливаемой или возвращаемой электромагнитным и электростатическим полями (см. гл. 4). Для отдельных фаз моменты, соответствующие максимальному значению этой мощности, не совпадают (см. ниже).

Разлагая ток первой фазы на активную и реактивную составляющие, получим

$$i_A = I_m \sin(\omega t - \varphi) = I_m \cos \varphi \sin \omega t - I_m \sin \varphi \cos \omega t.$$

Реактивный ток первой фазы равен

$$i_{rA} = I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Аналогично получим

$$i_{rB} = I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 120^\circ - 90^\circ) = I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 210^\circ);$$

$$i_{rC} = I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 240^\circ - 90^\circ) = I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 330^\circ).$$

Реактивная мощность отдельных фаз будет равна

$$p_{rA} = u_A i_{rA} = U_m \sin \omega t I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 90^\circ) = -UI \sin \varphi \cos(2\omega t - 90^\circ);$$

$$p_{rB} = u_B i_{rB} = U_m \sin(\omega t - 120^\circ) I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 210^\circ) = -UI \sin \varphi \cos(2\omega t - 330^\circ);$$

$$p_{rC} = u_C i_{rC} = U_m \sin(\omega t - 240^\circ) I_m \sin \varphi \sin(\omega t - 330^\circ) = -UI \sin \varphi \cos(2\omega t - 210^\circ).$$

Сумма последних трех выражений равна нулю. Следовательно, суммарное мгновенное значение реактивной мощности при равномерной нагрузке равно нулю.

Реактивной мощностью трехфазного тока условно называется сумма реактивных мощностей отдельных фаз, хотя, как указано выше, эти мощности не могут быть, строго говоря, суммированы, ввиду того что мощности отдельных фаз достигают максимума в разные моменты времени. Реактивная мощность равномерно нагруженной трехфазной системы при любом соединении равна

$$P_r = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi_{\phi}. \quad (8, 16)$$

При неравномерной нагрузке фаз нельзя пользоваться формулой (8,16); в этом случае реактивная мощность может быть определена как сумма реактивных мощностей отдельных фаз:

$$P_r = U_A I_A \sin \varphi_1 + U_B I_B \sin \varphi_2 + U_C I_C \sin \varphi_3. \quad (8, 17)$$

Кажущаяся мощность при равномерной нагрузке фаз равна

$$P_i = 3U_{\phi}I_{\phi} = \sqrt{3}U_L I_L. \quad (8,18)$$

Пример 8,4. Определить, как изменится реактивная мощность потребителя при изменении $\cos \varphi$ от 0,7 до 0,8. Линейный ток равен 100 А, линейное напряжение 3 000 В. В первом случае

$$P_r = \sqrt{3} \cdot 3\,000 \cdot 100 \cdot \sqrt{1 - (0,7)^2} = 370\,000 \text{ VA} = 370 \text{ kVA}.$$

Во втором случае

$$P_r = \sqrt{3} \cdot 3\,000 \cdot 100 \sqrt{1 - (0,8)^2} = 311\,000 \text{ VA} = 311 \text{ kVA}.$$

Кажущаяся мощность в обоих случаях

$$P_i = \sqrt{3} \cdot 3\,000 \cdot 100 = 518\,000 \text{ VA} = 518 \text{ kVA}.$$

8,8. Измерение мощности трехфазной системы

Наиболее распространенной схемой для измерения активной мощности трехфазной системы является схема Арона — схема двух ваттметров (фиг. 8, 22). Эта схема применима как при соединении нагрузки звездой, так и треугольником. Схема Арона может быть применена и в случае неравномерной нагрузки фаз, но при отсутствии нулевого провода.

Докажем правильность измерения активной мощности при неравномерной нагрузке фаз. Как известно (гл. 4, стр. 112), активная мощность равна среднему значению мгновенной мощности за полпериода или за длительный промежуток времени. Поэтому общая активная мощность трехфазной системы будет равна среднему значению мощностей всех трех фаз:

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Показание первого ваттметра равно среднему значению произведения тока i_A на разность напряжений фаз A и C (фиг. 8, 22), т. е. среднему значению произведения

$$p_1 = (u_A - u_C) i_A.$$

Аналогично находим, что показание второго ваттметра равно среднему значению произведения (фиг. 8, 22):

$$p_2 = (u_B - u_C) i_B.$$

Так как сумма средних значений равна среднему значению суммы, мы можем утверждать, что сумма (алгебраическая) показаний двух ваттметров равна среднему значению величины:

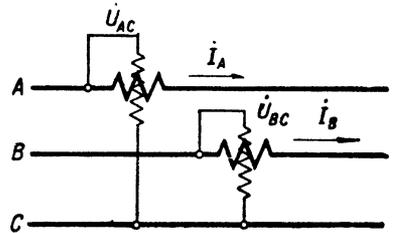
$$p_1 + p_2 = (u_A - u_C) i_A + (u_B - u_C) i_B.$$

Раскрывая скобки, получим, что

$$p_1 + p_2 = u_A i_A + u_B i_B + u_C (-i_A - i_B).$$

Но в трехфазной системе без нулевого провода сумма токов

$$i_A + i_B + i_C = 0$$



Фиг. 8, 22.

и, следовательно,

$$-i_A - i_B = i_C.$$

Таким образом

$$p_1 + p_2 = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Последнее выражение и указывает на то, что сумма показаний двух ваттметров, включенных по схеме Арона при отсутствии нулевого провода, будет равна общей активной мощности, так как $p_1 + p_2 = p$.

Оба ваттметра часто выполняются с общей осью в виде одного трехфазного ваттметра. При этом отклонение стрелки будет указывать алгебраическую сумму мощностей, которые должны учитывать первый и второй ваттметры.

По схеме Арона включаются также счетчики активной мощности.

При наличии нулевого провода сумма токов, текущих в трех фазах при неравномерной нагрузке, не равна нулю, и следовательно, схема Арона не может быть применена.

При равномерной нагрузке фаз ваттметры схемы Арона дают показания, равные

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\dot{U}_{AC}, \dot{I}_A) = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos(30^\circ - \varphi);$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\dot{U}_{BC}, \dot{I}_B) = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos(30^\circ + \varphi). \quad (8, 19)$$

Суммарная мощность при этом равна, как это видно из векторной диаграммы, показанной на фиг. 8, 23,

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = \sqrt{3} U_\phi I_\phi [\cos(30^\circ - \varphi) + \cos(30^\circ + \varphi)] = \\ &= \sqrt{3} U_\phi I_\phi 2 \cos 30^\circ \cos(-\varphi) = 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi. \end{aligned}$$

При $\varphi = 0$ показания обоих ваттметров совпадают:

$$P_1 = P_2 = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos 30^\circ = 1,5 U_\phi I_\phi.$$

При значениях φ от 0 до 60° оба ваттметра дают положительные неравные показания. При $\varphi = \pm 60^\circ$ один из ваттметров показывает нуль. Например, при $\varphi = +60^\circ$

$$P_1 = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos 30^\circ = \frac{3}{2} U_\phi I_\phi; \quad P_2 = 0.$$

При значениях φ от 60° до 90° один из ваттметров дает отрицательные показания, и наконец, при $\varphi = 90^\circ$ оба ваттметра имеют равные и противоположные по знаку показания:

$$P_1 = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} U_\phi I_\phi;$$

$$P_2 = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} U_\phi I_\phi.$$

При равномерной нагрузке фаз можно по показаниям обоих ваттметров схемы Арона определить угол сдвига φ , так как

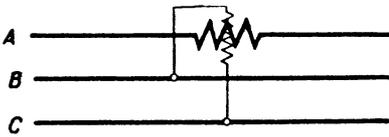
$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{\cos(30^\circ - \varphi) - \cos(30^\circ + \varphi)}{\cos(30^\circ - \varphi) + \cos(30^\circ + \varphi)} = \frac{\sin \varphi \sin 30^\circ}{\cos \varphi \cos 30^\circ} = \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (8, 20)$$

Реактивная мощность при равномерной нагрузке может быть определена одним нормальным ваттметром, включенным по схеме фиг. 8, 24. Мощность, показываемая ваттметром, равна

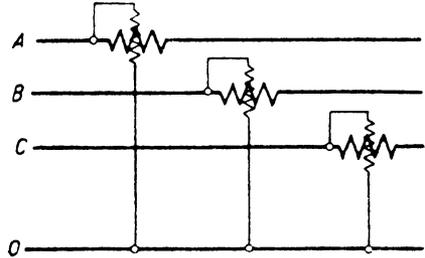
$$P_r = U_{BC} I_A \cos(\dot{U}_{BC}, \dot{I}_A) = \sqrt{3} U_\phi I_\phi \cos(90^\circ - \varphi) = U_\phi I_\phi \sin \varphi,$$

в чем можно убедиться, построив соответствующую векторную диаграмму. Следовательно, показание ваттметра, включенного по такой схеме, умноженное на $\sqrt{3}$, дает правильную величину реактивной мощности системы.

Для измерения реактивной мощности при неравномерной нагрузке фаз применяются измерительные приборы более сложной специальной конструкции.



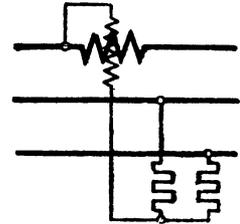
Фиг. 8, 24.



Фиг. 8, 25.

На фиг. 8, 25 представлена схема измерения активной мощности при наличии нулевого провода. В указанную схему входят три ваттметра, каждый из которых показывает мощность одной фазы.

При равномерной нагрузке фаз мощность может быть измерена с помощью лишь одного ваттметра. При отсутствии нулевого провода в последнем случае нулевая точка может быть получена искусственным способом посредством включения трех одинаковых больших сопротивлений, из числа которых одним может служить сопротивление, включенное внутри самого ваттметра (фиг. 8, 26).



Фиг. 8, 26.

8, 9. Передача энергии трехфазным током

Заменяв соединение треугольником эквивалентным соединением звездой, можно всегда привести схему передачи энергии трехфазным током к виду, представленному на фиг. 8, 14.

Ввиду того что при равномерной нагрузке напряжение между нулевыми точками равно нулю (см. § 8, 2), каждую фазу (при равномерной нагрузке) можно рассматривать независимо от других.

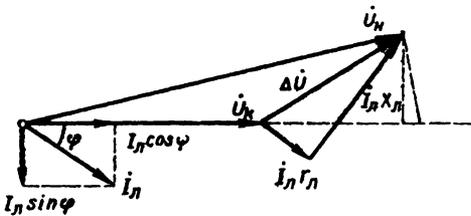
Ток в линии будет равен

$$I_\lambda = \frac{E_\phi}{\sqrt{(r_2 + r_\lambda + r_n)^2 + (x_2 + x_\lambda + x_n)^2}}, \quad (8, 21)$$

где $r_2 + jx_2$, $r_\lambda + jx_\lambda$, $r_n + jx_n$ — соответственно сопротивления фазы генератора, линии и нагрузки. Вектор падения напряжения в линии будет равен

$$\Delta \dot{U} = \dot{I}_\lambda Z_\lambda = \dot{I}_\lambda (r_\lambda + jx_\lambda). \quad (8, 22)$$

На фиг. 8, 27 показана векторная диаграмма, на которой фазовое напряжение в конце линии \dot{U}_k отложено по оси действительных величин, так



Фиг. 8, 27.

что $\dot{U}_к = U_к$. Вектор линейного тока $\dot{I}_л$ сдвинут на угол φ , определяемый характером нагрузочных сопротивлений, этот вектор

$$\dot{I}_л = I_л (\cos \varphi - j \sin \varphi).$$

Вектор падения напряжения будет равен

$$\begin{aligned} \Delta \dot{U} &= I_л (\cos \varphi - j \sin \varphi) (r_л + jx_л) = \\ &= I_л (r_л \cos \varphi + x_л \sin \varphi) + j I_л (x_л \cos \varphi - r_л \sin \varphi). \end{aligned} \quad (8, 23)$$

Следовательно, фазовое напряжение в начале линии $\dot{U}_н$ равно

$$\begin{aligned} \dot{U}_н &= \dot{U}_к + \Delta \dot{U} = U_к + I_л (r_л \cos \varphi + x_л \sin \varphi) + \\ &+ j I_л (x_л \cos \varphi - r_л \sin \varphi). \end{aligned} \quad (8, 24)$$

Модуль этого напряжения

$$U_н = \sqrt{[U_к + I_л (r_л \cos \varphi + x_л \sin \varphi)]^2 + [I_л (x_л \cos \varphi - r_л \sin \varphi)]^2}. \quad (8, 25)$$

Потеря фазового напряжения в линии равна арифметической разности напряжений в начале и конце линии

$$|\Delta U| = |U_н| - |U_к|. \quad (8, 26)$$

Если второй член под корнем уравнения (8, 25) значительно меньше первого, что обычно имеет место, то приближенно

$$U_н \approx U_к + I_л (r_л \cos \varphi + x_л \sin \varphi), \quad (8, 27)$$

и фазовая потеря напряжения равна

$$|\Delta U| = |U_н| - |U_к| \approx I_л (r_л \cos \varphi + x_л \sin \varphi). \quad (8, 28)$$

Следует различать вектор падения напряжения, равный разности векторов напряжений в начале и в конце линии [формулы (8, 22), (8, 23)] от потери напряжения, представляющей собой арифметическую разность абсолютных значений тех же величин [формула (8, 26)]. Численное равенство абсолютного значения падения напряжения и потери напряжения, как видно из формул (8, 23) и (8, 24), имеет место при соотношении

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_л}{r_л},$$

так как при этом условии $x_л \cos \varphi = r_л \sin \varphi$ и $\dot{U}_н$ по фазе совпадает с $\dot{U}_к$.

Заметим, что при опережающем токе ($\varphi < 0$) в рассмотренных формулах изменится знак у $\sin \varphi$, при этом потеря напряжения в линии, обладающей индуктивным сопротивлением, может оказаться отрицательной.

Перейдем к определению линейных значений падения и потери напряжения. Линейное напряжение между первой и второй фазами в начале линии $\dot{U}_{ABн}$ равно

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ABн} &= \sqrt{3} \dot{U}_{Aн} e^{j30^\circ} = \sqrt{3} (\dot{U}_{Aк} + I_A Z_л) e^{j30^\circ} = \\ &= \sqrt{3} (\dot{U}_{Aк} + \Delta \dot{U}_A) e^{j30^\circ}, \end{aligned} \quad (8, 29)$$

где $\dot{U}_{Aн}$ и $\dot{U}_{Aк}$ — фазовые напряжения фазы A в начале и конце линии Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ABн} &= \sqrt{3} \dot{U}_{Aк} e^{j30^\circ} + \sqrt{3} \Delta \dot{U}_A e^{j30^\circ} = \dot{U}_{ABк} + \\ &+ \sqrt{3} \Delta \dot{U}_A e^{j30^\circ} = \dot{U}_{ABк} + \Delta \dot{U}_{AB} \end{aligned}$$

и

$$\Delta \dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \Delta \dot{U}_A e^{j30^\circ} \quad (8, 30)$$

т. е. вектор линейного падения напряжения в $\sqrt{3}$ раз больше вектора фазового падения напряжения. Из того же соотношения (8, 29) можно получить для абсолютных значений

$$|U_{AB\kappa}| = \sqrt{3} U_{A\kappa} = \sqrt{3} (U_{A\kappa} + \Delta U_{\phi}) = \sqrt{3} U_{A\kappa} + \sqrt{3} \Delta U_{\phi} = U_{AB\kappa} + \Delta U_L$$

и

$$\Delta U_L = \sqrt{3} \Delta U_{\phi}, \quad (8, 31)$$

т. е. линейная потеря напряжения в $\sqrt{3}$ раз больше фазовой.

Потерю напряжения часто определяют в процентах от напряжения в конце линии:

$$\Delta U^0/\% = \frac{\Delta U}{U_{\kappa}} \cdot 100 = \frac{U_{\kappa} - U_{\kappa}}{U_{\kappa}} \cdot 100. \quad (8, 32)$$

При этом процентные потери фазового и линейного напряжений, как видно из формулы (8, 32), одинаковы.

Процентная потеря напряжения определяется поэтому лишь для фазового напряжения. Эта величина составляет обычно от 3 до 15% и зависит от длины, напряжения, характера линии и ее нагрузки.

Пример 8, 5. Генератор, соединенный звездой с фазовой э. д. с. 4 200 V, работает на нагрузку, соединенную треугольником с сопротивлением каждой фазы $120 + j90 \Omega$. Сопротивление каждой фазы линии $3 + j4 \Omega$, а фазы генератора $2 + j6 \Omega$. Требуется определить напряжение в конце линии (у нагрузки) в начале линии (на зажимах генератора) и ток в линии.

Преобразуем треугольник нагрузки в эквивалентную звезду. Полное сопротивление фазы звезды равно

$$Z_n' = \frac{120 + j90}{3} = 40 + j30 \Omega = 50 e^{j36^\circ 54'}$$

и

$$\varphi = 36^\circ 54'.$$

Линейный ток по формуле (8, 21)

$$I_L = \frac{4200}{\sqrt{(2+3+40)^2 + (6+4+30)^2}} = \frac{4200}{\sqrt{45^2 + 40^2}} = 70 \text{ A.}$$

Фазовое напряжение в конце равно

$$U_{\phi, \kappa} = I_L Z_n' = 70 \cdot 50 = 3500 \text{ V.}$$

Линейное напряжение в конце

$$U_{L, \kappa} = 3500 \cdot \sqrt{3} = 6055 \text{ V.}$$

Фазовое напряжение в начале линии по формуле (8, 14) равно

$$U_{\phi, \kappa} \approx 3500 + 70 (3 \cos 36^\circ 54' + 4 \sin 36^\circ 54') = 3500 + 70 (3 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,6) = 3500 + 336 = 3836 \text{ V.}$$

Линейное напряжение в начале линии

$$U_{L, \kappa} = 3836 \cdot \sqrt{3} = 6640 \text{ V.}$$

Потеря фазового напряжения в вольтах равна 336 V или в процентах от напряжения в конце

$$\Delta U^0/\% = \frac{336 \cdot 100}{3500} = 9,6\%.$$

Потеря линейного напряжения в вольтах в $\sqrt{3}$ раза больше потери фазового напряжения, а именно

$$6\ 640 - 6\ 055 = 336 \cdot \sqrt{3} = 585\text{ В},$$

а в процентах линейная потеря напряжения равна фазовой, т. е. $9,6\%$.

8,10. Топографическая диаграмма

Топографическая диаграмма представляет собой векторную диаграмму напряжений, в которой каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка диаграммы и вектор напряжения между двумя любыми точками электрической цепи по величине и направлению выражается отрезком, соединяющим соответствующие две точки диаграммы.

В отличие от обыкновенной векторной диаграммы, в которой все векторы начинаются в одной и той же точке начала векторов,

в топографической диаграмме напряжений начало и конец векторов находятся в тех точках диаграммы, между которыми определяется напряжение.

На фиг. 8,28 представлена топографическая диаграмма соединения звездой. Линейное напряжение между фазами A и B определяется вектором BA и т. д. [ср. с фиг. (8,12) и (8,13), на которых представлены те же диаграммы, но не в топографической форме].

При симметрии отдельных фаз относительно земли между землей и нулевой точкой напряжение равно нулю. При этом напряжение отдельных фаз относительно земли выражается векторами OA , OB и OC . Если же одна из фаз, например, C заземлена, то напряжения других фаз относительно земли будут представлены векторами CA и CB , т. е. напряжения незаземленных фаз относительно земли возрастут в $\sqrt{3}$ раз.

На фиг. 8,29 представлена топографическая диаграмма для соединения треугольником.

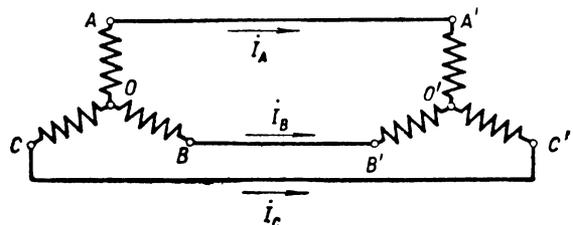
Топографическая диаграмма дает возможность простого и наглядного решения ряда вопросов.

8,11. Неравномерная нагрузка фаз при соединении звездой

При неравномерной нагрузке фаз в случае соединения звездой без нулевого провода (фиг. 8,30) сумма токов во всех трех фазах должна равняться нулю на основании первого закона Кирхгофа:

$$i_A + i_B + i_C = 0. \quad (8,33)$$

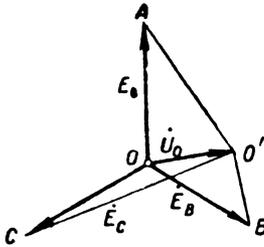
Напряжение между нулевыми точками генератора и потребителя (O и O') при неравномерной нагрузке может быть определено так:



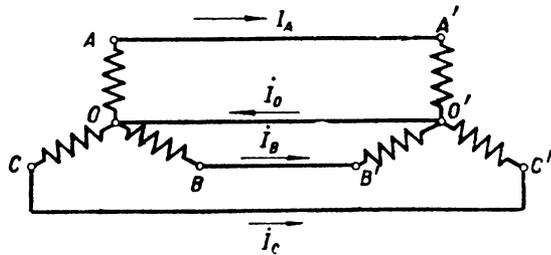
Фиг. 8, 30.

Обозначим напряжение между точками O' и O через U_0 , тогда токи в отдельных фазах будут равны

$$\left. \begin{aligned} i_A &= \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_0}{Z_A} = (\dot{E}_A - \dot{U}_0) Y_A; \\ i_B &= \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_0}{Z_B} = (\dot{E}_B - \dot{U}_0) Y_B; \\ i_C &= \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_0}{Z_C} = (\dot{E}_C - \dot{U}_0) Y_C, \end{aligned} \right\} \quad (8,34)$$



Фиг. 8, 31.



Фиг. 8, 32.

где \dot{E}_A, \dot{E}_B и \dot{E}_C —фазовые э. д. с.; Z_A, Z_B и Z_C —полные сопротивления отдельных фаз, включая сопротивления генератора и соединительных проводов, а Y_A, Y_B и Y_C —соответствующие полные проводимости.

На основании уравнений (8,33) и (8,34)

$$i_A + i_B + i_C = (\dot{E}_A - \dot{U}_0) Y_A + (\dot{E}_B - \dot{U}_0) Y_B + (\dot{E}_C - \dot{U}_0) Y_C = 0,$$

откуда

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}. \quad (8,35)$$

После определения U_0 по формуле (8,35) фазовые токи могут быть определены по формулам (8,34), после чего могут быть вычислены падения напряжения на любом участке цепи и, следовательно, определены все напряжения. Напряжения отдельных фаз между точками O и O' равны

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{E}_A - \dot{U}_0; \\ \dot{U}_B &= \dot{E}_B - \dot{U}_0; \\ \dot{U}_C &= \dot{E}_C - \dot{U}_0. \end{aligned} \right\} \quad (8,36)$$

На фиг. 8,31 представлена топографическая диаграмма, соответствующая схеме фиг. 8,30. Вектор OO' представляет собой \dot{U}_0 , т. е. напряжение между нулевыми точками. Эту величину часто называют смещением нейтрали. Векторы $O'A, O'B$ и $O'C$ представляют напряжения, действующие в отдельных фазах. Как видно из диаграммы, неравномерная нагрузка фаз приводит к неравномерности напряжений в отдельных фазах нагрузки. Эта неравномерность будет тем больше, чем больше

величина \dot{U}_0 . Для уменьшения неравномерности напряжений при неравномерной нагрузке применяется нулевой провод, соединяющий нулевые точки генератора и приемника (фиг. 8, 32). На основании первого закона Кирхгофа в этом случае

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_0, \quad (8, 37)$$

где \dot{I}_0 — ток, возвращающийся к генератору по нулевому проводу.

Если обозначить проводимость нулевого провода через Y_0 , то

$$\dot{I}_0 = \dot{U}_0 Y_0. \quad (8, 38)$$

Следовательно, подставляя в уравнение (8, 37) значение токов из уравнений (8, 34) и (8, 38), получим

$$(\dot{E}_A - \dot{U}_0) Y_A + (\dot{E}_B - \dot{U}_0) Y_B + (\dot{E}_C - \dot{U}_0) Y_0 = \dot{U}_0 Y_0,$$

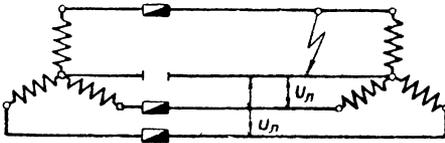
откуда

$$\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C = \dot{U}_0 (Y_A + Y_B + Y_C + Y_0)$$

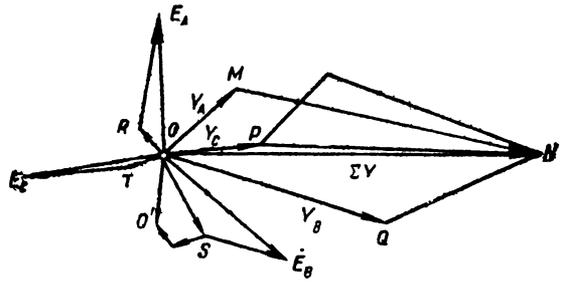
и

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_0}. \quad (8, 39)$$

Сравнивая формулы (8, 35) и (8, 39)¹, мы видим, что применение нулевого провода уменьшает величину \dot{U}_0 и, следовательно, неравномерность напряжений. Это уменьшение будет тем значительнее, чем больше проводимость нулевого провода Y_0 , т. е. чем больше сечение нулевого провода.



Фиг. 8, 33.



Фиг. 8, 34.

Следует заметить недопустимость установки предохранителей в нулевом проводе, так как при коротком замыкании и перегорании предохранителя в нулевом проводе (фиг. 8, 33) потребители, приключенные к неповрежденным фазам, попадают под линейное напряжение вместо фазового, что может привести к повреждению приборов и аппаратов, рассчитанных на фазовое напряжение. Защита же от последствий короткого замыкания вполне обеспечивается предохранителями на линейных проводах.

Вектор \dot{U}_0 может быть также определен графически. Для примера разберем случай неравномерной нагрузки без нулевого провода. \dot{U}_0 определяется по формуле (8, 35). Представим эту формулу в таком виде:

$$\dot{U}_0 = \dot{E}_A \frac{Y_A}{\Sigma Y} + \dot{E}_B \frac{Y_B}{\Sigma Y} + \dot{E}_C \frac{Y_C}{\Sigma Y}. \quad (8, 35)$$

¹ Формула (8, 39) имеет более общий характер, так как при отсутствии нулевого провода можно полагать $Y_0 = 0$. Таким образом формула (8, 39) включает в себе формулу (8, 35).

На фиг. 8,34 построены векторы $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C, Y_A, Y_B, Y_C$. Сумма $\sum Y$ может быть получена путем геометрического сложения векторов $\mathbf{OM} = Y_A, \mathbf{OQ} = Y_B$ и $\mathbf{OP} = Y_C$ и представлена вектором \mathbf{ON} .

Построим ряд подобных треугольников:

$$\Delta ORE_A \sim \Delta OMN; \quad \Delta OSE_B \sim \Delta OQN; \quad \Delta OTE_C \sim \Delta OPN.$$

Тогда векторы \mathbf{OR}, \mathbf{OS} и \mathbf{OT} соответственно равны:

$$\mathbf{OR} = \mathbf{OE}_A \frac{\mathbf{OM}}{\mathbf{ON}} = \dot{E}_A \frac{Y_A}{\sum Y};$$

$$\mathbf{OS} = \mathbf{OE}_B \frac{\mathbf{OQ}}{\mathbf{ON}} = \dot{E}_B \frac{Y_B}{\sum Y};$$

$$\mathbf{OT} = \mathbf{OE}_C \frac{\mathbf{OP}}{\mathbf{ON}} = \dot{E}_C \frac{Y_C}{\sum Y}.$$

Складывая геометрически эти векторы \mathbf{OR}, \mathbf{OS} и \mathbf{OT} , получим вектор \mathbf{OO}' , равный по (8,35) искомому вектору смещения нейтрали \dot{U}_0 .

Аналогичным образом может быть построен вектор \dot{U}_0 и в случае наличия нулевого провода.

Выведенные формулы справедливы как для симметричных, так и для несимметричных э. д. с. \dot{E}_A, \dot{E}_B и \dot{E}_C .

При равномерной нагрузке $Y_A = Y_B = Y_C = Y$ формула (8,39) принимает следующий вид:

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{E}_A Y + \dot{E}_B Y + \dot{E}_C Y}{3Y + Y_0} = \frac{Y(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3Y + Y_0}. \quad (8,40)$$

Отсюда следует, что только для симметричной равномерно нагруженной системы $\dot{U}_0 = 0$, так как в этом случае $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$ для несимметричной системы, даже при равномерной нагрузке фаз \dot{U}_0 не равно нулю. При отсутствии нулевого провода в последнем случае

$$\dot{U}_0 = \frac{Y(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3Y} = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{3}. \quad (8,41)$$

В предыдущих формулах векторы \dot{E}_A, \dot{E}_B и \dot{E}_C представляли фазовые э. д. с. Если при неравномерной нагрузке фаз известны не э. д. с., а фазовые напряжения в каком-либо месте цепи, т. е. напряжения провода фазы относительно нулевой точки генератора, то вместо э. д. с. \dot{E}_A, \dot{E}_B и \dot{E}_C в вышеуказанные формулы следует подставить фазовые напряжения \dot{U}_A, \dot{U}_B и \dot{U}_C .

Если известны не фазовые, а линейные напряжения $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ (фиг. 8,35), то токи в отдельных фазах звезды можно определить следующим образом:

Обозначим напряжение фаз A, B, C между точками A, B, C и O' топографической диаграммы (фиг. 8,36) через

$$\dot{U}_{AO'}, \dot{U}_{BO'}, \dot{U}_{CO'}.$$

Тогда токи в отдельных фазах

$$\left. \begin{aligned} i_A &= \dot{U}_{AO'} Y_A; \\ i_B &= \dot{U}_{BO'} Y_B = (\dot{U}_{AO'} - \dot{U}_{AB}) Y_B; \\ i_C &= \dot{U}_{CO'} Y_C = (\dot{U}_{AO'} + \dot{U}_{CA}) Y_C. \end{aligned} \right\} \quad (8,42)$$

Так как при этом

$$i_A + i_B + i_C = 0,$$

то

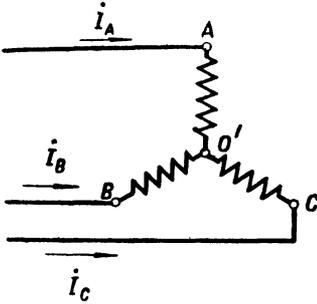
$$\dot{U}_{AO'} Y_A + (\dot{U}_{AO'} - \dot{U}_{AB}) Y_B + (\dot{U}_{AO'} + \dot{U}_{CA}) Y_C = 0,$$

откуда

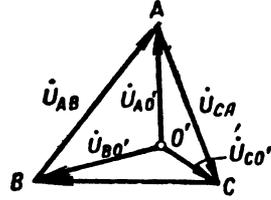
$$\dot{U}_{AO'} = \frac{\dot{U}_{AB} Y_B - \dot{U}_{CA} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{U}_{AB} Y_B + \dot{U}_{AC} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}. \quad (8,43)$$

Подставляя найденное значение $\dot{U}_{AO'}$ в (8,42), находим все токи.

Формулы (8,34), (8,39), (8,42), (8,43) дают возможность определить токи и напряжения трехфазной цепи, соединенной звездой, при неравномерной нагрузке фаз.



Фиг. 8, 35.



Фиг. 8, 36.

Пример 8, 6. Сопротивления отдельных фаз нагрузки, соединенной в звезду, равны

$$Z_A = 40 + j30 = 50 e^{j36^\circ 54'} \Omega; \quad Z_B = 30 + j40 = 50 e^{j53^\circ 06'} \Omega; \\ Z_C = 20 = 20 e^{j0^\circ} \Omega.$$

Указанная нагрузка присоединяется к симметричному трехфазному источнику, соединенному в звезду, с фазовым напряжением

$$U_A = U_B = U_C = 1000 \text{ V.}$$

Комплексные выражения для фазовых напряжений

$$\dot{U}_A = 1000 e^{j0^\circ} \text{ V}; \quad \dot{U}_B = 1000 e^{-j120^\circ} = -500 - j866 \text{ V}; \quad \dot{U}_C = 1000 e^{-j240^\circ} = \\ = -500 + j866 \text{ V.}$$

Проводимости отдельных фаз

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = 0,02 e^{-j36^\circ 54'} = 0,016 - j0,012 \text{ S}; \\ Y_B = \frac{1}{Z_B} = 0,02 e^{-j53^\circ 06'} = 0,012 - j0,016 \text{ S}; \\ Y_C = \frac{1}{Z_C} = 0,05 e^{j0^\circ} = 0,050 \text{ S.}$$

Пользуясь формулой (8, 35), находим

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{1\,000 e^{j0^\circ} 0,02 e^{-j36^\circ 54'} + 1\,000 e^{-j120^\circ} 0,02 e^{-j53^\circ 06'} + 1\,000 e^{-j240^\circ} 0,05}{0,016 - j0,012 + 0,012 - j0,016 + 0,050} = \\ &= \frac{4,07 e^{j135^\circ}}{0,0828 e^{-j19^\circ 42'}} = 490 e^{j154^\circ 42'} = -444 + j210 \text{ V.} \end{aligned}$$

Определим напряжения, действующие в отдельных фазах, по формулам (8, 36):

$$\begin{aligned} \dot{U}_A - \dot{U}_0 &= 1\,000 - (-444 + j210) = 1\,444 - j210 = 1\,460 e^{-j8^\circ 24'} \text{ V;} \\ \dot{U}_B - \dot{U}_0 &= -500 - j866 + 444 - j210 = -56 - j1\,076 = 1\,077 e^{-j93^\circ} \text{ V;} \\ \dot{U}_C - \dot{U}_0 &= -500 + j866 + 444 - j210 = -56 + j656 = 658 e^{+j94^\circ 54'} \text{ V.} \end{aligned}$$

Токи в отдельных фазах найдем по формулам (8, 34):

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= 1\,460 e^{-j8^\circ 24'} 0,02 e^{-j36^\circ 54'} = 29,2 e^{-j45^\circ 18'} = 20,5 - j20,7 \text{ A;} \\ \dot{I}_B &= 1\,077 e^{-j93^\circ} 0,02 e^{-j53^\circ 06'} = 21,5 e^{-j146^\circ 06'} = -17,8 - j12,0 \text{ A;} \\ \dot{I}_C &= 658 e^{j94^\circ 54'} 0,05 = 32,9 e^{j94^\circ 54'} = -2,8 + j32,7 \text{ A.} \end{aligned}$$

Для проверки вычислений определим сумму токов

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 20,5 - j20,7 - 17,8 - j12,0 - 2,8 + j32,7 = -0,1 \text{ A} \approx 0.$$

Неувязка обусловлена приближенностью расчетов, произведенных на логарифмической линейке.

Как видно из предыдущего, неравномерность напряжений, действующих в отдельных фазах, весьма велика (1 460, 1,077 и 658 V). Для уменьшения этой неравномерности применим нулевой провод с полным сопротивлением

$$Z_0 = 3 + j4 = 5 e^{j53^\circ 06'} \text{ }\Omega,$$

проводимость его равна

$$Y_0 = 0,2 e^{-j53^\circ 06'} = 0,12 - j0,16 \text{ S.}$$

Пользуясь формулой (8, 39), определим \dot{U}_0 :

$$\dot{U}_0 = \frac{40,7 e^{j135^\circ}}{0,0828 e^{-j19^\circ 42'} + 0,2 e^{-j53^\circ 06'}} = -149 + j3,9 \text{ V.}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{U}_A - \dot{U}_0 &= 1\,000 + 149 - j3,9 = 1\,149 - j3,9 = 1\,149 e^{-j0^\circ 12'} \text{ V;} \\ \dot{U}_B - \dot{U}_0 &= -500 - j866 + 149 + j3,9 = -351 - j862 = 930 e^{-j112^\circ 52'} \text{ V;} \\ \dot{U}_C - \dot{U}_0 &= -500 + j866 + 149 + j3,9 = -351 + j866 = 935 e^{+j112^\circ 0,6'} \text{ V.} \end{aligned}$$

Применение нулевого провода значительно уменьшило неравномерность напряжений.

Для определения степени неравномерности напряжений можно пользоваться следующей формулой электротехнических правил и норм ЦЭС (4-е издание, стр. 217):

$$\frac{\sum \Delta E^2}{E_{cp}^2},$$

где $\Delta E_A = E_A - E_{cp}$; $\Delta E_B = E_B - E_{cp}$ и т. д.,

$$E_{cp} = \frac{E_A + E_B + E_C + \dots}{n},$$

где n — число фаз. В настоящем примере

$$E_{cp} = \frac{1149 + 930 + 935}{3} \approx 1005 \text{ V}; \quad \Delta E_A = 144 \text{ V}; \quad \Delta E_B = -75 \text{ V}; \quad \Delta E_C = -70 \text{ V}.$$

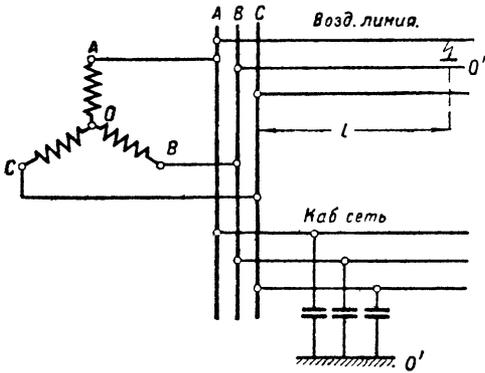
Степень неравномерности напряжений

$$\frac{\sum \Delta E^2}{E_{cp}^2} = \frac{144^2 + (-75)^2 + (-70)^2}{1005^2} \approx 0,03.$$

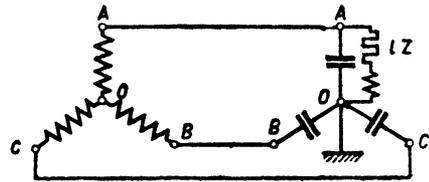
Согласно указанию норм многофазная система напряжений считается практически симметричной, если эта величина меньше 0,004.

Пример 8,7. На фиг. 8,37 представлена схема соединения кабельной сети и воздушной линии, работающих параллельно и присоединенных к генератору, соединенному звездой.

При замыкании на землю одной фазы воздушной линии на других фазах могут появиться напряжения, значительно превышающие нормальное. Заменим схему фиг. 8,37 более простой схемой (фиг. 8,38), в которой мы пренебрегаем малым сопротивлением кабеля, но зато учитываем емкость его отдельных фаз по



Фиг. 8, 37.



Фиг. 8, 38.

отношению к земле. Кажущееся сопротивление заземлившейся фазы воздушной линии, через которую может протекать значительный ток, по схеме фиг. 8,38 учтено в виде эквивалентного индуктивно-омического сопротивления lZ . Емкость представлена в виде конденсаторов, включенных между фазами A, B, C и точкой O' , соответствующей земле. Как видно из фиг. 8,38, получившаяся схема может быть рассматриваема как соединение звездой при неравномерной нагрузке фаз. Следовательно, напряжение смещения нейтрали определится по формуле (8,35).

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C},$$

где $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ — фазовые напряжения.

В данном случае

$$Y_A = j\omega C + \frac{1}{lZ}; \quad Y_B = j\omega C; \quad Y_C = j\omega C,$$

где C — емкость одной фазы на землю, l — расстояние от станции до места замыкания на землю, а $Z = R + j\omega L$ — кажущееся сопротивление одной фазы воздушной линии наединицу длины.

По формуле (8,35)

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{\dot{U}_A \left(j\omega C + \frac{1}{lZ} \right) + \dot{U}_B j\omega C + \dot{U}_C j\omega C}{j\omega C + \frac{1}{lZ} + j\omega C + j\omega C} = \\ &= \frac{(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) j\omega C + \dot{U}_A \frac{1}{lZ}}{3 j\omega C + \frac{1}{lZ}}. \end{aligned}$$

Так как при симметричной системе $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$, то

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_A}{1 + 3 j\omega C lZ}. \quad (8,44)$$

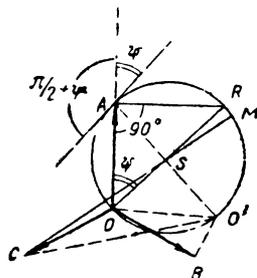
Обозначим вектор Z через $Z e^{j\psi}$, где $\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L}{R}$, тогда

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_A}{1 + 3 \omega C l Z e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)}}, \quad (8,45)$$

или

$$\dot{U}_0 + \dot{U}_0 3 \omega C l Z e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)} = \dot{U}_A.$$

При изменении l конец вектора \dot{U}_0 перемещается по дуге окружности, так как (8,45) представляет собой уравнение окружности. На фиг. 8,39 представлена топографическая диаграмма для данного случая. Правило построения круговой диаграммы для векторного уравнения того же типа, что в уравнении (8,45) приведено в § 6, 4. Точка O' соединена с землей, поэтому напряжения отдельных фаз относительно земли представлены векторами, проведенными из точки O' к точкам A, B и C . Как видно из фиг. 8,39, наибольшее напряжение относительно земли может получить фаза C . Соединяя точку C с центром окружности S и продолжая отрезок CS до пересечения с окружностью в точке M , мы найдем отрезок MC , изображающий максимально возможное напряжение фазы C относительно земли. Это напряжение U_{Cm} равно приблизительно



Фиг. 8, 39.

$$U_{Cm} = |RO| + |OC|,$$

где RO — диаметр окружности.

Угол ROA равен ψ . Из прямоугольного треугольника RAO имеем

$$RO = \frac{|OA|}{\cos \psi} = \frac{U}{\cos \psi},$$

где U — величина фазового напряжения генератора.

ак как $|OC| = U$, то

$$U_{Cm} \approx \frac{U}{\cos \psi} + U = U \left(1 + \frac{1}{\cos \psi} \right). \quad (8,46)$$

Определим расстояние от станции до той точки, при замыкании которой напряжение фазы C относительно земли становится максимальным.

По формуле (8,44) находим, что

$$\dot{U}_A - \dot{U}_0 = \dot{U}_0(1 + 3j\omega C l Z) - \dot{U}_0 = \dot{U}_0 3j\omega C l Z;$$

$\dot{U}_A - \dot{U}_0$ выражается на диаграмме отрезком **AM**, а \dot{U}_0 — отрезком **OM**, поэтому для абсолютных величин имеем

$$|\mathbf{AM}| = |\mathbf{OM}| 3 \omega C l z,$$

откуда

$$l = \frac{|\mathbf{AM}|}{|\mathbf{OM}| 3 \omega C z}.$$

Отношение $|\mathbf{AM}|$ к $|\mathbf{OM}|$ можно приближенно выразить так (см. фиг. 8,39):

$$\frac{|\mathbf{AM}|}{|\mathbf{OM}|} \approx \frac{|\mathbf{AR}|}{|\mathbf{OR}|} = \sin \psi.$$

Следовательно,

$$l = \frac{\sin \psi}{3 \omega C z}. \quad (8,47)$$

Предположим, что для воздушной линии $R = 0,15 \Omega/\text{km}$, а $\omega L = 0,8 \Omega/\text{km}$. Большое значение ωL в данном случае взято потому, что ток протекает по петле провод — земля, L — индуктивность половины этой петли.

При этих данных

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L}{R} = 5,33; \quad \cos \psi = 0,184; \quad \sin \psi \approx 1; \quad z = 0,814 \Omega/\text{km}.$$

Максимальное напряжение одной из фаз по отношению к земле может быть равно

$$U_m \approx U \left(1 + \frac{1}{0,184} \right) = 6,4 U,$$

т. е. напряжение может превосходить нормальное фазовое более чем в шесть раз. Примем общую емкость фазы кабельной сети $C = 200 \mu\text{F}$, тогда $3\omega C = 0,188 \text{ S}$. Опасное расстояние будет составлять

$$l = \frac{1}{0,188 \cdot 0,814} = 6,5 \text{ km}$$

8,12. Неравномерная нагрузка фаз при соединении треугольником

Если линейные напряжения нагрузки заданы, то определение токов в отдельных фазах треугольника и токов в линейных проводах может быть произведено весьма просто. Векторы \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} и \dot{U}_{CA} представляют собой заданные фазовые напряжения нагрузки, соединенной в треугольник (фиг. 8,40). Тогда:

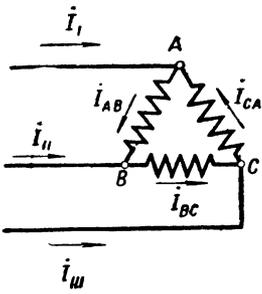
$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \dot{U}_{AB} Y_{AB}; & \dot{I}_I &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \\ \dot{I}_{BC} &= \dot{U}_{BC} Y_{BC}; & \dot{I}_{II} &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \\ \dot{I}_{CA} &= \dot{U}_{CA} Y_{CA}; & \dot{I}_{III} &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}, \end{aligned} \right\} \quad (8,48)$$

где Y_{AB} , Y_{BC} , Y_{CA} — комплексные выражения проводимостей нагрузки. Сумма линейных токов будет при этом равна нулю:

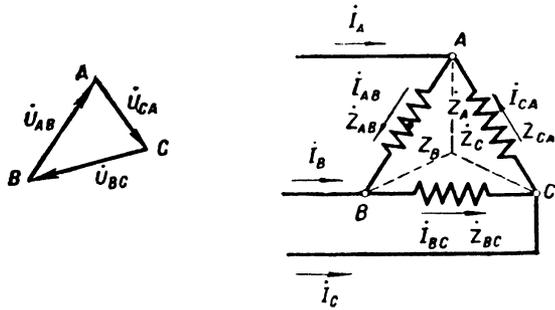
$$\dot{I}_I + \dot{I}_{II} + \dot{I}_{III} = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} + \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} + \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 0.$$

Если заданы фазовые э. д. с. или фазовые напряжения в каком-либо месте сети при соединении нагрузки треугольником, то проще всего определить токи в проводах и в фазах нагрузки следующим образом:

Треугольник преобразуется в эквивалентную звезду (см. гл. 1, стр. 56). Токи в звезде (фиг. 8,41) I_A , I_B и I_C определяются по методу, изложенному выше (§ 8,11). Эти токи, очевидно, проходят в линейных проводах. Токи в фазах треугольника определяются из следующих соотношений,



Фиг. 8, 40.



Фиг. 8, 41.

выражающих равенство напряжений между одноименными точками треугольника и эквивалентной звезды:

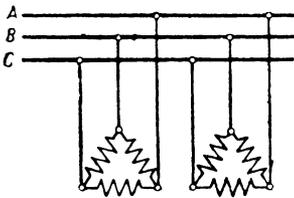
$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= I_A Z_A - I_B Z_B = I_{AB} Z_{AB}; \\ \dot{U}_{BC} &= I_B Z_B - I_C Z_C = I_{BC} Z_{BC}; \\ \dot{U}_{CA} &= I_C Z_C - I_A Z_A = I_{CA} Z_{CA}, \end{aligned} \right\} \quad (8, 49)$$

где Z_{AB} , Z_{BC} , Z_{CA} — кажущиеся сопротивления фаз треугольника, а Z_A , Z_B , Z_C — кажущиеся сопротивления фаз звезды.

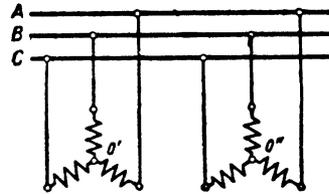
Следовательно,

$$i_{AB} = \frac{i_A Z_A - i_B Z_B}{Z_{AB}}; \quad i_{BC} = \frac{i_B Z_B - i_C Z_C}{Z_{BC}}; \quad i_{CA} = \frac{i_C Z_C - i_A Z_A}{Z_{CA}}. \quad (8, 50)$$

При наличии двух или нескольких потребителей, соединенных треугольником (фиг. 8,42), можно сложить проводимости параллельно соеди-



Фиг. 8, 42.



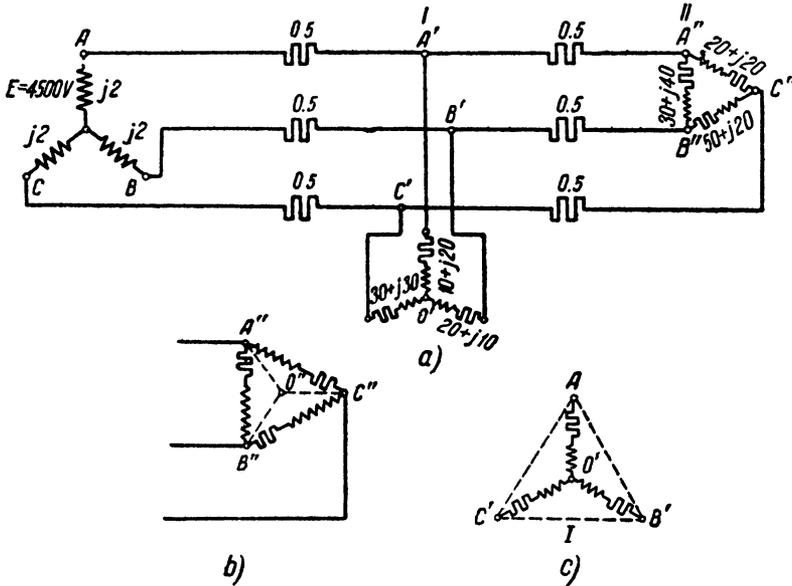
Фиг. 8, 43.

ненных сторон треугольников, если, разумеется, между их вершинами нет напряжения (которое может появиться вследствие падения напряжения в соединяющих проводах, в последнем случае стороны треугольников нельзя считать включенными параллельно). Полученный после сложения общий эквивалентный треугольник необходимо преобразовать в звезду и, таким образом, свести задачу к случаю неравномерной нагрузки при соединении звездой (§ 8,11). Если же все потребители соеди-

нены звездой, то сложение проводимостей отдельных фаз невозможно, так как между нулевыми точками отдельных звезд O' и O'' (фиг. 8,43) может при неравномерной нагрузке существовать напряжение и, следовательно, отдельные ветви звезд нельзя считать соединенными параллельно.

Сложение проводимостей также невозможно, если часть потребителей соединена звездой, а часть треугольником. В этих случаях необходимо предварительно преобразовать все соединения звездой в эквивалентные треугольники (см. гл. 1, стр. 56), затем все треугольники складываются параллельно; результирующий общий треугольник преобразовывается в общую звезду, и таким образом задача сводится к определению токов и напряжений при одной нагрузке, соединенной звездой. После определения токов в общей эквивалентной звезде токи в общем треугольнике определяются по формуле (8,50); затем токи распределятся по отдельным треугольникам по правилу для параллельных цепей, и наконец, токи в соединениях звездой определяются по формулам (8,48).

Пример 8,8. Расчет при неравномерной нагрузке фаз. На фиг. 8,44, а представлена схема сети с двумя потребителями, из которых один соединен звездой, а другой треугольником.



Фиг. 8, 44.

Сопротивления отдельных участков даны ниже:

$$\begin{aligned} x_{A0} &= x_{B0} = x_{C0} = j2 \Omega; \\ r_{AA'} &= r_{BB'} = r_{CC'} = 0,5 \Omega; \\ r_{A'A''} &= r_{B'B''} = r_{C'C''} = 0,5 \Omega; \\ Z_{A''B''} &= 30 + j40 = 50e^{j53,2^\circ} \Omega; \\ Z_{B''C''} &= 50 + j20 = 53,7e^{j21,8^\circ} \Omega; \\ Z_{C''A''} &= 20 + j20 = 28,3e^{j45^\circ} \Omega; \\ Z_{A''O'} &= 10 + j20 = 22,35e^{j63,5^\circ} \Omega; \\ Z_{B''O'} &= 20 + j10 = 22,35e^{j26,5^\circ} \Omega; \\ Z_{C''O'} &= 30 + j30 = 42,4e^{j45^\circ} \Omega. \end{aligned}$$

Фазовые э. д. с.—генератора симметричны и равны 4 500 В. Примем

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= 4\,500 \cdot e^{j0^\circ} = 4\,500 \text{ В}; \\ \dot{E}_B &= 4\,500 \cdot e^{-j120^\circ} = -2\,250 - j\,3\,900 \text{ В}; \\ \dot{E}_C &= 4\,500 \cdot e^{-j240^\circ} = -2\,250 + j\,3\,900 \text{ В}.\end{aligned}$$

Предварительно необходимо преобразовать треугольник $A''B''C''$ в эквивалентную звезду¹ $A''B''C''O''$ (фиг. 8,44):

$$\begin{aligned}Z_{A''B''} + Z_{B''C''} + Z_{C''A''} &= 30 + j40 + 50 + j20 + 20 + j20 = 100 + \\ &+ j80 \text{ }\Omega = 128,2e^{j38,7^\circ} = \sum Z_{kl}; \\ Z_{A''O''} &= \frac{Z_{A''B''}Z_{C''A''}}{\sum Z_{kl}} = \frac{50 \cdot e^{j53,2^\circ} \cdot 28,3e^{j45^\circ}}{128,2e^{j38,7^\circ}} = 11,08e^{j59,5^\circ} = 5,60 + j\,9,52 \text{ }\Omega; \\ Z_{B''O''} &= \frac{Z_{A''B''}Z_{B''C''}}{\sum Z_{kl}} = \frac{50e^{j53,2^\circ} \cdot 53,7e^{j21,8^\circ}}{128,2e^{j38,7^\circ}} = 21e^{j36,9^\circ} = 16,9 + j\,12,42 \text{ }\Omega; \\ Z_{C''O''} &= \frac{Z_{B''C''}Z_{C''A''}}{\sum Z_{kl}} = \frac{53,7e^{j21,8^\circ} \cdot 28,3e^{j45^\circ}}{128,2e^{j38,7^\circ}} = 11,88e^{j28,1^\circ} = 10,45 + j\,5,59 \text{ }\Omega;\end{aligned}$$

Прибавляя последовательно сопротивления проводов участка $I-II$, получим звезду $A'O''$:

$$\begin{aligned}Z_{A'O''} &= 5,6 + j9,52 + 0,5 = 6,1 + j9,52 = 11,3e^{j57,9^\circ} \text{ }\Omega; \\ Z_{B'O''} &= 16,9 + j12,42 + 0,5 = 17,4 + j12,42 = 21,38e^{j35,5^\circ} \text{ }\Omega; \\ Z_{C'O''} &= 10,45 + j5,59 + 0,5 = 10,95 + j5,59 = 12,3e^{j27^\circ} \text{ }\Omega.\end{aligned}$$

Преобразуем нагрузку $A'B'C'O'$ (нагрузка, присоединенная в точке I) в треугольник (фиг. 8,44, c):

$$\begin{aligned}Z_{A'O'}Z_{B'O'} + Z_{A'O'}Z_{C'O'} + Z_{B'O'}Z_{C'O'} &= 22,35e^{j63,5^\circ} \cdot 22,35e^{j26,5^\circ} + 22,35e^{j63,5^\circ} \cdot 42,4e^{j45^\circ} + \\ &+ 22,35e^{j26,5^\circ} \cdot 42,4e^{j45^\circ} \text{ }\Omega = j\,2\,300 \text{ }\Omega = \sum Z_{kl} \cdot Z_{lm}.\end{aligned}$$

Сопротивление эквивалентного треугольника $A'B'C'$ (I)

$$\begin{aligned}Z_{A'B'_I} &= \frac{\sum Z_{kl} \cdot Z_{lm}}{Z_{C'O'}} = \frac{2\,300e^{j90^\circ}}{42,4e^{j45^\circ}} = 54,2e^{j45^\circ} = 38,4 + j\,38,4 \text{ }\Omega; \\ Z_{B'C'_I} &= \frac{\sum Z_{kl} \cdot Z_{lm}}{Z_{A'O'}} = \frac{2\,300e^{j90^\circ}}{22,35e^{j63,5^\circ}} = 103e^{j26,5^\circ} = 92 + j\,46 \text{ }\Omega; \\ Z_{C'A'_I} &= \frac{\sum Z_{kl} \cdot Z_{lm}}{Z_{B'O'}} = \frac{2\,300e^{j90^\circ}}{22,35 \cdot e^{j28,5^\circ}} = 103 \cdot e^{j63,5^\circ} = 46 + j\,92 \text{ }\Omega.\end{aligned}$$

Преобразуем звезду $A'B'C'O''$ (см. выше) в эквивалентный треугольник:

$$\begin{aligned}Z_{A'O''} \cdot Z_{B'O''} + Z_{A'O''} \cdot Z_{C'O''} + Z_{B'O''} \cdot Z_{C'O''} &= 11,3 \cdot e^{j57,9^\circ} \cdot 21,38 \cdot e^{j35,5^\circ} + \\ &+ 11,3 \cdot e^{j57,9^\circ} \cdot 12,3e^{j27^\circ} + 21,38e^{j35,5^\circ} \cdot 12,3e^{j27^\circ} \text{ }\Omega = 123,2 + j\,611,7 \text{ }\Omega = \\ &= 625e^{j78,6^\circ} \text{ }\Omega = \sum Z_{kl} \cdot Z_{lm}.\end{aligned}$$

¹ Если бы не было соединительных проводов между точками I и II , то можно было бы сразу преобразовать звезду $A'B'C'O'$ в треугольник и параллельно складывать оба треугольника.

Сопrotивление эквивалентного треугольника $A'B'C'$ (II)

$$Z_{A'B'_{II}} = \frac{\sum Z_{kl} \cdot Z_{lm}}{Z_{C'O''}} = \frac{625 \cdot e^{j78,6^\circ}}{12,3e^{j27^\circ}} = 50,7e^{j51,6^\circ} \Omega = 31,5 + j39,6 \Omega;$$

$$Z_{B'C'_{II}} = \frac{\sum Z_{kl} Z_{lm}}{Z_{A'O''}} = \frac{625 \cdot e^{j78,6^\circ}}{11,3e^{j57,3^\circ}} = 55,4e^{j21,3^\circ} \Omega = 51,5 + j20,05 \Omega;$$

$$Z_{C'A'_{II}} = \frac{\sum Z_{kl} Z_{lm}}{Z_{B'O''}} = \frac{625 \cdot e^{j78,6^\circ}}{21,38e^{j85,5^\circ}} = 29,23e^{j48,5^\circ} \Omega = 20 + j21,4 \Omega.$$

Складывая параллельно два треугольника $A'B'C'$ (I) и $A'B'C'$ (II), получим результирующий треугольник с сопротивлением

$$Z_{A'B'} = \frac{54,2e^{j45^\circ} \cdot 50,7e^{j51,6^\circ}}{31,5 + j39,6 + 38,4 + j38,4} = 26,3e^{j48,5^\circ} = 17,4 + j19,6 \Omega;$$

$$Z_{B'C'} = \frac{103 \cdot e^{j28,5^\circ} \cdot 55,4e^{j21,3^\circ}}{92 + j46 + 51,5 + j20,05} = 36e^{j28,2^\circ} = 33 + j14,15 \Omega;$$

$$Z_{C'A'} = \frac{103 \cdot e^{j88,5^\circ} \cdot 29,23 \cdot e^{j48,1^\circ}}{46 + j92 + 20 + j21,4} = 23e^{j46,8^\circ} = 15,7 + j16,75 \Omega.$$

Преобразуем этот треугольник в эквивалентную звезду:

$$Z_{A'B'} + Z_{B'C'} + Z_{C'A'} = 17,4 + j19,6 + 33 + j14,15 + 15,7 + j16,75 \Omega = 66,1 + j50,5 \Omega = 83,5e^{j37,4^\circ} \Omega;$$

$$Z'_A = \frac{23e^{j46,8^\circ} \cdot 26,3e^{j48,5^\circ}}{83,5 \cdot e^{j37,4^\circ}} = 7,25e^{j57,9^\circ} \Omega = 3,85 + j6,14 \Omega;$$

$$Z'_B = \frac{26,3e^{j48,5^\circ} \cdot 36 \cdot e^{j28,2^\circ}}{83,5 \cdot e^{j37,4^\circ}} = 11,32e^{j34,3^\circ} \Omega = 9,36 + j6,38 \Omega;$$

$$Z'_C = \frac{23 \cdot e^{j46,8^\circ} \cdot 36e^{j28,2^\circ}}{83,5 \cdot e^{j37,4^\circ}} = 9,9e^{j32,6^\circ} \Omega = 8,33 + j5,32 \Omega.$$

Прибавляя сопротивления участка линии до точки I и сопротивление генератора, получим результирующую звезду с сопротивлениями:

$$Z_A = 3,85 + j6,14 + 0,5 + j2 = 4,35 + j8,14 \Omega = 9,26e^{j61,9^\circ} \Omega;$$

$$Z_B = 9,36 + j6,38 + 0,5 + j2 = 9,86 + j8,38 \Omega = 12,92e^{j40,3^\circ} \Omega;$$

$$Z_C = 8,33 + j5,32 + 0,5 + j2 = 8,83 + j7,32 \Omega = 11,45e^{j39,6^\circ} \Omega.$$

Проводимости соответственно равны:

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = 0,108 \cdot e^{-j61,9^\circ} \text{ S};$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = 0,0773 \cdot e^{-j40,3^\circ} \text{ S};$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = 0,0875e^{-j39,6^\circ} \text{ S};$$

$$\sum Y = Y_A + Y_B + Y_C = 0,108e^{-j61,9^\circ} + 0,0773e^{-j40,3^\circ} + 0,0875e^{-j39,6^\circ} = 0,269e^{-j48,6^\circ} \text{ S}.$$

Напряжение смещения нейтрали в результирующей звезде равно

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \\ &= \frac{4500 \cdot 0,108e^{-j61,9^\circ} + 4500 \cdot e^{-j120^\circ} \cdot 0,0773 \cdot e^{-j39,6^\circ} + 4500 \cdot e^{-j240^\circ} \cdot 0,0875e^{-j39,6^\circ}}{0,269e^{-j48,6^\circ}} = \\ &= 360 - j484 \text{ V}. \end{aligned}$$

Токи в генераторе и на участке линии до точки I равны:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= (\dot{E}_A - \dot{U}_0) Y_A = (4500 - 360 + j484) 0,108 \cdot e^{-j61,9^\circ} \text{ A} = \\ &= 257,1 - j370,3 \text{ A} = 450e^{-j55,9^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_B &= (\dot{E}_B - \dot{U}_0) Y_B = (-2250 - j3900 - 360 + j484) 0,0773e^{-j40,3^\circ} \text{ A} = \\ &= -325 - j70,5 \text{ A} = 333e^{-j167,8^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_C &= (\dot{E}_C - \dot{U}_0) Y_C = (-2250 + j3900 - 360 + j484) 0,0875e^{-j39,6^\circ} \text{ A} = \\ &= 69,5 + j441 \text{ A} = 446e^{j81,1^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Проверка правильности расчета:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 257,1 - j370,3 - 325 - j70,5 + 69,5 + j441 \text{ A} = 1,6 + j0,2 \text{ A} \approx 0^1$$

Напряжения в точке I равны:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_A &= \dot{I}_A Z'_A = 450 \cdot e^{-j55,9^\circ} \cdot 7,25e^{j57,9^\circ} \text{ V} = 3260e^{j2,6^\circ} \text{ V}; \\ \dot{U}'_B &= \dot{I}_B Z'_B = 333e^{-j167,8^\circ} \cdot 11,32e^{j34,3^\circ} \text{ V} = 3770e^{-j133,5^\circ} \text{ V}; \\ \dot{U}'_C &= \dot{I}_C Z'_C = 446e^{j81,1^\circ} \cdot 9,9e^{j32,6^\circ} \text{ V} = 4410e^{j113,7^\circ} \text{ V}; \\ \dot{U}_{A'B'} &= \dot{U}'_A - \dot{U}'_B = 3260e^{j2,6^\circ} - 3770e^{-j133,5^\circ} \text{ V} = 6520e^{j26,2^\circ} \text{ V}; \\ \dot{U}_{B'C'} &= \dot{U}'_B - \dot{U}'_C = 3770e^{-j133,5^\circ} - 4410e^{j113,7^\circ} \text{ V} = 6800e^{-j96,9^\circ} \text{ V}; \\ \dot{U}_{C'A'} &= \dot{U}'_C - \dot{U}'_A = 4410e^{j113,7^\circ} - 3260e^{j2,6^\circ} \text{ V} = 6360e^{j142,3^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

Токи в треугольнике $A'B'C'$ (I) равны:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A'B'} &= \frac{\dot{U}_{A'B'}}{Z_{A'B'}} = \frac{6520e^{j26,2^\circ}}{54,2e^{j45^\circ}} = 120e^{-j18,8^\circ} \text{ A} = 113,8 - j38,6 \text{ A}; \\ \dot{I}_{B'C'} &= \frac{\dot{U}_{B'C'}}{Z_{B'C'}} = \frac{6800e^{-j96,9^\circ}}{103e^{j26,5^\circ}} = 66e^{-j123,4^\circ} \text{ A} = 36,4 - j55,2 \text{ A}; \\ \dot{I}_{C'A'} &= \frac{\dot{U}_{C'A'}}{Z_{C'A'}} = \frac{6360e^{j142,3^\circ}}{103e^{j63,5^\circ}} = 61,8 \cdot e^{j78,8^\circ} \text{ A} = 12 + j60,6 \text{ A}. \end{aligned}$$

Действительные токи в нагрузке $A'B'C'O'$ равны:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A'O'} &= \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'} = 113,8 - j38,6 - 12 - j60,6 = \\ &= 101,8 - j99,2 \text{ A} = 142 \cdot e^{-j44,3^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_{B'O'} &= \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'} = -36,4 - j55,2 - 113,8 + j38,6 \text{ A} = \\ &= -150,2 - j16,6 \text{ A} = 151 \cdot e^{-j173,7^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_{C'O'} &= \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'} = 12 + j60,6 + 36,4 + j55,2 \text{ A} = \\ &= 48,4 + j115,8 \text{ A} = 125,5e^{j67,8^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Напряжения на фазах нагрузки I равны:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A'O'} &= \dot{I}_{A'O'} \cdot Z_{A'O'} = 142e^{-j44,3^\circ} \cdot 22,35e^{j63,5^\circ} \text{ A} = 3175e^{j19,2^\circ} \text{ A}; \\ \dot{U}_{B'O'} &= \dot{I}_{B'O'} \cdot Z_{B'O'} = 151e^{-j173,7^\circ} \cdot 22,35e^{j26,5^\circ} \text{ A} = 3380 \cdot e^{-j147,2^\circ} \text{ A}; \\ \dot{U}_{C'O'} &= \dot{I}_{C'O'} \cdot Z_{C'O'} = 125,5 \cdot e^{j67,8^\circ} \cdot 42,4e^{j45^\circ} \text{ A} = 5320e^{j112,5^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

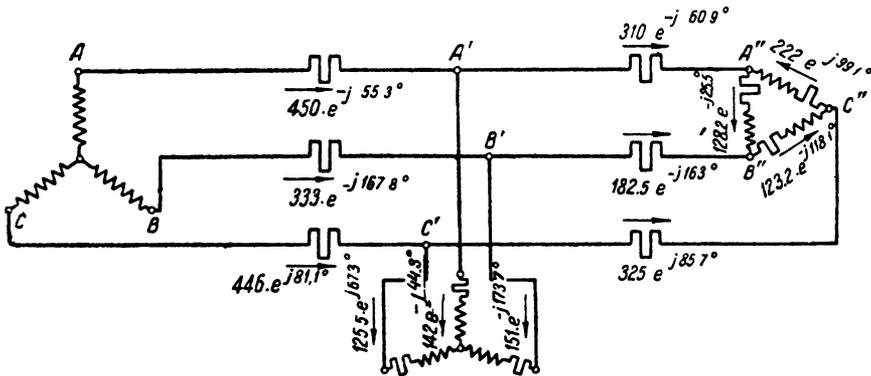
¹ Расчеты произведены на логарифмической линейке.

Токи в треугольнике $A'B'C'$ (II) равны:

$$\dot{I}_{A'B''} = \frac{\dot{U}_{A'B'}}{Z_{A'B''}} = \frac{6520e^{j26,2^\circ}}{50,7e^{j51,6^\circ}} = 128,5e^{-j25,4^\circ} \text{ A} = 116 - j55,1 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{B'C''} = \frac{\dot{U}_{B'C'}}{Z_{B'C''}} = \frac{6800e^{-j96,9^\circ}}{55,4e^{j21,3^\circ}} = 123e^{-j118,2^\circ} \text{ A} = -58,2 - j108,5 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{C'A''} = \frac{\dot{U}_{C'A'}}{Z_{C'A''}} = \frac{6360e^{j142,3^\circ}}{29,23e^{j48,1^\circ}} = 217,5e^{j99,2^\circ} \text{ A} = -33,9 + j214,5 \text{ A}.$$



Фиг. 8. 45.

Действительные токи в соединительных проводах на участке I-II равны:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A'A''} &= \dot{I}_{A'B''} - \dot{I}_{C'A''} = 116 - j55,1 + 33,9 - j214,5 \text{ A} = \\ &= 149,9 - j269,6 \text{ A} = 310e^{-j60,9^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{B'B''} &= \dot{I}_{B'C''} - \dot{I}_{A'B''} = -58,2 - j108,5 - 116 + j55,1 \text{ A} = \\ &= -174,2 - j53,4 \text{ A} = 182,5e^{-j168,0^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{C'C''} &= \dot{I}_{C'A''} - \dot{I}_{B'C''} = -33,9 + j214,5 + 58,2 + j108,5 \text{ A} = \\ &= 24,3 + j323 \text{ A} = 325e^{j85,7^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Напряжения на фазах нагрузки $A''B''C''$ равны:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A''B''} &= \dot{I}_{A'A''}Z_{A''O''} - \dot{I}_{B'B''}Z_{B''O''} = 310e^{-j60,9^\circ} \cdot 11,08e^{j59,5^\circ} - 182,5e^{j163^\circ} \cdot 21e^{j36,8^\circ} \text{ V} = \\ &= 5680 + j2990 \text{ V} = 6410e^{j27,7^\circ} \text{ V}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{B''C''} &= \dot{I}_{B'B''}Z_{B''O''} - \dot{I}_{C'C''}Z_{C''O''} = 182,5e^{j163^\circ} \cdot 21e^{j36,8^\circ} - 325 \cdot e^{j85,7^\circ} \cdot 11,88e^{j28,1^\circ} \text{ V} = \\ &= -724 - j6578 \text{ V} = 6620e^{-j96,3^\circ} \text{ V}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{C''A''} &= \dot{I}_{C'C''}Z_{C''O''} - \dot{I}_{A'A''}Z_{A''O''} = 325e^{j85,7^\circ} \cdot 11,88e^{j28,1^\circ} - 310e^{-j60,9^\circ} \cdot 11,08e^{j59,5^\circ} \text{ V} = \\ &= -4956 + j3588 \text{ V} = 6280e^{j144,1^\circ} \text{ V}. \end{aligned}$$

Наконец, действительные токи в треугольнике $A''B''C''$ равны:

$$\dot{I}_{A''B''} = \frac{\dot{U}_{A''B''}}{Z_{A''B''}} = \frac{6410e^{j27,7^\circ}}{50e^{j53,2^\circ}} = 128,2e^{-j25,5^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{B''C''} = \frac{\dot{U}_{B''C''}}{Z_{B''C''}} = \frac{6620e^{-j96,3^\circ}}{53,7e^{j21,3^\circ}} = 123,2e^{-j118,1^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{C^{\prime}A^{\prime}} = \frac{\dot{U}_{C^{\prime}A^{\prime}}}{Z_{C^{\prime}A^{\prime}}} = \frac{6280e^{j144,1^{\circ}}}{28,3e^{j45^{\circ}}} = 222e^{j99,1^{\circ}} \text{ А.}$$

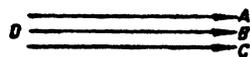
Полученные по расчету токи нанесены на фиг. 8,45.

8.13. Классификация многофазных систем

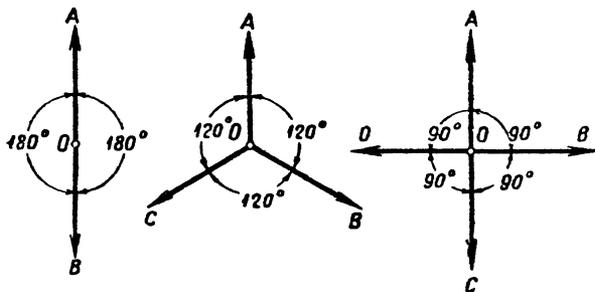
Помимо трехфазной системы могут быть получены и системы с иным числом фаз. Некоторые из таких систем имеют применение и на практике. Многофазные системы представляют собой соединение нескольких однофазных цепей, в которых действуют э. д. с. одинаковой частоты, отличающиеся по фазе.

Перейдем к рассмотрению различных типов многофазных систем.

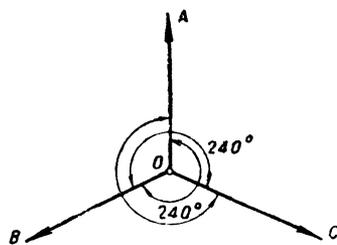
По числу фазовых цепей или фаз различают системы двухфазные, трехфазные и т. д. Наибольшее распространение имеет трехфазная система, как уже выше указано. Шестифазные и двенадцатифазные системы применяются для питания выпрямительных уста-



Фиг. 8. 47.



Фиг. 8. 46.



Фиг. 8. 48.

новок (ртутные выпрямители, конверторы). Однофазные же системы часто применяются для питания энергией электровозов. Остальные системы применяются крайне редко.

Многофазные системы называются симметричными, если э. д. с. отдельных фаз равны по величине и сдвинуты по фазе на равные углы. На фиг. 8,46 представлены векторные диаграммы симметричных систем: двухфазной, трехфазной и четырехфазной. Как видно из указанной фигуры, угол сдвига между векторами э. д. с. отдельных фаз равен

$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{m}$$

или в радианах

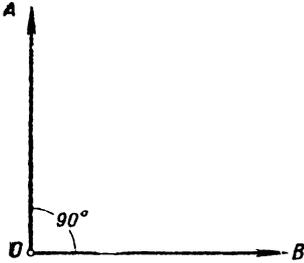
$$\alpha = \frac{2\pi}{m},$$

где m — число фаз. Необходимо отметить, что симметричными согласно вышеуказанному определению будут также трехфазные системы, изображенные на фиг. 8,47, где все векторы э. д. с. совпадают по фазе или же сдвинуты на угол в 360° и на фиг. 8,48, где сдвиг равен 240° . Двухфазная система, представленная на фиг. 8,49, очевидно, является несимметричной (ср. фиг. 8,46).

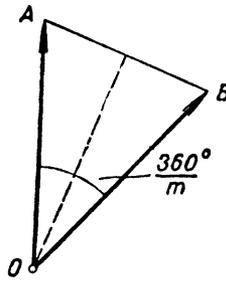
Если концы каждой из фазовых обмоток многофазной системы соединить со своей внешней цепью, то э. д. с. отдельных фаз будут неза-

всимо действовать в этих цепях, образуя так называемую несвязанную систему. Очевидно, несвязанная многофазная система представляет собой несколько независимых простых цепей. Число проводов, соединяющих генератор с потребителями энергии, будет в этом случае равно $2m$, где m — число фаз.

Связанной многофазной системой называется система, в которой цепи отдельных фаз электрически между собой связаны. В связанных



Фиг. 8, 49.



Фиг. 8, 50.

системах число проводов, соединяющих генератор с потребителями энергии, меньше $2m$, что представляет собой основное экономическое преимущество связанных систем.

Основные типы соединений многофазной системы — это соединение звездой и многоугольником. В первом случае объединяются все обратные провода отдельных цепей в один нулевой провод, который при

равномерной нагрузке фаз является излишним, во втором соединении все фазовые обмотки соединяются последовательно в замкнутый контур. При соединении многоугольником возможны по аналогии с треугольником (§ 3) два типа соединений — правое и левое.

Линейное напряжение между первой и второй фазами звезды, векторы которых, как выше было указано, сдвинуты на угол $\frac{360^\circ}{m}$, равно (фиг. 8, 50)

$$\begin{aligned} u_{AB} &= u_A - u_B = U_m \sin \omega t - U_m \sin \left(\omega t - \frac{360^\circ}{m} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{180^\circ}{m} U_m \sin \left(\omega t + 90^\circ - \frac{180^\circ}{m} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$U_L = 2 \sin \frac{180^\circ}{m} U_\phi. \quad (8, 51)$$

При $m > 6$ получается U_L меньше, чем U_ϕ , при $m < 6$ получается U_L больше, чем U_ϕ , и, наконец, при $m = 6$, т. е. для шестифазной системы,

$$U_L = U_\phi.$$

Линейный ток при соединении звездой равен фазовому: $I_L = I_\phi$.

Линейный ток при соединении многоугольником равен

$$\begin{aligned} i_{AB} &= i_A - i_B = I_m \sin (\omega t - \varphi) - I_m \sin \left(\omega t - \frac{360^\circ}{m} - \varphi \right) = \\ &= 2 I_m \sin \frac{180^\circ}{m} \sin \left(\omega t + 90^\circ - \frac{180^\circ}{m} - \varphi \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_L = 2 \sin \frac{180^\circ}{m} I_\phi. \quad (8, 52)$$

При $m > 6$ получается I_L меньше, чем I_ϕ , при $m < 6$ получается I_L больше, чем I_ϕ , и, наконец, при $m = 6$ имеем I_L равным I_ϕ . Линейное напряжение между смежными фазами равно для всех систем фазовому.

Многофазная система называется равномерно нагруженной в том случае, если кажущиеся полные сопротивления в каждой из фа-

зовых цепей равны по величине и по фазовому углу. В этом случае токи во всех фазах симметричной системы равны по амплитуде и сдвинуты на одинаковые углы относительно своих э. д. с.

Многофазная система называется уравновешенной в том случае, если суммарная мгновенная мощность всех ее фаз есть величина постоянная, в противном случае система называется неуравновешенной. Простая цепь однофазного тока является неуравновешенной, так как ее мгновенная мощность — величина переменная. При неуравновешенных системах мощность генератора, являясь величиной переменной, не соответствует в отдельные моменты времени мощности механического двигателя, вращающего генератор, что может привести к так называемым качаниям при двигателях с постоянным крутящим моментом.

Двухфазная симметричная система (фиг. 8, 46) является неуравновешенной, так как

$$p = p_A + p_B = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi) + UI \cos \varphi - \\ - UI \cos (2\omega t - 360^\circ - \varphi) = 2UI \cos \varphi - 2UI \cos (2\omega t - \varphi).$$

Наоборот, двухфазная несимметричная система со сдвигом фаз в 90° (фиг. 8, 49) является уравновешенной, так как

$$p = p_A + p_B = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi) + UI \cos \varphi - \\ - UI \cos (2\omega t - 180^\circ - \varphi) = 2UI \cos \varphi = \text{const.}$$

Вообще же симметричная m -фазная система со сдвигом фаз $\frac{2\pi}{m}$ является уравновешенной, если m больше 2. Мгновенные мощности отдельных фаз выражаются следующим образом:

$$p_A = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi); \\ p_B = UI \cos \varphi - UI \cos \left(2\omega t - \frac{4\pi}{m} - \varphi \right); \\ p_C = UI \cos \varphi - UI \cos \left(2\omega t - \frac{8\pi}{m} - \varphi \right) \text{ и т. д.}$$

Суммируя мощности отдельных фаз, получим

$$p = P = mUI \cos \varphi,$$

так как сумма вторых членов при $m > 2$ равна нулю.

8,14. Сравнение многофазных систем по экономичности

Трехфазная система получила наибольшее распространение благодаря своей экономичности. Для сравнения различных систем передачи энергии определим на конкретном примере соотношение количества проводникового материала, необходимого для передачи одной и той же кажущейся мощности при одинаковых экономических условиях, а именно, при одинаковом максимальном напряжении между двумя линейными проводами и при одинаковых потерях мощности в линии электропередачи. Будем сравнивать двухфазную, трехфазную, четырехфазную и шести-фазную системы переменного тока, а также систему постоянного тока. Обозначим индексом 1, 2, 3 и 6 величины в соответствующих системах переменного тока и без индексов — величины в системе передачи постоянным током.

Максимальное напряжение между линейными проводами примем равным 1 000 V, передаваемую мощность 100 kVA, а потери мощности 5 kW.

Определим действующее значение фазового напряжения для различных систем переменного тока:

$$U_{\phi_2} = \frac{1\,000}{\sqrt{2} \cdot 2} = 354 \text{ V};$$

$$U_{\phi_3} = \frac{1\,000}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 408 \text{ V};$$

$$U_{\phi_4} = \frac{1\,000}{\sqrt{2} \cdot 2} = 354 \text{ V};$$

$$U_{\phi_6} = \frac{1\,000}{\sqrt{2} \cdot 2} = 354 \text{ V}.$$

Для двухфазной, четырехфазной и шестифазной систем фазовое напряжение получилось одинаковым по той причине, что максимальное напряжение, например, для четырехфазной системы, имеет место между проводами первой и третьей фаз или второй и четвертой и поэтому равно удвоенной величине фазового напряжения (фиг. 8, 46). Аналогичное соотношение имеет место для двухфазной и шестифазной систем. Множитель $\sqrt{2}$ в знаменателе связан с переходом от максимальных величин к эффективным. Токи в линейных проводах разных систем определим по формуле $I = \frac{P_i}{m U_\phi}$, где P_i — кажущаяся мощность (в вольтамперах), а m — число фаз.

$$I = \frac{100\,000}{1\,000} = 100 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{100\,000}{2 \cdot 354} = 141 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{100\,000}{3 \cdot 408} = 81,6 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{100\,000}{4 \cdot 354} = 70,7 \text{ A};$$

$$I_6 = \frac{100\,000}{6 \cdot 354} = 47 \text{ A}.$$

Сопротивление одного провода определим по формуле

$$R = \frac{\Delta P}{n I^2},$$

где ΔP — потеря мощности во всех проводах, а n — число проводов.

$$R = \frac{5\,000}{2 \cdot 100^2} = 0,25 \text{ } \Omega;$$

$$R_2 = \frac{5\,000}{2 \cdot 141^2} = 0,125 \text{ } \Omega;$$

$$R_3 = \frac{5\,000}{3 \cdot 81,6^2} = 0,25 \text{ } \Omega;$$

$$R_4 = \frac{5\,000}{4 \cdot 70,7^2} = 0,25 \text{ } \Omega;$$

$$R_6 = \frac{5\,000}{6 \cdot 47^2} = 0,375 \text{ } \Omega.$$

Сопротивление всех проводов каждой из систем, соединенных параллельно, равно $R_{\text{сум}} = \frac{R}{n}$.

$$R_{\text{сум}1} = \frac{R}{2} = 0,125 \text{ } \Omega;$$

$$R_{\text{сум}2} = \frac{R_2}{2} = 0,0625 \text{ } \Omega;$$

$$R_{\text{сум}3} = \frac{R_3}{3} = 0,0835 \text{ } \Omega;$$

$$R_{\text{сум}4} = \frac{R_4}{4} = 0,0625 \text{ } \Omega;$$

$$R_{\text{сум}5} = \frac{R_5}{6} = 0,0625 \text{ } \Omega.$$

Так как количество проводников материала прямо пропорционально суммарному сечению и, следовательно, обратно пропорционально общему сопротивлению проводов, соединенных параллельно, то, принимая количество проводников материала G при постоянном токе за единицу, получим следующие значения для различных систем передачи энергии:

$$G = 1; G_2 = 2; G_3 = 1,5; G_4 = 2; G_5 = 2.$$

Очевидно, что наиболее экономичной является трехфазная система, дающая экономию количества проводникового материала в 25% по сравнению с другими системами переменного тока.

Несмотря на еще большую экономичность передачи постоянным током, она не получила заметного распространения ввиду значительного удобства трансформации переменного тока (изменения напряжения), осуществляемой в сравнительно простом и дешевом аппарате — трансформаторе, и дающей возможность получать весьма высокие напряжения. Однако в последнее время техника получения высоких напряжений постоянного тока быстро прогрессирует, что определяет возможность применения постоянного тока для электропередачи в ближайшее время.

8,15. Разложение системы трех несимметричных векторов на симметричные системы

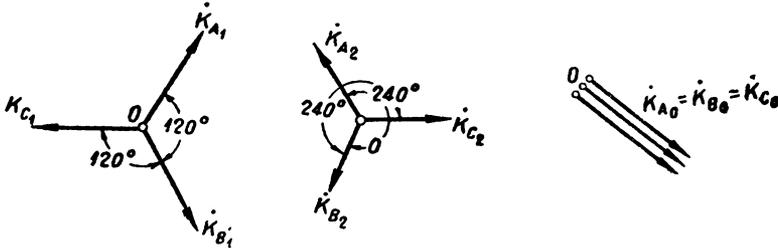
При исследовании целого ряда вопросов, связанных с случаями несимметрии в многофазных системах, как, например, неравномерная нагрузка фаз, несимметричные короткие замыкания и замыкания на землю (двухфазные и однофазные), может быть применен в качестве относительно простого метода расчета так называемый метод симметричных составляющих, предложенный Фортестью в 1918 г.

Основное положение этого метода заключается в том, что система, состоящая из трех произвольных несимметричных векторов (токов или напряжений), может быть разложена однозначно на три независимые трехфазные системы, каждая из которых является симметричной, а именно на: а) систему положительной последовательности, б) — отрицательной последовательности и в) — нулевой последовательности. Несимметричный вектор данной фазы равен геометрической сумме трех симметричных составляющих. Три вышеуказанных симметричных системы имеют различные сдвиги фаз, а именно в системе положительной последовательности сдвиг фаз 120° , в системе отрицательной последовательности 240° и в системе нулевой последовательности 360° или 0° . На фиг. 8,51 пред-

ставлены три указанные симметричные системы. Векторы $\dot{K}_{A1}, \dot{K}_{B1}, \dot{K}_{C1}$ образуют систему положительной последовательности, векторы $\dot{K}_{A2}, \dot{K}_{B2}, \dot{K}_{C2}$ — систему отрицательной последовательности и, наконец, векторы $\dot{K}_{A0}, \dot{K}_{B0}, \dot{K}_{C0}$ — систему нулевой последовательности.

Прежде чем перейти к доказательству основного положения метода симметричных составляющих, выясним некоторые соотношения для оператора трехфазной системы a (см. § 8, 1).

Из указанного выше определения оператора следует, что, умножая какой-либо вектор на оператор a , мы, не изменяя величины вектора,



Фиг. 8, 51.

поворачиваем его на 120° в положительном направлении. Умножение на a^2 поворачивает вектор, не меняя его величины, на угол 240° , а умножение на a^3 соответствует повороту на 360° или на 0° .

$$\left. \begin{aligned} a &= e^{j120^\circ} = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ a^2 &= e^{j120^\circ} e^{j120^\circ} = e^{j240^\circ} = -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ a^3 &= e^{j360^\circ} = e^{j0^\circ} = 1. \end{aligned} \right\} (8, 53)$$

Сумма трех векторов, равных по величине и повернутых друг относительно друга на 120° , равна нулю, поэтому

$$a + a^2 + a^3 = a + a^2 + 1 = 0. \quad (8, 54)$$

Это соотношение легко получить и непосредственным вычислением по (8, 53):

$$a + a^2 + 1 = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$a + a^2 = -1 \quad \text{или} \quad a^2 + 1 = -a.$$

Так как $a^3 = 1$, то, следовательно,

$$a^4 = a^3 \cdot a = a; \quad a^5 = a^3 \cdot a^2 = a^2; \quad a^6 = 1.$$

Кроме того, отметим следующие, вытекающие из указанных соотношений формулы:

$$\left. \begin{aligned} 1 - a &= 1 + 0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} e^{-j30^\circ}; \\ 1 - a^2 &= 1 + 0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} e^{j30^\circ}; \\ a^2 - a &= -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} = -j \sqrt{3} = \sqrt{3} e^{-j90^\circ}; \\ a - a^2 &= +j \sqrt{3} = \sqrt{3} e^{j90^\circ}. \end{aligned} \right\} (8, 55)$$

Пользуясь оператором, установим соотношения между составляющими одной системы. Из фиг. 8, 51 следует

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}_{B_1} &= a^2 \dot{K}_{A_1}; & \dot{K}_{C_1} &= a \dot{K}_{A_1}; \\ \dot{K}_{B_2} &= a \dot{K}_{A_2}; & \dot{K}_{C_2} &= a^2 \dot{K}_{A_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8, 56)$$

$$\dot{K}_{A_0} = \dot{K}_{B_0} = \dot{K}_{C_0};$$

Для определения симметричных составляющих мы имеем следующие три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}_A &= \dot{K}_{A_0} + \dot{K}_{A_1} + \dot{K}_{A_2}; \\ \dot{K}_B &= \dot{K}_{B_0} + \dot{K}_{B_1} + \dot{K}_{B_2}; \\ \dot{K}_C &= \dot{K}_{C_0} + \dot{K}_{C_1} + \dot{K}_{C_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8, 57)$$

Подставляя значения из системы уравнений (8, 56), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}_A &= \dot{K}_{A_0} + \dot{K}_{A_1} + \dot{K}_{A_2}; \\ \dot{K}_B &= \dot{K}_{A_0} + a^2 \dot{K}_{A_1} + a \dot{K}_{A_2}; \\ \dot{K}_C &= \dot{K}_{A_0} + a \dot{K}_{A_1} + a^2 \dot{K}_{A_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8, 58)$$

Складывая уравнения (8, 58) и разделив результат на три, мы получим, учитывая соотношение (8, 53),

$$\dot{K}_{A_0} = \frac{\dot{K}_A + \dot{K}_B + \dot{K}_C}{3}. \quad (8, 59)$$

Умножая почленно уравнения (8, 58): первое на 1, второе на a и третье на a^2 и затем складывая их и деля результат на 3, получим [учитывая (8, 53)]

$$\dot{K}_{A_1} = \frac{\dot{K}_A + a \dot{K}_B + a^2 \dot{K}_C}{3}. \quad (8, 60)$$

Умножая почленно те же уравнения: первое на 1, второе на a^2 и третье на a , получаем таким же способом

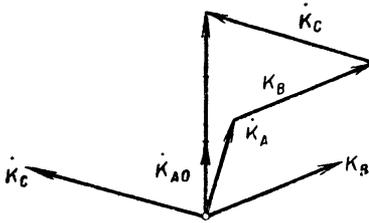
$$\dot{K}_{A_2} = \frac{\dot{K}_A + a^2 \dot{K}_B + a \dot{K}_C}{3}. \quad (8, 61)$$

Таким образом значения \dot{K}_{A_0} , \dot{K}_{A_1} и \dot{K}_{A_2} определились однозначно по трем заданным векторам: \dot{K}_A , \dot{K}_B и \dot{K}_C , что подтверждает правильность основного принципа, изложенного выше.

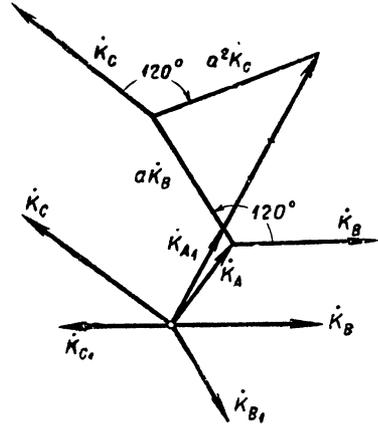
Уравнения (8, 59)—(8, 61) дают возможность определить симметричные составляющие как аналитически, так и графически. Очевидно, для графического определения вектора \dot{K}_{A_0} следует сложить все три несимметричных вектора и результат разделить на 3 (фиг. 8, 52).

Для определения вектора \dot{K}_{A_1} нужно к вектору \dot{K}_A прибавить вектор \dot{K}_B , повернутый в положительном направлении на 120° , и вектор \dot{K}_C , повернутый на 120° в отрицательном направлении, и результат разделить на 3 (фиг. 8, 53). Наконец, для определения вектора \dot{K}_{A_2} нужно к вектору \dot{K}_A прибавить вектор \dot{K}_B , повернутый в отрицательном направле-

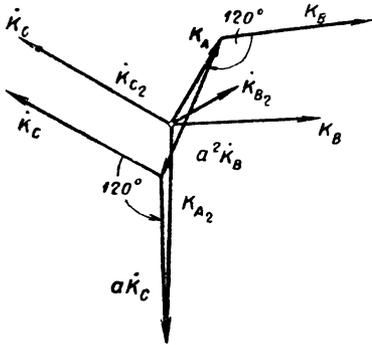
нии на 120° , и вектор \dot{K}_C , повернутый в положительном направлении на 120° , и результат также разделить на 3 (фиг. 8,54). На фиг. 8,55 показано сложение симметричных составляющих.



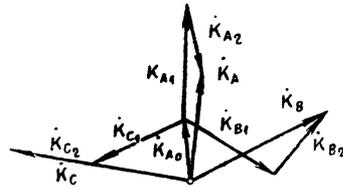
Фиг. 8, 52.



Фиг. 8, 53.



Фиг. 8, 54.



Фиг. 8, 55.

Пример 8,9. Несимметричные векторы токов трех фаз равны (фиг. 8,56)

$$\dot{I}_A = 1000 \text{ A}; \quad \dot{I}_B = -j1000 \text{ A}; \quad \dot{I}_C = j1000 \text{ A}.$$

Определим симметричные составляющие по формулам (8,59), (8,61):

$$\dot{I}_{A0} = \frac{1}{3} (1000 - j1000 + j1000) = 333 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{A1} = \frac{1}{3} (1000 - aj1000 + a^2j1000) = \frac{1}{3} (1000 + j500 + 866 - j500 + 866) = 911 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{A2} = \frac{1}{3} (1000 - a^2j1000 + aj1000) = \frac{1}{3} (1000 + j500 - 866 - 500 + 866) = -244 \text{ A}.$$

Проверим правильность разложения по формулам (8,58):

$$\dot{I}_1 = 333 + 911 - 244 = 1000 \text{ A};$$

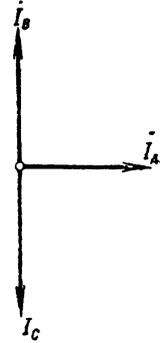
$$\dot{I}_2 = 333 + a^2 911 - a 244 = 333 - 455 - j789 + 122 - j211 = -j1000 \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = 333 + a 911 - a^2 244 = 333 - 455 + j789 + 122 + j211 = j1000 \text{ A}.$$

В общем случае несимметричная система напряжений или э. д. с. может действовать в неравномерно нагруженной многофазной цепи. Обозначим через $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ несимметричные фазовые напряжения, действующие в цепи, а через Z_A, Z_B, Z_C — неодинаковые сопротивления отдельных фаз, при этом для упрощения предположим, что взаимной индуктивностью отдельных фаз можно пренебречь.

Тогда при соединении звездой без нулевого провода (фиг. 8, 57) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{I}_A Z_A + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_B &= \dot{I}_B Z_B + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_C &= \dot{I}_C Z_C + \dot{U}_0; \\ \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8, 62)$$



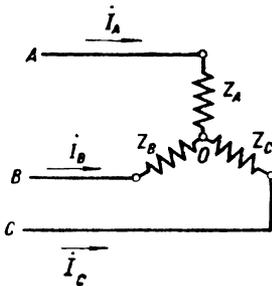
Фиг. 8, 56.

Найдем симметричные составляющие напряжений:

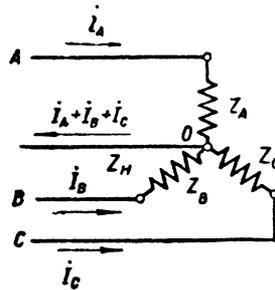
$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = \frac{1}{3} (\dot{I}_A Z_A + \dot{I}_B Z_B + \dot{I}_C Z_C) + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_{A1} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a \dot{U}_B + a^2 \dot{U}_C) = \frac{1}{3} (\dot{I}_A Z_A + \dot{I}_B a Z_B + \dot{I}_C a^2 Z_C); \\ \dot{U}_{A2} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a^2 \dot{U}_B + a \dot{U}_C) = \frac{1}{3} (\dot{I}_A Z_A + \dot{I}_B a^2 Z_B + \dot{I}_C a Z_C). \end{aligned} \right\} \quad (8, 63)$$

В данном случае $\dot{I}_{A0} = 0$, так как $\dot{I}_{A0} = \frac{1}{3} (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) = 0$. Поэтому:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2}; \\ \dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_{A1} + a \dot{I}_{A2}; \\ \dot{I}_C &= a \dot{I}_{A1} + a^2 \dot{I}_{A2}. \end{aligned} \right\} \quad (8, 64)$$



Фиг. 8. 57.



Фиг. 8. 58.

Подставляя в предыдущие уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \dot{U}_0 + \dot{I}_{A1} \frac{1}{3} (Z_A + a^2 Z_B + a Z_C) + \dot{I}_{A2} \frac{1}{3} (Z_A + a Z_B + a^2 Z_C); \\ \dot{U}_{A1} &= \dot{I}_{A1} \frac{1}{3} (Z_A + Z_B + Z_C) + \dot{I}_{A2} \frac{1}{3} (Z_A + a^2 Z_B + a Z_C); \\ \dot{U}_{A2} &= \dot{I}_{A1} \frac{1}{3} (Z_A + a Z_B + a^2 Z_C) + \dot{I}_{A2} \frac{1}{3} (Z_A + Z_B + Z_C). \end{aligned} \right\} \quad (8, 65)$$

Последние три уравнения определяют неизвестные $\dot{I}_{A1}, \dot{I}_{A2}$ и \dot{U}_0 .

При наличии нулевого провода с кажущимся сопротивлением Z_n (фиг. 8, 58) основные уравнения имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{I}_A Z_A + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) Z_n; \\ \dot{U}_B &= \dot{I}_B Z_B + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) Z_n; \\ \dot{U}_C &= \dot{I}_C Z_C + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) Z_n, \end{aligned} \right\} \quad (8, 66)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = \frac{1}{3} [(\dot{I}_A Z_A + \dot{I}_B Z_B + \dot{I}_C Z_C) + \\ &\quad + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) 3Z_n]; \\ \dot{U}_{A1} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) = \frac{1}{3} [(\dot{I}_A Z_A + \dot{I}_B aZ_B + \dot{I}_C a^2 Z_C)]; \\ \dot{U}_{A2} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \frac{1}{3} [\dot{I}_A Z_A + \dot{I}_B a^2 Z_B + \dot{I}_C aZ_C]. \end{aligned} \right\} \quad (8, 67)$$

Выразив \dot{I}_A , \dot{I}_B и \dot{I}_C через симметричные составляющие

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{A0} + \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{A0} + a^2\dot{I}_{A1} + a\dot{I}_{A2}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{A0} + a\dot{I}_{A1} + a^2\dot{I}_{A2} \end{aligned} \right\} \quad (8, 68)$$

и подставив их значения в уравнения (8, 67), получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \dot{I}_{A0} \left[\frac{1}{3} (Z_A + Z_B + Z_C) + 3Z_n \right] + \dot{I}_{A1} \frac{1}{3} (Z_A + a^2 Z_B + aZ_C) + \\ &\quad + \dot{I}_{A2} \frac{1}{3} (Z_A + aZ_B + a^2 Z_C); \\ \dot{U}_{A1} &= \dot{I}_{A0} \frac{1}{3} (Z_A + aZ_B + a^2 Z_C) + \dot{I}_{A1} \frac{1}{3} (Z_A + Z_B + Z_C) + \\ &\quad + \dot{I}_{A2} \frac{1}{3} (Z_A + a^2 Z_B + aZ_C); \\ \dot{U}_{A2} &= \dot{I}_{A0} \frac{1}{3} (Z_A + a^2 Z_B + aZ_C) + \dot{I}_{A1} \frac{1}{3} (Z_A + aZ_B + a^2 Z_C) + \\ &\quad + \dot{I}_{A2} \frac{1}{3} (Z_A + Z_B + Z_C). \end{aligned} \right\} \quad (8, 69)$$

Эти уравнения определяют неизвестные \dot{I}_{A0} , \dot{I}_{A1} и \dot{I}_{A2} , так как \dot{U}_{A0} , \dot{U}_{A1} и \dot{U}_{A2} могут быть вычислены по заданным значениям \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C .

Если обозначить по аналогии с симметричными составляющими

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{3} (Z_A + Z_B + Z_C); \\ Z_1 &= \frac{1}{3} (Z_A + aZ_B + a^2 Z_C); \\ Z_2 &= \frac{1}{3} (Z_A + a^2 Z_B + aZ_C), \end{aligned} \right\} \quad (8, 70)$$

то системы уравнений (8, 65) и (8, 69) упрощаются и принимают следующий вид: для соединения звездой без нулевого провода

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \dot{U}_0 + \dot{I}_{A1} Z_2 + \dot{I}_{A2} Z_1; \\ \dot{U}_{A1} &= \dot{I}_{A1} Z_0 + \dot{I}_{A2} Z_2; \\ \dot{U}_{A2} &= \dot{I}_{A1} Z_1 + \dot{I}_{A2} Z_0, \end{aligned} \right\} \quad (8, 71)$$

а при наличии нулевого провода

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \dot{I}_{A0}(Z_0 + 3Z_n) + \dot{I}_{A1}Z_2 + \dot{I}_{A2}Z_1; \\ \dot{U}_{A1} &= \dot{I}_{A0}Z_1 + \dot{I}_{A1}Z_0 + \dot{I}_{A2}Z_2; \\ \dot{U}_{A2} &= \dot{I}_{A0}Z_2 + \dot{I}_{A1}Z_1 + \dot{I}_{A2}Z_0. \end{aligned} \right\} \quad (8,72)$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и в случае соединения несимметричной нагрузки треугольником.

8,16. Применение метода симметричных составляющих к расчету несимметричных коротких замыканий

При несимметрии напряжений, но равномерной нагрузке фаз (в отличие от разобранных выше общего случая несимметричных напряжений и неравномерной нагрузки) можно каждую из симметричных систем рассматривать независимо от других, что и является одним из важных преимуществ метода симметричных составляющих. Пусть система несимметричных напряжений питает нагрузку в виде симметричной звезды с нулевым проводом (фиг. 8,59). Обозначим через \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C несимметричные напряжения отдельных фаз. В общем случае цепи отдельных фаз могут обладать не только индуктивностью, но и взаимной индуктивностью. Обозначим через $Z = R + j\omega L$ кажущееся сопротивление каждой фазы, где L — собственная индуктивность, и через $Z_M = j\omega M$ — реактивное сопротивление взаимной индукции (см. гл. 7) между соседними фазами. Тогда падение напряжения в фазе A , обусловленное взаимной индуктивностью фазы B , будет равно

$$\dot{I}_B Z_M.$$

Для упрощения допустим, что Z и Z_M одинаковы для всех фаз, что практически имеет место при транспозиции проводов. Тогда имеем следующие соотношения:

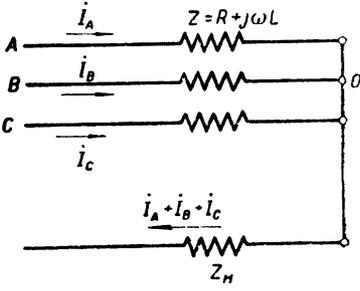
$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{I}_A Z + \dot{I}_B Z_M + \dot{I}_C Z_M + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) Z_n; \\ \dot{U}_B &= \dot{I}_A Z_M + \dot{I}_B Z + \dot{I}_C Z_M + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) Z_n; \\ \dot{U}_C &= \dot{I}_A Z_M + \dot{I}_B Z_M + \dot{I}_C Z + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) Z_n, \end{aligned} \right\} \quad (8,73)$$

где Z_n — кажущееся сопротивление нулевого провода.

На основании уравнений (8,59) — (8,61) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3} [\dot{I}_A (Z + 2Z_M) + \dot{I}_B (Z + 2Z_M) + \dot{I}_C (Z + 2Z_M) + \\ &\quad + 3(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) Z_n] = \dot{I}_{A0} (Z + 2Z_M + 3Z_n); \\ \dot{U}_{A1} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) = \frac{1}{3} [\dot{I}_A (Z_1 + aZ_M + a^2Z_M) + \\ &\quad + \dot{I}_B (Z_M + aZ + a^2Z_M) + \dot{I}_C (Z_M + aZ_M + a^2Z) + \\ &\quad + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) (Z_n + aZ_n + a^2Z_n)] = \dot{I}_{A1} (Z - Z_M); \\ \dot{U}_{A2} &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \frac{1}{3} [\dot{I}_A (Z + a^2Z_M + aZ_M) + \\ &\quad + \dot{I}_B (Z_M + a^2Z + aZ_M) + \dot{I}_C (Z_M + a^2Z_M + aZ) + \\ &\quad + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) (Z_n + a^2Z_n + aZ_n)] = \dot{I}_{A2} (Z - Z_M). \end{aligned} \right\} \quad (8,74)$$

Из уравнений (8,74) видно, что токи какой-либо последовательности зависят от напряжений только этой последовательности, что и подтверждает указанное выше положение и дает возможность, разложив систему несимметричных напряжений на симметричные системы различных последовательностей, в дальнейшем рассматривать каждую систему независимо. Очевидно, в системе нулевой последовательности роль полного кажущегося сопротивления будет играть величина $(Z_1 + 2Z_M + 3Z_n)$, которую мы назовем кажущимся сопротивлением нулевой последовательности и обозначим через Z_0 :



Фиг. 8, 59.

мы назовем кажущимся сопротивлением нулевой последовательности и обозначим через Z_0 :

$$Z_0 = Z_1 + 2Z_M + 3Z_n. \quad (8,75)$$

Аналогично кажущиеся сопротивления положительной и отрицательной последовательности выразятся через

$$Z_1 = Z - Z_M; \quad (8,76)$$

$$Z_2 = Z - Z_M. \quad (8,77)$$

В данном случае $Z_1 = Z_2$, что обычно имеет место для линий и трансформаторов.

При отсутствии нулевого провода система уравнений (8,73) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= i_A Z_1 + i_B Z_M + i_C Z_M + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_B &= i_A Z_M + i_B Z + i_C Z_M + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_C &= i_A Z_M + i_B Z_M + i_C Z + \dot{U}_0; \\ i_A + i_B + i_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8,78)$$

Отсюда можно определить на основании уравнений (8,59) — (8,61)

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A0} &= \dot{U}_0; \\ \dot{U}_{A1} &= i_{A1} (Z - Z_M) = i_{A1} Z_1; \\ \dot{U}_{A2} &= i_{A2} (Z - Z_M) = i_{A2} Z_2. \end{aligned} \right\} \quad (8,79)$$

Из (8,79) видно, что при отсутствии нулевого провода смещение нейтрали \dot{U}_0 равно напряжению нулевой последовательности. При наличии же нулевого провода на основании формулы (8,74)

$$\dot{U}_{n0} = i_{A0} (Z_0 + 2Z_M + 3Z_n) = i_{A0} (Z_0 + 2Z_M) + \dot{U}_0, \quad (8,80)$$

где $3i_{A0}Z_n = \dot{U}_0$, так как ток в нулевом проводе равен [см. (8,59)] утроенной величине тока нулевой последовательности. Аналогично утроенной величине тока нулевой последовательности равен и ток в заземленной нейтрали генератора. Таким образом токи нулевой последовательности имеются во всех случаях наличия токов в нулевом проводе или земле.

Из соотношений (8,74) и (8,79) вытекает следующее положение: падение напряжения каждой последовательности при равенстве сопротивлений во всех фазах равно произведению кажущегося сопротивления этой последовательности на ток соответствующей последовательности.

Напряжения различных последовательностей в фазе A в каком-либо месте сети будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A1} &= \dot{E}_{A1} - \dot{I}_{A1} Z_1; \\ \dot{U}_{A2} &= \dot{E}_{A2} - \dot{I}_{A2} Z_2; \\ \dot{U}_{A0} &= \dot{E}_{A0} - \dot{I}_{A0} Z_0, \end{aligned} \right\} \quad (8,81)$$

где Z_1, Z_2, Z_0 — полные сопротивления различных последовательностей от генератора до заданного места сети (включая цепь генератора).

В случае симметричных э. д. с. $\dot{E}_{A2} = \dot{E}_{A0} = 0$, и напряжения различных последовательностей выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{A1} &= \dot{E}_{A1} - \dot{I}_{A1} Z_1; \\ \dot{U}_{A2} &= -\dot{I}_{A2} Z_2; \\ \dot{U}_{A0} &= -\dot{I}_{A0} Z_0. \end{aligned} \right\} \quad (8,82)$$

Система уравнений (8,82) имеет большое значение, так как дает возможность определения несимметричных токов по заданным несимметричным напряжениям, и наоборот.

Покажем применение этих уравнений при расчете несимметричных коротких замыканий. На фиг. 8,60 представлена схема однополюсного короткого замыкания. Применяя уравнения (8,82) для места короткого замыкания, мы получим три уравнения с шестью неизвестными ($\dot{U}_{A1}, \dot{U}_{A2}, \dot{U}_{A0}, \dot{I}_{A1}, \dot{I}_{A2}, \dot{I}_{A0}$).

Остальные три уравнения могут быть составлены следующим образом. Действительное напряжение в фазе A в месте короткого замыкания равно нулю:

$$\dot{U}_A = 0. \quad (8,83)$$

Токи в фазах B и C равны нулю:

$$\dot{I}_B = 0; \quad \dot{I}_C = 0. \quad (8,84)$$

Определим симметричные слагающие токов на основании формул (8,84):

$$\begin{aligned} \dot{i}_{A0} &= \frac{\dot{i}_A + \dot{i}_B + \dot{i}_C}{3} = \frac{\dot{i}_A}{3}; \\ \dot{i}_{A1} &= \frac{\dot{i}_A + a\dot{i}_B + a^2\dot{i}_C}{3} = \frac{\dot{i}_A}{3}; \\ \dot{i}_{A2} &= \frac{\dot{i}_A + a^2\dot{i}_B + a\dot{i}_C}{3} = \frac{\dot{i}_A}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{i}_{A0} = \dot{i}_{A1} = \dot{i}_{A2}. \quad (8,85)$$

Определим напряжение фазы A через его симметричные составляющие

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{A0} + \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} = 0. \quad (8,86)$$

Уравнения (8,85) и (8,86) представляют собой три недостающих уравнения для определения шести неизвестных.

Суммируя уравнения (8,82), получим

$$\dot{E}_{A1} - \dot{I}_{A1}Z_1 - \dot{I}_{A2}Z_2 - \dot{I}_{A0}Z_0 = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0} = 0.$$

На основании уравнений (8,85) получим

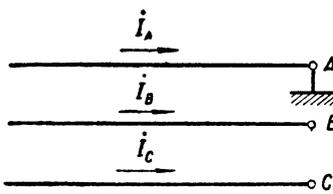
$$\dot{E}_{A1} - \dot{I}_{A1}(Z_1 + Z_2 + Z_0) = 0, \quad (8,87)$$

откуда

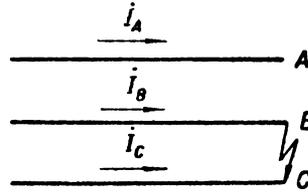
$$\dot{I}_{A1} = \frac{\dot{E}_{A1}}{Z_1 + Z_2 + Z_0}. \quad (8,88)$$

Полный ток короткого замыкания

$$\dot{I}_A = 3\dot{I}_{A1} = \frac{3\dot{E}_{A1}}{Z_1 + Z_2 + Z_0}. \quad (8,89)$$



Фиг. 8, 60.



Фиг. 8, 61.

При двухполюсном коротком замыкании (фиг. 8,61) имеем следующие соотношения для места короткого замыкания:

$$\dot{U}_B = \dot{U}_C; \quad \dot{I}_A = 0; \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_C, \quad (8,90)$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{I}_{A0} &= \frac{\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C}{3} = 0; \\ \dot{I}_{A1} &= \frac{\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C}{3} = \frac{(a - a^2)\dot{I}_B}{3}; \\ \dot{I}_{A2} &= \frac{\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C}{3} = \frac{(a^2 - a)\dot{I}_B}{3}, \end{aligned}$$

и следовательно,

$$\dot{I}_{A1} = -\dot{I}_{A2} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{A0} = 0. \quad (8,91)$$

Симметричные слагающие напряжения в месте короткого замыкания

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A1} &= \frac{\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_B}{3}; \\ \dot{U}_{A2} &= \frac{\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_B}{3}, \end{aligned}$$

следовательно (так как $\dot{U}_B = \dot{U}_C$),

$$\dot{U}_{A1} = \dot{U}_{A2}. \quad (8,92)$$

Тогда по (8, 82) и (8, 91)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{A1} - \dot{I}_{A1}Z_1 &= -\dot{I}_{A2}Z_2 = \dot{I}_{A1}Z_2; \\ \dot{I}_{A1} &= \frac{\dot{E}_{A1}}{Z_1 + Z_2}. \end{aligned} \quad (8, 93)$$

Полный ток в месте короткого замыкания

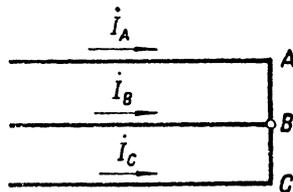
$$\dot{I}_B = \frac{3\dot{I}_{A1}}{(a - a^2)} = \frac{3}{(a - a^2)} \frac{\dot{E}_{A1}}{Z_1 + Z_2}. \quad (8, 94)$$

Так как $a - a^2 = -0,5 + j0,86 + 0,5 + j0,866 = j\sqrt{3}$, то следовательно, ток двухполюсного короткого замыкания

$$\dot{I}_B = \frac{-j\sqrt{3}\dot{E}_{A1}}{Z_1 + Z_2}. \quad (8, 95)$$

При трехполюсном коротком замыкании (фиг. 8, 62) симметрия токов не нарушается, следовательно, ток трехполюсного короткого замыкания равен

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_{A1}}{Z_1}. \quad (8, 96)$$



Фиг. 8, 62.

Аналогичным способом могут быть определены и более сложные случаи несимметричных коротких замыканий.

Пример 8, 10. Полные сопротивления до места короткого замыкания на фазу равны

$$Z_1 = j3\Omega; \quad Z_2 = j2\Omega; \quad Z_0 = j1\Omega.$$

Определим токи трехполюсного, двухполюсного и однополюсного короткого замыкания при фазовой э. д. с. генератора 6 000 V. Так как для симметричного генератора $\dot{E}_{A2} = \dot{E}_{A0} = 0$, то

$$\dot{E}_{A1} = \dot{E}_1 = 6\,000 \text{ V.}$$

Ток трехполюсного короткого замыкания, представляющего собой равномерную нагрузку, равен

$$\dot{i}_k^{(3)} = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} = \frac{\dot{E}_{A1}}{Z_1} = \frac{6\,000}{j3} = -j2\,000 \text{ A.}$$

Токи двухполюсного и однополюсного короткого замыкания определяются по формулам (8, 95) и (8, 89):

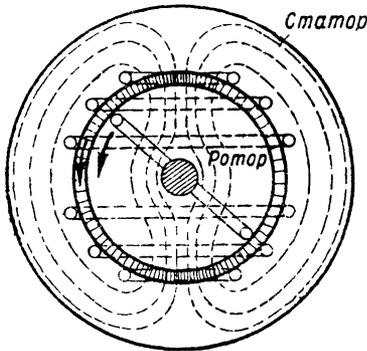
$$\begin{aligned} \dot{i}_k^{(2)} &= \frac{-j\sqrt{3}\dot{E}_{A1}}{Z_1 + Z_2} = \frac{-j\sqrt{3} \cdot 6\,000}{j3 + j2} = -\frac{\sqrt{3} \cdot 6\,000}{5} = -2\,080 \text{ A}; \\ \dot{i}_k^{(1)} &= \frac{3\dot{E}_{A1}}{Z_1 + Z_2 + Z_0} = \frac{3 \cdot 6\,000}{j3 + j2 + j1} = \frac{18\,000}{j6} = -j3\,000 \text{ A.} \end{aligned}$$

8, 17. Двухфазное вращающееся поле

Принцип работы двигателей многофазного тока заключается в том, что по воздушному зазору между двумя железными цилиндрами перемещается (вращается) магнитное поле, которое, взаимодействуя с током, возникающим в проводах, расположенных на поверхности внутреннего

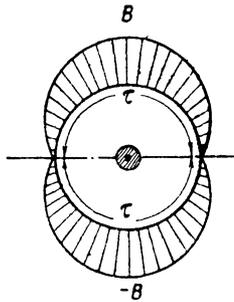
подвижного цилиндра (ротора), приводит его во вращение. Вращающееся поле создается током в обмотке, расположенной на неподвижном цилиндре двигателя (статоре).

Характер распределения индукции в воздушном зазоре определяет форму вращающегося поля. Обычно в двигателях и генераторах переменного тока стремятся к тому, чтобы поле было распределено в пространстве по закону синуса. Полярный и линейный графики такого поля представлены на фиг. 8, 63 и 8, 64.



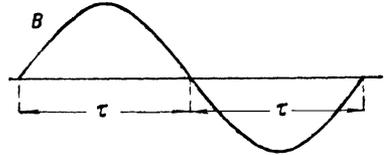
Плотность магнитного потока (индукции) в возд зазоре

Фиг. 8, 63.



Полярный график

Фиг. 8, 63а.

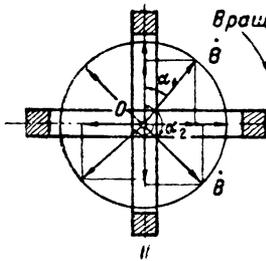


Линейный график

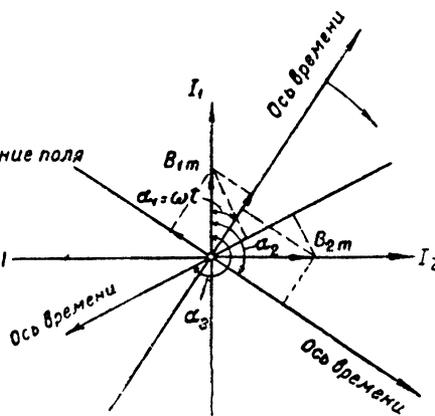
Фиг. 8, 64.

Изображая в последующем распределение поля тем или иным графиком, не будем забывать о том, что ординаты графика характеризуют собой вектор

индукции или плотность магнитного потока в данной точке поля. Поле, близкое к синусоидальному, удастся получить либо при равномерном воздушном зазоре между статором и ротором и определенном расположении обмотки, либо при специальном очертании полюсных поверхностей статора и ротора.



Фиг. 8, 65.



Фиг. 8, 66.

Форма поля может и значительно отступать от синусоиды. Не забываясь о форме магнитного поля, рассмотрим простейшую схему получения вращающегося поля. Две катушки, оси которых образуют между собой угол в 90° (фиг. 8, 65), будем питать двумя токами, сдвинутыми по фазе также на 90°.

Так как индукция поля, создаваемого каждой катушкой, пропорциональна соответствующему току, то при прохождении через катушки синусоидальных токов

$$i_1 = I_{1m} \cos \omega t$$

и

$$i_2 = I_{2m} \cos (\omega t - 90^\circ)$$

индукции в какой-либо точке поля будут изменяться во времени также по закону косинуса и могут быть поэтому изображены на векторной диаграмме (фиг. 8, 66) векторами B_{1m} и B_{2m} , совпадающими по фазе с соответствующими векторами токов.

Фиксируя свое внимание на точке O , находящейся на пересечении осей катушек, мы можем для какого-либо момента времени t определить индукцию в этой точке по проекциям векторов B_{1m} и B_{2m} на ось времени (фиг. 8, 66) при повороте этой оси по отношению к вектору B_{1m} на угол $\alpha = \omega t$. Перенеся полученные проекции в точку O и отложив их по направлению осей соответствующих катушек, мы получим вектор результирующей индукции в точке O как геометрическую сумму векторов индукции от составляющих токов:

$$B = \sqrt{(B_{1m} \cos \omega t)^2 + [B_{2m} \cos(\omega t - 90^\circ)]^2}.$$

Рассматривая случай, когда $I_{1m} = I_{2m}$, а следовательно, $B_{1m} = B_{2m} = B_m$, получим

$$B = B_m \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = B_m,$$

т. е. что абсолютная величина вектора в магнитной индукции результирующего поля равна максимальной индукции каждого из составляющих полей и во времени не меняется.

Угол, на который вектор \vec{B} оказывается сдвинутым по отношению к оси первой катушки, определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_m \sin \omega t}{B_m \cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t,$$

оказывается равным углу поворота оси времени от вектора \vec{B}_{1m} . При увеличении времени t вектор индукции будет вращаться с угловой скоростью ω , образуя с осью первой катушки углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и т. д.

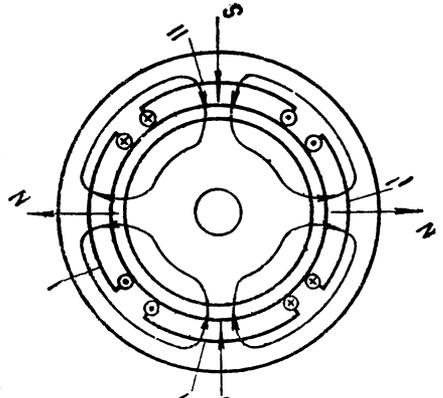
По прошествии периода переменного тока вектор результирующего поля опишет полную окружность.

Пропуская таким образом два тока, сдвинутых между собой во времени (по фазе) на 90° (двухфазный ток) через две катушки, сдвинутые в пространстве на 90° , мы получаем в общем центре обеих катушек вращающееся магнитное поле.

Если амплитуды токов, а следовательно, и амплитуды индукций в катушках равны, то вращающееся поле будет „круговым“, т. е. результирующая индукция будет иметь одинаковое значение при любом повороте вектора. Направление вращения поля зависит от взаимного расположения катушек. Вектор результирующего поля всегда перемещается от положительного направления оси катушки с опережающим током к положительному направлению оси катушки с отстающим током. На фиг. 8, 65 это соответствует вращению поля по часовой стрелке.

Так как положительные направления осей катушек определяются выбором начал и концов их, то, меняя концы подводки тока у одной из катушек, мы тем самым меняем положительное направление потока данной катушки и в результате меняем направление вращения поля.

Мы брали две катушки и, располагая их в пространстве под углом в 90° , получили магнитное поле с двумя полюсами. Питая двухфазным током две



Фиг. 8, 67.

пары катушек, плоскости которых сдвинуты между собой в пространстве на 45° (фиг. 8, 67), мы получаем поле с двумя парами полюсов. Беря p пар катушек, мы получим $2p$ -полюсное вращающееся поле.

При одной паре полюсов за один период переменного тока вращающееся поле делает один полный оборот. В одну минуту такое поле сделает $n = 60f$ оборотов.

При двух парах полюсов за один период поле повернется в пространстве лишь на 180° . Это делается ясным из рассмотрения фиг. 8, 67. Действительно, если данная на этой фигуре конфигурация поля, когда оба северных полюса совпадают с осями катушек, соответствует максимуму тока в первой фазе, то по прошествии полупериода (180 электрических градусов), когда ток в рассматриваемых катушках будет иметь отрицательный максимум, место северных полюсов займут южные полюса, и наоборот — место южных полюсов займут северные полюса, т. е. поле повернется в пространстве на 90° . По прошествии полного периода (360 электрических градусов) поле повернется в пространстве лишь на 180 геометрических градусов.

При p парах полюсов поле за один период повернется на $\frac{360}{p}$ градусов, т. е. на $\frac{1}{p}$ полного оборота.

Следовательно, число оборотов поля в минуту при p парах полюсов будет равно

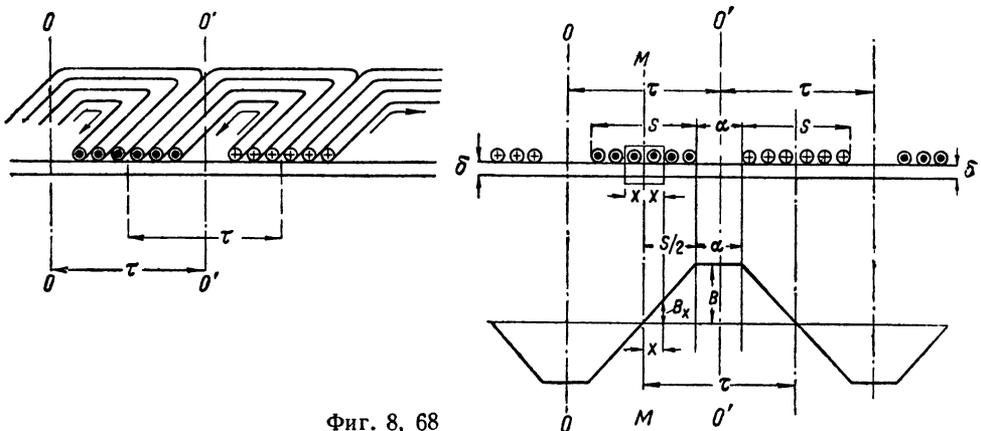
$$n = \frac{60f}{p}.$$

Эта формула показывает, что число оборотов поля определяется только частотой переменного тока и числом пар полюсов. При стандартной частоте $f = 50$ Hz

$$n = \frac{3000}{p}.$$

8, 18. Синусоидально распределенное поле

Переходя к рассмотрению вращающегося поля с индукцией, распределенной в зазоре по закону синуса, мы начнем это рассмотрение с поля,



Фиг. 8, 68

создаваемого одной катушкой, расположенной на статоре машины, имеющей равномерный воздушный зазор. Производя для удобства рас-

смотрения развертку по зазору, мы переходим к фиг. 8,68, на которой катушки показаны в разрезе (справа) и в перспективе (слева). Расстояние между осями OO и $O'O'$, проходящими через середины катушек, обозначенное через τ , носит название полюсного деления.

Считая расстояния x от оси MM (начало катушки) и выделяя симметричный по отношению к этой оси замкнутый контур, получим для $x \leq \frac{s}{2}$ по закону полного тока:

$$\oint H_x dl = \frac{I\omega}{s} 2x,$$

где $I\omega$ — полное число ампервитков рассматриваемой катушки, а s — длина дуги, на которой они равномерно распределены.

Пренебрегая напряженностью магнитного поля на пути магнитного потока в железе из-за весьма большой магнитной проницаемости железа по сравнению с воздухом, получаем

$$\oint H_x dl = H_x 2\delta = \frac{I\omega}{s} 2x,$$

где δ — ширина воздушного зазора.

Из этого уравнения следует, что

$$H_x = \frac{I\omega}{s\delta} x,$$

а следовательно,

$$B_x = \mu_0 \frac{I\omega}{s\delta} x,$$

т. е. B_x меняется с расстоянием по закону прямой, проходящей через начало координат (график фиг. 8,68).

Для значений x от $\frac{s}{2}$ до $\frac{s}{2} + \alpha$ (см. фиг. 8,68)

$$B_x = \mu_0 \frac{I\omega}{s\delta} \cdot \frac{s}{2} = \mu_0 \frac{I\omega}{2\delta}$$

остается величиной постоянной и характеризуется на графике прямой, параллельной оси абсцисс.

На участке от $x = \left(\frac{s}{2} + \alpha\right)$ до $x = \tau$ индукция B_x будет спадать по прямой, пересекающей ось абсцисс в точке $x = \tau$.

Таким образом на протяжении полюсного деления τ кривая изменения индукции представляет собой равнобедренную трапецию с верхним основанием $\alpha = \tau - s$.

Трапеция эта весьма мало отличается от синусоиды, если

$$\alpha = \frac{\tau}{3} \quad \text{или} \quad s = \frac{2}{3} \tau.$$

Действительно, амплитуда основной синусоиды для такой трапеции при разложении ее на гармонические составляющие равна (см. гл. „Несинусоидальные токи“)

$$B_1 = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} B,$$

а соответствующий магнитный поток

$$\Phi_1 = \frac{2}{\pi} \tau l B_1 = \frac{12}{\pi^2} \sqrt{3} \cdot B \tau \cdot l.$$

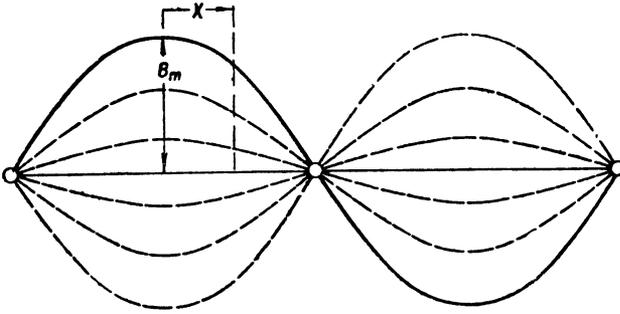
Для трапециoidalной кривой поток равен (при $s = \frac{2}{3} \tau$)

$$\Phi = Bl \frac{\tau + (\tau - s)}{2} = Bl \tau \left(1 - \frac{s}{2\tau}\right) = \frac{2}{3} B \tau l.$$

Отношение потоков при синусоидальном и трапециoidalном распределениях индукций

$$\Phi_1 : \Phi = \frac{18 \sqrt{3}}{\pi^3} = 1,005,$$

т. е. потоки в двух рассматриваемых случаях отличаются между собой лишь на $1/2\%$. Благодаря этому при ширине катушки $s = \frac{2}{3} \tau$ можно, не делая заметной погрешности, считать, что индукция распределяется вдоль воздушного зазора по закону синуса с амплитудой



Фиг. 8, 69.

$$B = \frac{\Phi \pi^2}{12 \sqrt{3} \tau l} = 1,49 \frac{\Phi}{\tau l}.$$

Изменение индукции вдоль воздушного зазора можно теперь выразить уравнением

$$B_x = B \sin\left(\frac{x}{\tau} \pi\right).$$

Если же за начало отсчета принять ось катушки $O'O'$ (фиг. 8, 69), то это уравнение примет вид

$$B_x = B \cos\left(\frac{x}{2} \pi\right).$$

Если через катушку проходит переменный синусоидальный ток $i = I_m \cos \omega t$, то создаваемое им поле пульсирует, совпадая по фазе с изменением тока, и амплитуда кривой индукции (фиг. 8,69) колеблется от положительного до отрицательного максимума по закону

$$B = B_m \cos \omega t;$$

подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получим закон изменения индукции в пространстве и во времени

$$B_x = B_m \cos\left(\frac{x}{\tau} \pi\right) \cos \omega t. \quad (8,97)$$

8,19. Разложение пульсирующего поля на два вращающихся

Анализ явлений, связанных с пульсирующим полем, в ряде случаев значительно облегчается, если заменить пульсирующее поле двумя полями, имеющими равные амплитуды, и движущимися (вращающимися) в разных направлениях.

Для аналитического доказательства возможности разложения пульсирующего поля на два круговых вращающихся поля заменим, пользуясь

соответствующим тригонометрическим соотношением, произведение косинусов в выражении (8,97)

$$\cos\left(\frac{x}{\tau}\pi\right)\cos\omega t = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\omega t + \frac{x}{\tau}\pi\right) + \cos\left(\omega t - \frac{x}{\tau}\pi\right)\right].$$

Мы получим тогда

$$B_x = \frac{B_m}{2}\cos\left(\omega t + \frac{x}{\tau}\pi\right) + \frac{B_m}{2}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\tau}\pi\right). \quad (8,98)$$

Слагаемые правой части выражают две бегущих в противоположных направлениях волны. Амплитуды волн равны между собой и равны половине амплитуды пульсирующего поля.

8,20. Многофазное вращающееся поле

Если мы имеем n катушек, расположенных на статоре машины под углами $\frac{2\pi}{n}$ ¹, и через эти катушки проходит n -фазный ток

$$\begin{aligned} i_1 &= I_m \cos \omega t; \\ i_2 &= I_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ i_k &= I_m \cos \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ i_n &= I_m \cos \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right], \end{aligned}$$

то, считая поля отдельных катушек синусоидально распределенными вдоль воздушного зазора, мы получим для точки, находящейся на расстоянии x от оси первой катушки, следующие выражения индукции каждого из этих полей:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_m \cos \omega t \cos \frac{x}{\tau} \pi; \\ B_2 &= B_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right) \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{2\pi}{n} \right); \\ B_k &= B_m \cos \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \cos \left[\frac{x}{\tau} \pi - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ B_n &= B_m \cos \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right] \cos \left[\frac{x}{\tau} \pi - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

Результирующая индукция в данной точке является суммой этих составляющих индукций. Для облегчения суммирования разложим каждое из пульсирующих полей на два круговых вращающихся поля. Для поля обмотки k мы получим

$$B_k = \frac{B_m}{2} \left\{ \cos \left[\omega t + \frac{x}{\tau} \pi - 2(k-1) \frac{2\pi}{n} \right] + \cos \left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi \right) \right\}.$$

¹ То есть при расстоянии между осями катушек, равном $\frac{2}{n}\tau$.

Суммируя первые слагаемые правой части для всех n полей, мы получим в результате нуль, так как для любого момента t выражение

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos \left[\omega t + \frac{x}{\tau} \pi - 2(k-1) \frac{2\pi}{n} \right]$$

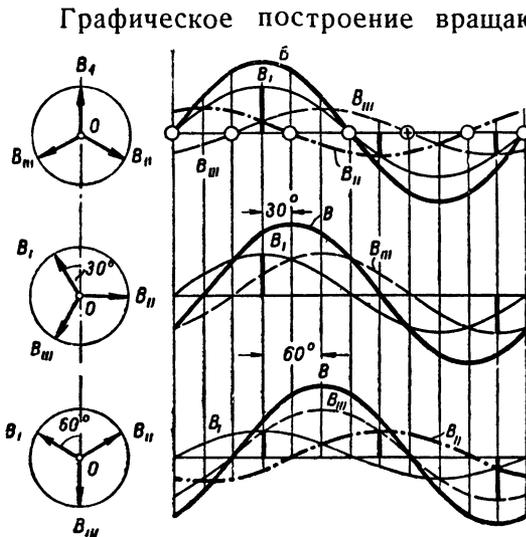
представляет собой сумму равноотстоящих друг от друга ординат косинусоиды за полный период. Сумма вторых слагаемых дает вращающееся поле

$$B_x = \frac{n}{2} B_m \cos \left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi \right).$$

Из последнего выражения видно, что амплитуда результирующего поля в $\frac{n}{2}$ раз больше амплитуды каждого из составляющих полей.

В частном случае трехфазного тока, когда $n=3$, индукция результирующего поля будет изменяться по закону

$$B_x = \frac{3}{2} B_m \cos \left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi \right). \quad (8,99)$$



Фиг. 8, 70.

Графическое построение вращающегося поля при трехфазном токе вдоль развернутого воздушного зазора для трех моментов времени дано на фиг. 8,70.

Амплитуды индукции для каждого из взятых моментов получены путем проектирования на ось времени векторов максимальных индукций на векторных диаграммах, приведенных на той же фиг. 8,70, слева.

Направление вращения поля определяется расположением в пространстве обмоток второй и третьей фаз по отношению к первой фазе.

Поле идет от катушки, питаемой током первой фазы, к катушке, питаемой током второй фазы, и далее — к катушке, питаемой током третьей фазы.

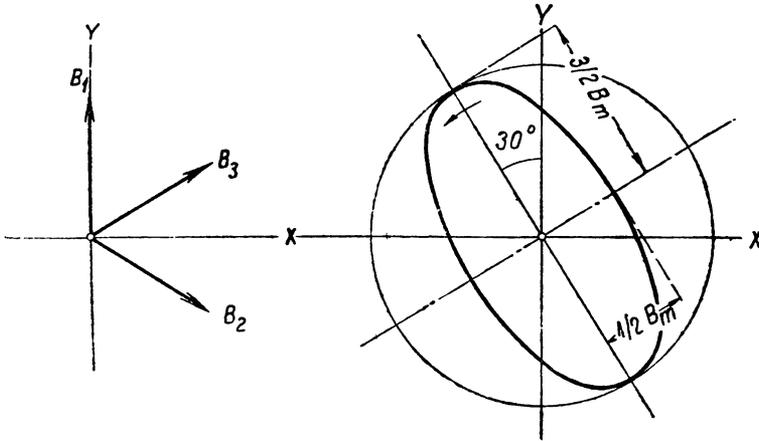
Для изменения направления вращения поля достаточно поэтому поменять между собой концы двух линейных проводов, подводящих ток к фазам статора.

8,21. Эллиптическое вращающееся поле

При неодинаковых амплитудах пульсирующих полей многофазной системы или неодинаковых углах между осями отдельных полей результирующее вращающееся поле будет не круговым, а эллиптическим, т. е. вектор результирующей индукции, изменяя свое направление в пространстве, будет одновременно изменяться и по величине, описывая своим концом уже не окружность, а эллипс. Это может быть доказано для n -фазной системы, но мы ограничимся здесь доказательством этого положения для трехфазной системы.

Рассмотрим случай эллиптического поля в трехфазной системе при несимметричном расположении осей катушек отдельных фаз, вызванном неправильным выбором начала и конца обмоток одной из фаз по отношению к другим фазам.

Пространственная диаграмма векторов индукции (создаваемой каждой из катушек) для этого случая представлена на фиг. 8, 71. По рас-



Фиг. 8, 71.

положению векторов индукции мы видим, что неправильный выбор начала и конца обмотки имел место у третьей фазы, в связи с чем вектор индукции для данной фазы получил противоположное положительное направление по отношению к нормальному.

Считая катушки расположенными в воздухе и фиксируя свое внимание на точке, лежащей на пересечении осей катушек, мы получаем, что изменение индукции во времени в каждой из катушек определяется выражением

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B_m \cos \omega t; \\
 B_2 &= B_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \\
 B_3 &= B_m \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right).
 \end{aligned}$$

Произведя суммирование индукций отдельных полей по их проекциям на две взаимно перпендикулярные оси X и Y , получим, что проекция на ось X будет равна

$$B_X = B_m \left[\cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} B_m \cos \omega t.$$

Проекция вектора результирующей индукции на ось Y будет равна

$$\begin{aligned}
 B_Y &= B_m \cos \omega t + B_m \left[\cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) - \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \sin 30^\circ = \\
 &= B_m \cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Вектор результирующей индукции представляет собой геометрическую сумму найденных проекций и будет равен

$$\begin{aligned}
 B_{рез} &= B_m \sqrt{\frac{3}{4} \cos^2 \omega t + \cos^2 \omega t - \sqrt{3} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{3}{4} \sin^2 \omega t} = \\
 &= B_m \sqrt{\frac{3}{4} + \cos^2 \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega t} = \\
 &= B_m \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{2 \cos^2 \omega t - 1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega t} = \\
 &= B_m \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega t} + B_m \sqrt{\frac{5}{4} + \sin 30^\circ \cos 2\omega t - \cos 30^\circ \sin \omega t} = \\
 &= B_m \sqrt{\frac{5}{4} - \sin(2\omega t - 30^\circ)}. \quad (8,100)
 \end{aligned}$$

Если для разных моментов времени t мы определим проекции B_x и B_y и найдем путем геометрического построения индукцию результирующего поля, концы векторов окажутся расположенными на эллипсе, полуосями которого будут служить B_{\max} и B_{\min} , получаемые из выражения $N(8,100)$ при значениях

$$\sin(2\omega t - 30^\circ) = \pm 1.$$

B_{\max} будет соответствовать углу $\omega t = -30^\circ$ и будет равна

$$B_{\max} = B_m \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \frac{3}{2} B_m;$$

B_{\min} будет соответствовать углу $\omega t = 60^\circ$ и будет равна

$$B_{\min} = B_m \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{1}{2} B_m.$$

Угловая скорость вращения вектора эллиптического поля не остается постоянной.

ГЛАВА 9

НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ

9, 1. Цепи с несинусоидальными э. д. с. и токами

При изучении явлений, происходящих в цепи переменного тока, мы предполагали, что э. д. с., действующая в цепи, меняется по закону синуса. В действительности в реальных генераторах наводится э. д. с. более или менее отступающая по форме от синусоиды. Это происходит как вследствие неоднородности магнитного поля, в котором движутся проводники якоря, так и в силу особенностей в расположении обмотки. Но даже в случае синусоидальной формы кривой э. д. с. ток имеет синусоидальную форму лишь в том случае, если сопротивление цепи остается неизменным в течение всего периода. На самом же деле, как мы увидим в одной из следующих глав, реактивное сопротивление цепи меняется, если имеется в ней катушка с железным сердечником. Индуктивность L такой катушки меняется в зависимости от мгновенного значения проходящего через нее тока, а следовательно, меняется и ее реактивное сопротивление ωL .

Выведенные в предыдущих главах законы цепи переменного тока действительны только для синусоидальных э. д. с. и токов. Для кривых иной формы эти законы не приложимы.

Свойства синусоиды дали нам возможность изучить все явления в электрической цепи, в которой действует э. д. с., меняющаяся по закону синуса, и вывести простые формулы, выражающие зависимость между величинами переменного тока. Если бы мы захотели, пользуясь общими законами электротехники, вывести подобные же формулы для случая, когда э. д. с. меняется по иному закону, чем закон синуса, то мы встретили бы исключительные трудности математического характера и во всяком случае не получили бы таких простых законов и формул, какие изложены в предыдущих главах. Мы лишились бы также того наглядного и изящного метода определения величин и их соотношений, который дают векторные диаграммы.

Однако изучение явлений, происходящих в цепи с э. д. с., меняющейся по какому угодно периодическому закону, может быть сведено к изучению явлений в цепях с синусоидально изменяющимся током и напряжением, так как все периодические функции могут быть разложены в ряд синусоидальных функций (ряд Фурье).

Разложение несинусоидальных функций в ряд синусоидальных дает возможность найти закономерности для цепи переменного тока с несинусоидальной э. д. с. на основании тех закономерностей, которые были выведены для цепи с синусоидальной э. д. с.

Этим вопросом мы и займемся, но только после того, как выясним те практические способы, которые дают возможность разложить сложную периодическую функцию в ряд Фурье.

9.2. Разложение периодических функций в ряд Фурье

Периодической называется функция, через равные промежутки времени T получающая одинаковые значения. Периодичность функции выражается формулой

$$f(t) = f(t + kT),$$

где k — любое целое число.

Промежуток времени T , через который функция приобретает прежнее значение, называется периодом.

Фурье показал, что такую функцию можно разложить в конечный или бесконечный ряд синусоидальных функций, частоты которых возрастают в арифметической прогрессии, первый член которой есть частота заданной функции $\frac{1}{T}$. В частном случае этот ряд может содержать кроме синусоид еще постоянный член.

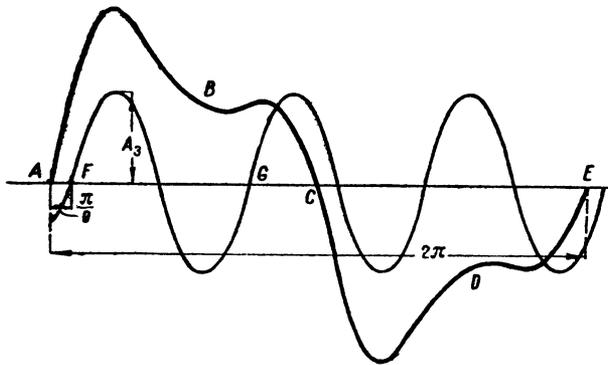
Таким образом ряд Фурье в самом общем виде выражается так:

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots,$$

или

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots$$

В этих формулах A_0 — постоянный член, не зависящий от времени t ; $A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$ — основная или первая гармоника; $A_2 \sin(2\omega t + \psi_2)$, $A_3 \sin(3\omega t + \psi_3)$ и т. д. — вторая и третья и т. д. гармоники; A_1, A_2, A_3 и т. д. — амплитуды первой или основной, второй, третьей и т. д. гармоник, а ψ_1, ψ_2, ψ_3 и т. д. — начальные фазы первой или основной, второй, третьей и т. д. гармоник. Эти фазы отсчитываются в своем масштабе и относятся к общему началу счета времени. Обычно за такое начало принимается начало заданной кривой.



Фиг. 9.1.

Все гармоники кроме первой называются высшими.

При нанесении на графики фазных углов ψ_1, ψ_2, ψ_3 и т. д. надо обратить внимание на следующее:

а) Если начальная фаза положительна, то соответствующая гармоника на графике имеет нулевую фазу левее начала заданной кривой; если начальная фаза отрицательна, то гармоника имеет нулевую фазу правее начала заданной кривой.

б) При откладывании на графике фаз отдельных гармоник надо учитывать разницу масштабов по оси абсцисс. Один и тот же отрезок, соответствующий одному периоду заданной кривой и основной гармоники, содержит k периодов k -ой гармоники. Следовательно, масштаб k -ой гармоники по оси абсцисс в k раз мельче, чем масштаб для основной синусоиды. Поэтому отрезок на оси абсцисс, определяющий угол ψ_k , будет в k раз меньше отрезка, который выражает тот же угол для основной гармоники.

Пример 9.1. Допустим, что при разложении периодической кривой $ABCDE$ фиг. 9,1 мы получили, что третья гармоника будет $A_3 \sin(3\omega t - \frac{\pi}{3})$. Построить ее мы должны следующим образом:

Отложим вправо от точки A угол $\frac{\pi}{3}$ (отрезок \overline{AF}) в масштабе $AE=3 \cdot 2\pi$, поскольку отрезок AE соответствует углу 2π основной синусоиды. Период этой синусоиды изобразится отрезком FG , равным $\frac{1}{3}$ отрезка AE . Зная период, начальную фазу и амплитуду A_3 , строим самую синусоиду.

9.3. Формулы для определения амплитуд и фаз

Предварительно найдем величины следующих интегралов, которые встретятся нам в дальнейшем изложении:

$$M = \int_0^{2\pi} \sin(mx + \alpha) \sin(nx + \beta) dx;$$

$$N = \int_0^{2\pi} \cos(mx + \alpha) \cos(nx + \beta) dx;$$

$$P = \int_0^{2\pi} \sin(mx + \alpha) \cos(nx + \beta) dx.$$

Найдем M , N и P в предположении, что m и n целые числа, не равные нулю.

Из тригонометрии известны следующие формулы:

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)];$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)];$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)].$$

На основании этих формул мы можем преобразовать выражения M , N и P :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(mx + \alpha - nx - \beta) - \cos(mx + \alpha + nx + \beta)] dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{ \cos[(m - n)x + (\alpha - \beta)] - \cos[(m + n)x + (\alpha + \beta)] \} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[(m - n)x + (\alpha - \beta)] dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[(m + n)x + (\alpha + \beta)] dx. \end{aligned}$$

При $m \neq n$ оба эти интеграла превращаются в нуль, так как первый представляет $\frac{1}{2}$ площади, ограниченной $(m - n)$ косинусоидами, а второй $\frac{1}{2}$ площади, ограниченной $(m + n)$ косинусоидами, а так как площадь, ограниченная каждой косинусоидой, равна нулю, то оба интеграла и сумма их M равны нулю.

При $m = n$ первый интеграл превращается в

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha - \beta) dx = \pi \cos(\alpha - \beta),$$

а второй попрежнему равен нулю.

Таким образом при $m \neq n$ $M = 0$, а при $m = n$ $M = \pi \cos(\alpha - \beta)$.

В частности, при $m = n$ и $\alpha = \beta$ $M = \pi$.

Таким же образом находим N :

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(mx + \alpha - nx - \beta) + \cos(mx + \alpha + nx + \beta)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[(m-n)x + (\alpha - \beta)] dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[(m+n)x + (\alpha + \beta)] dx. \end{aligned}$$

При $m \neq n$ $N=0$, а при $m=n$ $N=\pi \cos(\alpha - \beta)$.

В частности, при $m=n$ и $\alpha = \beta$ $N=\pi$.

Таким же образом находим P :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\sin(mx + \alpha + nx + \beta) + \sin(mx + \alpha - nx - \beta)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin[(m+n)x + (\alpha + \beta)] dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin[(m-n)x + (\alpha - \beta)] dx. \end{aligned}$$

При $m \neq n$ $P=0$, а при $m=n$ $P=\pi \sin(\alpha - \beta)$.

В частности, при $m=n$ и $\alpha = \beta$ $P=0$.

Переходим к определению в ряде Фурье амплитуд A_1, A_2, \dots , фаз ψ_1, ψ_2, \dots всех гармоник, а также постоянного члена A_0 .

Умножим обе части уравнения

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots$$

на $\sin kx dx$, где k — любое целое число от 1 до бесконечности, и проинтегрируем от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx &= \int_0^{2\pi} A_0 \sin kx dx + \int_0^{2\pi} A_1 \sin(x + \psi_1) \sin kx dx + \\ &+ \int_0^{2\pi} A_2 \sin(2x + \psi_2) \sin kx dx + \int_0^{2\pi} A_3 \sin(3x + \psi_3) \sin kx dx + \dots \end{aligned}$$

Первый член правой части этого равенства равен нулю, так как он представляет собой площадь, ограниченную k синусоидами. Остальные члены имеют вид

$$\int_0^{2\pi} A_m \sin(mx + \psi_m) \sin kx dx;$$

этот интеграл равен нулю при $m \neq k$, а при $m=k$ он равен $A_k \pi \cos \psi_k$.

Таким образом все члены правой части вышенаписанного равенства равны нулю за исключением члена

$$\int_0^{2\pi} A_k \sin(kx + \psi_k) \sin kx dx = A_k \pi \cos \psi_k.$$

Мы получили таким образом, что

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = A_k \pi \cos \psi_k,$$

или

$$A_k \cos \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Обозначим это выражение через A'_k :

$$A_k \cos \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = A'_k. \quad (9, 1)$$

Умножим теперь обе части ряда Фурье на $\cos kx \, dx$ и проинтегрируем от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \int_0^{2\pi} A_0 \cos kx \, dx + \int_0^{2\pi} A_1 \sin(x + \psi_1) \cdot \cos kx \, dx + \\ &+ \int_0^{2\pi} A_2 \sin(2x + \psi_2) \cos kx \, dx + \int_0^{2\pi} A_3 \sin(3x + \psi_3) \cos kx \, dx + \dots \end{aligned}$$

В правой части этого равенства все члены равны нулю за исключением члена

$$\int_0^{2\pi} A_k \sin(kx + \psi_k) \cos kx \, dx = A_k \pi \sin \psi_k.$$

Мы получим, таким образом,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = A_k \pi \sin \psi_k,$$

или

$$A_k \sin \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Обозначим это выражение через A''_k :

$$A_k \sin \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = A''_k. \quad (9, 2)$$

Мы получили два уравнения для определения амплитуды A_k и фазы ψ_k k -й гармоники:

$$A_k \cos \psi_k = A'_k; \quad A_k \sin \psi_k = A''_k.$$

Из этих двух уравнений мы можем определить A_k и ψ_k :

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \sqrt{A_k'^2 + A_k''^2}; \\ \operatorname{tg} \psi_k &= \frac{A_k''}{A_k'} . \end{aligned} \right\} \quad (9, 3)$$

Так как в пределах от 0 до 2π есть два угла, имеющих данный тангенс, то для точности определения ψ_k надо обратить внимание на знаки $\cos \psi_k$ и $\sin \psi_k$. Если они оба положительны, ψ_k лежит в первой четверти. Если они оба отрицательны, ψ_k лежит в третьей четверти. Если $\cos \psi_k$ положителен, а $\sin \psi_k$ отрицателен, ψ_k лежит в четвертой четверти. Наконец, если $\cos \psi_k$ отрицателен, а $\sin \psi_k$ положителен, ψ_k лежит во второй четверти.

Подставляя вместо k последовательно числа 1, 2, 3 и т. д., можно определить амплитуды и фазы первой, второй, третьей и т. д. гармоник.

Если кривая задана аналитически, то ряд Фурье обычно имеет бесконечное число членов, но их амплитуды убывают¹ и для практического

¹ Амплитуда $k + N$ -й гармоники при достаточно большом N мала по сравнению с амплитудой k -й гармоники. Однако всегда возможно, что амплитуда k -й гармоники будет меньше, чем амплитуда одной или нескольких гармоник по порядку высших чем k .

разложения достаточно ограничиться небольшим числом членов в зависимости от требуемой точности. Обычно амплитуды так быстро убывают, что достаточно ограничиться первыми тремя-четырьмя членами ряда.

Остается еще определить постоянный член A_0 .

Для этого умножим обе части ряда Фурье на dx и проинтегрируем от 0 до 2π .

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx + \int_0^{2\pi} A_1 \sin x dx + \int_0^{2\pi} A_2 \sin 2x dx + \dots$$

Все интегралы правой части этого равенства кроме первого равны нулю, так как они представляют собой площади, ограниченные синусоидами в пределах одного или нескольких целых периодов.

Таким образом

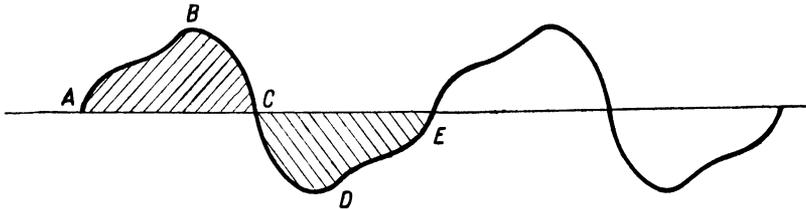
$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} A_0 dx = 2\pi A_0; \\ A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (9,4)$$

Заметим, что $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ есть площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс в пределах одного периода, а 2π — длина основания этой площади. Таким образом A_0 есть среднее значение кривой за один период.

9.4. Ряд Фурье для симметричных функций

Большой частью кривые, встречающиеся в электротехнике, симметричны. Для таких кривых мы получим следующие упрощения:

а) Если для каждого периода рассматриваемой кривой площадь, ограниченная осью абсцисс и положительной частью кривой, равна пло-



Фиг. 9, 2.

щади, ограниченной осью абсцисс и отрицательной частью кривой, то постоянный член $A_0 = 0$. Например, для кривой фиг. 9, 2, у которой площадь $ABC =$ площади CDE , постоянный член $A_0 = 0$. Это свойство анали-

тически выражается так: если $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, то $A_0 = 0$. Доказательство этого положения дано в конце предшествующего параграфа.

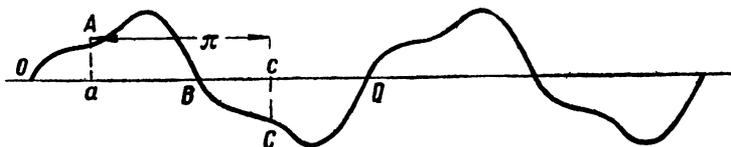
б) Если ординаты точек кривой, абсциссы которых отличаются на полпериода (или на нечетное число полупериодов), равны и противоположны по знаку, то в ряде, полученном от разложения такой кривой, отсутствуют постоянный член и четные гармоники, т. е. вторая, четвертая и т. д. Например, для кривой фиг. 9, 3, у которой при $ac = \pi$, $aA = -cC$

постоянный член и четные гармоники отсутствуют. Это свойство аналитически выражается так: если для любого значения x имеет место соотношение $f(x + \pi) = -f(x)$, то $A_0 = A_2 = A_4 = \dots = 0$. Для доказательства подставим в общую формулу ряда вместо x выражение $(x + \pi)$:

$$f(x + \pi) = A_0 + A_1 \sin(x + \pi + \psi_1) + A_2 \sin(2x + 2\pi + \psi_2) + \dots = \\ = A_0 - A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) - \dots$$

По условию $f(x + \pi) = -f(x)$, следовательно,

$$A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots = \\ = -A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) - A_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots$$



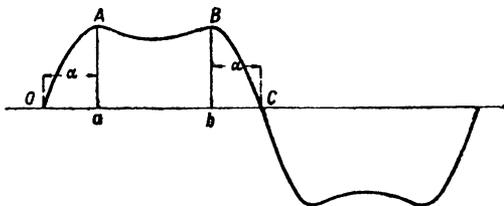
Фиг. 9,3.

Это равенство должно быть справедливо при любом значении x , а это может иметь место только тогда, когда $A_0 = A_2 = A_4 = \dots = 0$. Уравнение ряда в этом случае принимает следующий вид:

$$f(x) = A_1 \sin(x + \psi_1) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots \quad (9,5)$$

В дальнейшем мы будем называть такую кривую симметричной относительно горизонтальной оси.

в) Если кривая, симметричная относительно горизонтальной оси, обладает еще таким свойством, что в пределах каждого полупериода ординаты точек, проекции которых отстоят на одинаковом расстоянии от точек пересечения кривой с осью абсцисс, равны, то начальные фазы всех гармоник ψ_1, ψ_3, \dots равны нулю. При этом все гармоники имеют нулевое значение в той же точке, что и данная кривая: например, для кривой фиг. 9,4, у которой при $Oa = Cb, Aa = Bb$ начальные фазы всех гармоник равны нулю. Это свойство аналитически выражается следующим образом: если для любого значения x имеет место соотношение



Фиг. 9,4.

$$f(x) = f(\pi - x), \text{ то } \psi_1 = \psi_3 = \dots = \psi_k = \dots = 0.$$

Для доказательства подставим в формулу ряда для кривых, симметричных относительно горизонтальной оси, вместо x выражение $(\pi - x)$:

$$f(\pi - x) = A_1 \sin(\pi - x + \psi_1) + A_3 \sin(3\pi - 3x + \psi_3) + \dots = \\ = A_1 \sin(x - \psi_1) + A_3 \sin(3x - \psi_3) + \dots$$

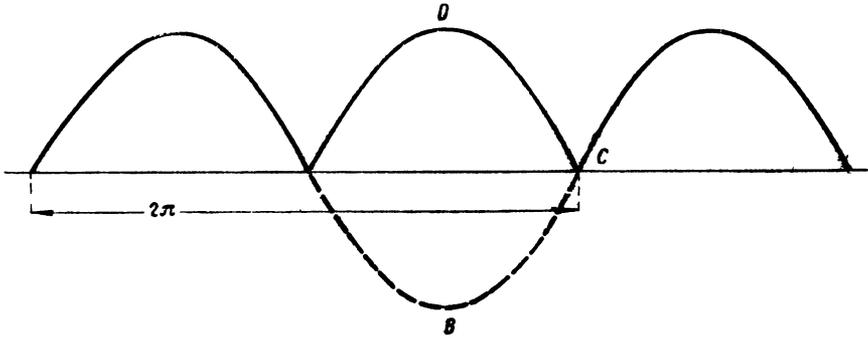
По условию $f(\pi - x) = f(x)$, следовательно,

$$A_1 \sin(x - \psi_1) + A_3 \sin(3x - \psi_3) + \dots = \\ = A_1 \sin(x + \psi_1) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots$$

Это равенство должно быть справедливо при любом значении x , а это может иметь место только тогда, когда $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \dots = 0$. Формула ряда в этом случае принимает вид

$$f(x) = A_1 \sin x + A_3 \sin 3x + \dots \quad (9,6)$$

В дальнейшем мы будем называть такую кривую симметричной относительно горизонтальной и вертикальной осей.

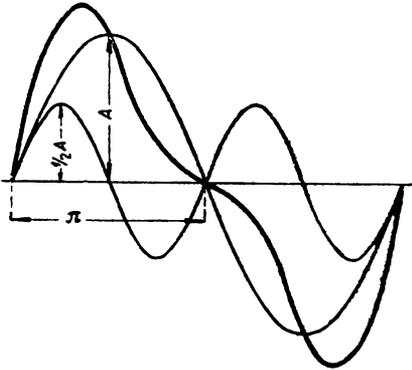


Фиг. 9, 5.

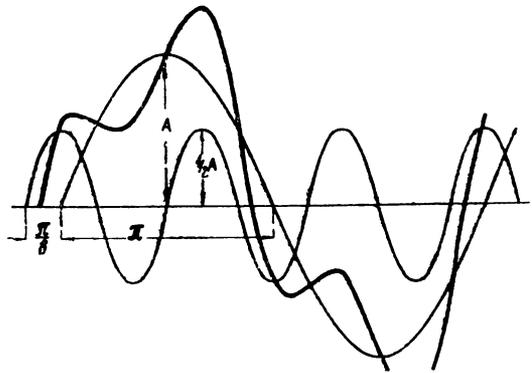
г) Рассмотрим еще кривую (фиг. 9,5) выпрямленной синусоиды. В этой кривой отрицательная часть ABC синусоиды заменена своим зеркальным изображением ADC . Для этой кривой, очевидно, имеют место соотношения

$$f(\pi + x) = f(x)$$

$$f(\pi - x) = f(x).$$



Фиг. 9, 6.



Фиг. 9, 7.

Первое из этих соотношений дает

$$A_0 - A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) - A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots = \\ = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots$$

Отсюда вытекает, что $A_1 = A_3 = \dots = 0$, т. е. что в ряде, полученном от разложения такой кривой, нечетные гармоники отсутствуют.

Ряд принимает следующий вид:

$$f(x) = A_0 + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_4 \sin(4x + \psi_4) + \dots$$

Подставим в это равенство вместо x выражение $(\pi - x)$:

$$f(\pi - x) = A_0 + A_2 \sin(2\pi - 2x + \psi_2) + A_4 \sin(4\pi - 4x + \psi_4) + \dots = \\ = A_0 - A_2 \sin(2x - \psi_2) - A_4 \sin(4x - \psi_4) + \dots$$

Согласно условию $f(\pi - x) = f(x)$ имеем

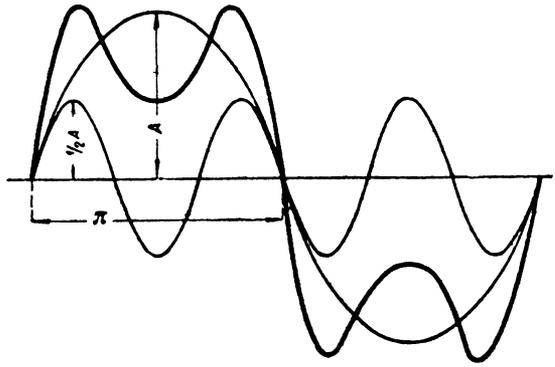
$$A_0 - A_2 \sin(2x - \psi_2) - A_4 \sin(4x - \psi_4) - \dots = \\ = A_0 + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_4 \sin(4x + \psi_4) + \dots$$

Такое равенство может иметь место, когда или $A_2 = A_4 = \dots = 0$, что, очевидно, невозможно, или когда

$$2x + \psi_2 = \pi + (2x - \psi_2); \\ 4x + \psi_4 = \pi + (4x - \psi_4).$$

Из этих равенств вытекает, что $\psi_2 = \psi_4 = \dots = \frac{\pi}{2}$.

Ряд Фурье принимает следующий вид:



Фиг. 9, 8.

$$f(x) = A_0 + A_2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + A_4 \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) + \dots, \\ \text{или} \\ f(x) = A_0 + A_2 \cos 2x + A_4 \cos 4x + \dots \quad (9, 7)$$

На фиг. 9, 6 изображена кривая $f(x) = A \sin x + \frac{1}{2} A \sin 2x$. Так как эта кривая содержит и нечетную и четную гармоники, то она несимметрична ни по отношению к горизонтальной, ни по отношению к вертикальной оси, как это видно из фиг. 9, 6.

На фиг. 9, 7 изображена кривая $f(x) = A \sin x + \frac{1}{2} A \sin(3x - \frac{\pi}{2})$. Так как эта кривая состоит только из нечетных гармоник, первой и третьей, то она симметрична относительно горизонтальной оси. Относительно же вертикальной оси она не симметрична, так как фазный угол третьей гармоники не равен нулю.

На фиг. 9, 8 изображена кривая $f(x) = A \sin x + \frac{1}{2} A \sin 3x$. Эта кривая симметрична и относительно горизонтальной и относительно вертикальной оси, так как она состоит только из нечетных гармоник и фазные углы равны нулю.

Кривые э. д. с. вследствие симметрии поля электрических машин почти всегда симметричны относительно горизонтальной и вертикальной осей, и поэтому ряд Фурье для них принимает следующий вид:

$$E = E_1 \sin x + E_3 \sin 3x + E_5 \sin 5x + \dots,$$

или

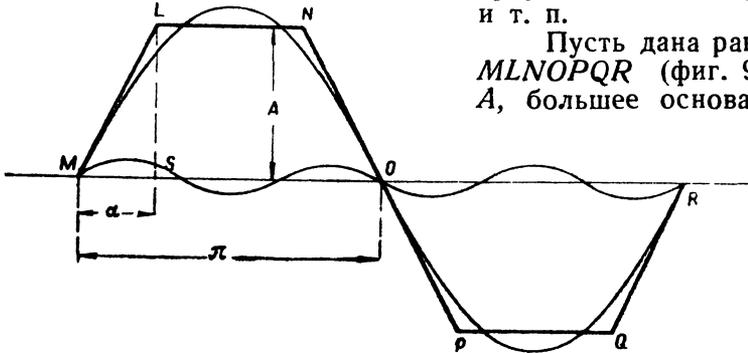
$$E = E_1 \sin \omega t + E_3 \sin 3\omega t + E_5 \sin 5\omega t + \dots$$

9,5. Разложение в ряд Фурье трапеции, прямоугольника, треугольника и выпрямленной синусоиды

Аналитическое вычисление амплитуд и фаз гармоник удастся лишь в том случае, если заданное аналитическое выражение $f(x)$ после умножения на $\sin kx$ и $\cos kx$ поддается интегрированию.

Такой случай представляют собой кривые простой геометрической формы, как-то: равнобедренная трапеция, прямоугольник, равнобедренный треугольник, выпрямленная синусоида и т. п.

Пусть дана равнобедренная трапеция $MLNOPQR$ (фиг. 9,9), высота трапеции A , большее основание $MO = \pi$, проекция боковой стороны $MS = a$.



Фиг. 9,9.

Так как эта кривая симметрична относительно горизонтальной и вертикальной осей, то в ряде Фурье, полученном от разложения этой кривой, отсутствуют постоянный

член и четные гармоники, а фазовые углы равны нулю. Определим по формулам (9,1) и (9,2) амплитуды нечетных гармоник A_1, A_3, \dots

Так как $\psi_1 = \psi_3 = \dots = 0$, то

$$A_k' = A_k \cos \psi_k = A_k \cos 0^\circ = A_k;$$

$$A_k'' = A_k \sin \psi_k = A_k \sin 0^\circ = 0.$$

Таким образом

$$A_k = A_k' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Ввиду того что кривая симметрична относительно горизонтальной и вертикальной осей, можно ограничиться рассмотрением лишь одной четверти периода, т. е. интегрировать от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и разделить интеграл на $\frac{1}{4}\pi$ (а не на π):

$$A_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin kx \, dx.$$

Закон изменения функции, изображаемой трапециoidalной кривой, в пределах первой четверти периода различен. От $x=0$ до $x=a$ уравнение кривой будет

$$y_1 = \frac{A}{a} x.$$

От $x=a$ до $x=\frac{\pi}{2}$ уравнение кривой будет $y_2 = A$.

Таким образом

$$A_k = \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} \frac{A}{\alpha} x \sin kx \, dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} A \sin kx \, dx \right) = \\ = \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} x \sin kx \, dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin kx \, dx \right).$$

Найдем каждый из этих интегралов в отдельности:

$$\int_0^{\alpha} x \sin kx \, dx = \int_0^{\alpha} -\frac{1}{k} x \, d\cos kx = \left| -\frac{1}{k} x \cos kx \right|_0^{\alpha} + \\ + \int_0^{\alpha} \frac{1}{k} \cos kx \, dx = \left| -\frac{1}{k} x \cos kx \right|_0^{\alpha} + \left| \frac{1}{k^2} \sin kx \right|_0^{\alpha} = \\ = -\frac{\alpha}{k} \cos k\alpha + \frac{1}{k^2} \sin k\alpha; \\ \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin kx \, dx = \left| -\frac{1}{k} \cos kx \right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k} \cos k\alpha.$$

Подставляя значение этих интегралов в выражение для A_k , получим

$$A_k = \frac{4A}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} \left(-\frac{\alpha}{k} \cos k\alpha + \frac{1}{k^2} \sin k\alpha \right) + \frac{1}{k} \cos k\alpha \right] = \frac{4A}{\pi \alpha k^2} \sin k\alpha. \quad (9, 8)$$

Подставляя вместо k ряд нечетных чисел: $k = 1, 3, 5, \dots$, получим

$$A_1 = \frac{4A}{\pi \alpha} \sin \alpha; \quad A_3 = \frac{4A}{9\pi \alpha} \sin 3\alpha; \quad A_5 = \frac{4A}{25\pi \alpha} \sin 5\alpha \dots$$

Ряд Фурье принимает следующий вид:

$$f(x) = \frac{4A}{\pi \alpha} \left(\sin \alpha \cdot \sin x + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \cdot \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \cdot \sin 5x + \dots \right). \quad (9, 9)$$

В трапеции, изображенной на фиг. 9,9, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{4A}{\frac{\pi}{4} \pi} \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{4} \sin 3x + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{4} \sin 5x + \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi}{4} \sin 7x + \dots \right) = \\ = \frac{8\sqrt{2}A}{\pi^2} \left(\sin x + \frac{1}{9} \sin 3x - \frac{1}{25} \sin 5x - \frac{1}{49} \sin 7x + \dots \right) = \\ = 1,14A \sin x + 0,127A \sin 3x - 0,046 \sin 5x - 0,023 \sin 7x + \dots$$

На фиг. 9,9 изображены первая и третья гармоники.

Интересно разложение трапеции, в которой $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Тогда в ряде Фурье превращаются в нуль амплитуды третьей, девятой и т. д. гармоник,

т. е. гармоник, порядок которых кратен трем, так как $\sin 3\alpha = \sin \pi = 0$; $\sin 9\alpha = \sin 3\pi = 0$. В этом случае ряд Фурье принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4A}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{3} \sin x + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{3} \sin 5x + \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi}{3} \sin 7x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{121} \sin \frac{11\pi}{3} \sin 11x + \dots \right) = \\ &= \frac{6\sqrt{3}A}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{1}{25} \sin 5x + \frac{1}{49} \sin 7x - \frac{1}{121} \sin 11x + \dots \right). \end{aligned} \quad (9, 10)$$

Равнобедренный треугольник представляет собой частный случай равнобедренной трапеции при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ряд Фурье для кривой треугольной формы мы получим из ряда Фурье для трапециoidalной формы, подставляя $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

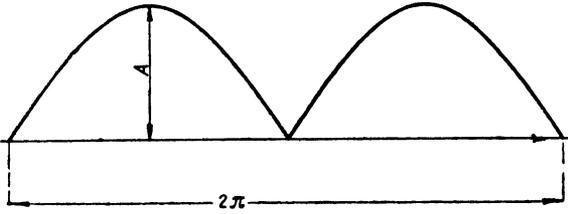
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4A}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} \sin x + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{2} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{2} \sin 5x + \dots \right) = \\ &= \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right). \end{aligned} \quad (9, 11)$$

Прямоугольник представляет собой частный случай равнобедренной трапеции при $\alpha = 0$. Непосредственная подстановка в ряд Фурье для

кривой трапециoidalной формы $\alpha = 0$ дает для амплитуд всех гармоник выражение $\frac{0}{0}$.

Однако мы можем раскрыть неопределенность на основании известного правила из теории пределов:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left| \frac{\sin k\alpha}{\alpha} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left| k \frac{\sin k\alpha}{k\alpha} \right| = k^1.$$



Фиг. 9.10.

Ряд Фурье для кривой прямоугольной формы примет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4A}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \sin x + \frac{1}{9} \frac{\sin 3\alpha}{\alpha} \sin 3x + \frac{1}{25} \frac{\sin 5\alpha}{\alpha} \sin 5x + \dots \right) = \\ &= \frac{4A}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \sin x + \frac{3}{9} \frac{\sin 3\alpha}{3\alpha} \sin 3x + \frac{5}{25} \frac{\sin 5\alpha}{5\alpha} \sin 5x + \dots \right) = \\ &= \frac{4A}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \end{aligned} \quad (9, 12)$$

Составим еще ряд Фурье для выпрямленной синусоиды фиг. 9,10 с амплитудой A .

Как было показано, ряд Фурье для этой кривой имеет вид

$$f(x) = A_0 + A_2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + A_4 \sin \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) + \dots \quad (9, 7)$$

Нужно найти постоянный член A_0 и амплитуды четных гармоник A_2, A_4, \dots .

Постоянный член A_0 равен среднему значению кривой за один период. Так как кривая совершенно одинакова для первой и второй поло-

¹ Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, вычисление этого предела считаем известным.

вин периода, то A_0 можно принять равным среднему значению синусоиды за полпериода:

$$A_0 = \frac{2A}{\pi}. \quad (9, 13)$$

Так как $\psi_2 = \psi_4 = \dots = \frac{\pi}{2}$, то

$$A_k' = A_k \cos \psi_k = A_k \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$A_k'' = A_k \sin \psi_k = A_k \sin \frac{\pi}{2} = A_k.$$

Таким образом по формуле (9, 2)

$$A_k = A_k'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Закон изменения функции, изображаемой выпрямленной синусоидой, различен для обеих половин периода. Для первой половины периода между $x=0$ и $x=\pi$ уравнение кривой будет $y_1 = A \sin x$, а для второй половины периода между $x=\pi$ и $x=2\pi$ уравнение кривой будет

$$y_2 = -A \sin x.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} y_1 \cos kx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} y_2 \cos kx \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} A \sin x \cos kx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -A \sin x \cos kx \, dx \right) = \\ &= \frac{A}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin x \cos kx \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cos kx \, dx \right). \end{aligned}$$

Пользуясь формулой

$$\sin x \cos kx = \frac{1}{2} [\sin(k+1)x - \sin(k-1)x],$$

вычисляем первый из приведенных интегралов:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \cos kx \, dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(k+1)x \, dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(k-1)x \, dx = \\ &= -\frac{\cos(k+1)x}{2(k+1)} \Big|_0^{\pi} - \left(-\frac{\cos(k-1)x}{2(k-1)} \right) \Big|_0^{\pi}. \end{aligned}$$

Так как k — четное число (потому что для данной кривой ряд Фурье содержит только четные гармоники), то

$$-\frac{\cos(k+1)x}{2(k+1)} \Big|_0^{\pi} - \left(-\frac{\cos(k-1)x}{2(k-1)} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} = -\frac{2}{k^2-1}.$$

Второй из приведенных интегралов

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cos kx \, dx &= -\frac{\cos(k+1)x}{2(k+1)} \Big|_{\pi}^{2\pi} - \left(-\frac{\cos(k-1)x}{2(k-1)} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \\ &= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1} = \frac{2}{k^2-1}. \end{aligned}$$

Найдя оба эти интеграла, определим

$$A_k = \frac{A}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin x \cos kx \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cos kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{A}{\pi} \left(-\frac{2}{k^2-1} - \frac{2}{k^2-1} \right) = -\frac{4A}{\pi(k^2-1)} = -\frac{4A}{\pi(k-1)(k+1)}. \quad (9, 14)$$

Подставляя вместо k ряд четных чисел: $k=2, 4, 6, \dots$, получим

$$A_2 = -\frac{4A}{1 \cdot 3 \cdot \pi}; \quad A_4 = -\frac{4A}{3 \cdot 5 \cdot \pi}; \quad A_6 = -\frac{4A}{5 \cdot 7 \cdot \pi}, \dots$$

Ряд Фурье принимает при этом следующий вид:

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{1 \cdot 3 \cdot \pi} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4A}{3 \cdot 5 \cdot \pi} \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{4A}{5 \cdot 7 \cdot \pi} \sin\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) - \dots =$$

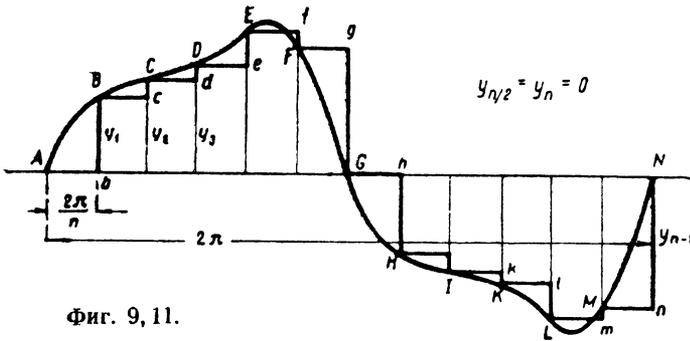
$$= \frac{2A}{\pi} \left(1 - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4x - \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6x - \dots \right). \quad (9, 15)$$

9,6. Приближенные методы разложения в ряд Фурье

Если заданная функция $y=f(x)$ по умножению на $\sin kx$ и $\cos kx$ не поддается аналитическому интегрированию или если функция задана графически в виде кривой, то точное вычисление амплитуд A и фаз ψ по формулам § 9,3 невозможно. В таких случаях следует обратиться

к приближенным аналитическим или графическим методам вычисления коэффициентов ряда.

Известно большое количество подобных методов. Мы ограничимся здесь только тремя из них: арифметическими методами Перри и Рунге и графическим методом Роте.



Фиг. 9, 11.

Все эти методы основаны на том, что приведенные выше интегралы

$$A_k' = A_k \cos \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad (9, 1)$$

$$A_k'' = A_k \sin \psi_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (9, 2)$$

заменяются приближенно суммами конечного числа слагаемых, подобно тому как это делается для приближенного определения площади кривой.

Допустим, что надо разложить в ряд Фурье периодическую кривую фиг. 9, 11. Делим один период длиной 2π на n равных частей, причем n — четное число. Длина каждой части будет $\frac{2\pi}{n}$. Откладываем на основании кривой AN , начиная от точки A , отрезки длиной $\frac{2\pi}{n}$ до точки N . Через

все точки деления проводим ординаты $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ до пересечения с кривой в точках B, C, D, \dots, M . Через эти точки проведем прямые, параллельные оси абсцисс, до пересечения с последующими ординатами (или их продолжениями) в точках c, d, \dots, l, m, n, b . Заменяем теперь заданную кривую ломаной линией $AbBcC\dots MnN$. Ввиду того что для этой ломаной линии величина $f(x)$ в пределах каждого отрезка остается неизменной, мы можем в вышеуказанных интегралах заменить:

- а) интеграл конечной суммой;
- б) величину $f(x)$ значением функции в начале каждого отрезка;
- в) $\sin kx$ или $\cos kx$ синусом или косинусом угла, соответствующего началу каждого отрезка;
- г) dx длиной $\frac{2\pi}{n}$ каждого отрезка.

После этой замены вышеприведенные интегралы превратятся в суммы

$$\begin{aligned}
 A_k' &= A_k \cos \psi_k = \frac{1}{\pi} \left[y_1 \sin \left(k \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} + y_2 \sin \left(2k \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} + \right. \\
 &\quad \left. + y_3 \sin \left(3k \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} + \dots + y_n \sin \left(nk \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{n} \left[y_1 \sin \left(k \frac{2\pi}{n} \right) + y_2 \sin \left(2k \frac{2\pi}{n} \right) + y_3 \sin \left(3k \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + y_n \sin \left(nk \frac{2\pi}{n} \right) \right] = \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{m=n} y_m \sin \left(mk \frac{2\pi}{n} \right); \tag{9, 16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_k'' &= A_k \sin \psi_k = \frac{1}{\pi} \left[y_1 \cos \left(k \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} + y_2 \cos \left(2k \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} + \right. \\
 &\quad \left. + y_3 \cos \left(3k \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} + \dots + y_n \cos \left(nk \frac{2\pi}{n} \right) \frac{2\pi}{n} \right] = \\
 &= \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{m=n} y_m \cos \left(mk \frac{2\pi}{n} \right). \tag{9, 17}
 \end{aligned}$$

Постоянный член A_0 находится заменой в формуле

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

интеграла конечной суммой

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{m=n} y_m \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} y_m. \tag{9, 18}$$

В этих формулах k означает порядок гармоник, n — число равных частей, на которое делится период, а m — номер слагающей в сумме.

Если кривая симметрична относительно горизонтальной оси, т. е. если $f(x + \pi) = -f(x)$, то в вышеуказанных формулах для определения A_k' и A_k'' слагаемые, порядок которых отличается на $\frac{n}{2}$, равны по величине и при k нечетном имеют одинаковые знаки, а при k четном — разные знаки. В самом деле, возьмем два слагаемых формулы для A_k' , порядок которых отличается на $\frac{n}{2}$:

$$y_m \sin \left(mk \frac{2\pi}{n} \right)$$

и

$$y_{m+\frac{n}{2}} \sin \left[\left(m + \frac{n}{2} \right) k \frac{2\pi}{n} \right] = y_{m+\frac{n}{2}} \sin \left(mk \frac{2\pi}{n} + k\pi \right).$$

Первые множители y_m и $y_{m+\frac{n}{2}}$ равны по величине и противоположны по знаку вследствие симметрии кривой относительно горизонтальной оси; вторые множители $\sin \left(mk \frac{2\pi}{n} \right)$ и $\sin \left(mk \frac{2\pi}{n} + k\pi \right)$ при k нечетном равны и противоположны по знаку, а при k четном равны и одинаковы по знаку. То же самое относится к формуле для определения A_k'' . Следовательно, при k нечетном можно ограничиться суммированием только половины числа членов и результат удвоить. При k четном сумма будет равна нулю. Это означает, что четных гармоник нет.

Если же кривая еще симметрична относительно вертикальной оси, т. е. если, кроме того, $f(\pi - x) = f(x)$, то в формулах для определения A_k' в пределах каждого полупериода слагаемые, равноотстоящие от концов:

$$y_m \sin \left(mk \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$y_{\frac{n}{2}-m} \sin \left[\left(\frac{n}{2} - m \right) k \frac{2\pi}{n} \right] = y_{\frac{n}{2}-m} \sin \left(k\pi - mk \frac{2\pi}{n} \right),$$

равны, так как первые множители равны по условию симметрии, а вторые множители равны, так как k нечетное число. Следовательно, можно ограничиться суммированием только четвертой части членов и результат умножить на 4. В формулах же для определения A_k'' слагаемые, равноотстоящие от концов:

$$\begin{aligned} y_m &= \cos \left(mk \frac{2\pi}{n} \right) \quad \text{и} \quad y_{\frac{n}{2}-m} \cos \left[\left(\frac{n}{2} - m \right) k \frac{2\pi}{n} \right] = \\ &= y_{\frac{n}{2}-m} \cos \left(k\pi - mk \frac{2\pi}{n} \right) = - y_{\frac{n}{2}-m} \cos \left(mk \frac{2\pi}{n} \right), \end{aligned}$$

будут равны и противоположны по знаку, так как первые множители равны, а вторые равны по величине и противоположны по знаку, и вся сумма равна нулю. Следовательно, $A_k'' = A_k \sin \psi_k = 0$. Так как A_k не равно нулю, потому что $A_k \cos \psi_k$ вообще не равно нулю, то $\psi_k = 0$.

Указанная замена интегралов конечными суммами лежит в основе названных методов анализа кривых: арифметических — Перри и Рунге и графического — Роте.

9.7. Метод Перри

Метод Перри состоит в вычислении слагаемых каждой гармоники согласно формулам предыдущего параграфа. Порядок вычисления виден из следующего примера.

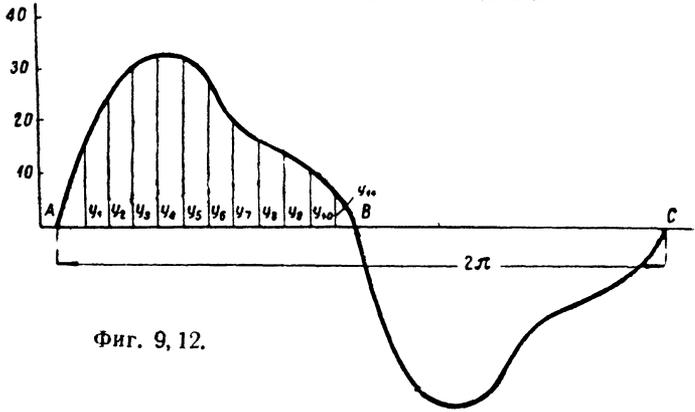
Пример 9,2. Требуется разложить кривую фиг. 9,12.

Так как площади, ограниченные положительной и отрицательной частями кривой, равны между собой, то постоянный член $A_0 = 0$.

Кривая симметрична относительно горизонтальной оси, поэтому четные гармоники отсутствуют. Относительно вертикальной оси кривая не симметрична, и поэтому начальные фазы ψ_1, ψ_3, \dots могут иметь значения, не равные нулю. Таким образом ряд Фурье для этой кривой будет иметь следующий вид:

$$f(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + A_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

Согласно вышесказанному можно ограничиться вычислением произведений $y_m \sin\left(mk \frac{2\pi}{n}\right)$ и $y_m \cos\left(mk \frac{2\pi}{n}\right)$ только для одной половины периода. Делим период на $n = 24$ равных частей или первую половину периода на 12 равных частей. Через точки деления проводим ординаты $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{11}, y_{12}$ до пересечения с кривой. Ордината $y_{12} = 0$. Измеряем все ординаты в выбранном масштабе и составляем суммы произведений этих ординат на синусы и косинусы соответствующих углов. Все результаты измерений и вычислений располагаем в табл. 9, 1.



Фиг. 9, 12.

Деля полученные в таблице суммы на $\frac{24}{4} = 6$, находим коэффициенты первой, третьей и пятой гармоник:

$$\begin{aligned} A_1' &= +30,21; & A_1'' &= +7,60; \\ A_3' &= +3,37; & A_3'' &= -5,53; \\ A_5' &= +0,68; & A_5'' &= -0,34. \end{aligned}$$

По этим коэффициентам определяем амплитуду и фазы первых трех гармоник:

$$A_1 = \sqrt{A_1'^2 + A_1''^2} = \sqrt{30,21^2 + 7,60^2} = 31,15;$$

$$A_3 = \sqrt{A_3'^2 + A_3''^2} = \sqrt{3,37^2 + 5,53^2} = 6,42;$$

$$A_5 = \sqrt{A_5'^2 + A_5''^2} = \sqrt{0,68^2 + 0,34^2} = 0,76;$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{A_1''}{A_1'} = \frac{7,60}{30,21} = 0,259; \quad \psi_1 = 14^\circ 30';$$

$$\operatorname{tg} \psi_3 = \frac{A_3''}{A_3'} = \frac{-5,83}{3,37} = -1,73; \quad \psi_3 = -60^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \psi_5 = \frac{A_5''}{A_5'} = \frac{-0,34}{0,68} = -0,50; \quad \psi_5 = -26^\circ 30'.$$

Фазы ψ_1, ψ_3 и ψ_5 мы определили по тангенсу, учитывая знаки синусов и косинусов. Угол ψ_1 лежит в первой четверти, так как синус и косинус его положительны. Углы ψ_3 и ψ_5 лежат в чет-



Фиг 9, 13.

вертой четверти (или в первой четверти в отрицательном направлении), так как синусы их отрицательны, а косинусы положительны.

ТАБЛИЦА 9,1
Для определения гармоник ряда Фурье по методу Перри

N	y _m	k = 1					k = 3		
		x = ωt	sin ωt	cos ωt	y sin ωt	y cos ωt	x = 3ωt	sin 3ωt	cos 3ωt
1	15	15°	+ 0,259	+ 0,966	+ 3,88	+ 14,47	45°	+ 0,707	+ 0,707
2	26	30°	+ 0,500	+ 0,866	+ 13,00	+ 22,50	90°	+ 1,000	0,000
3	32	45°	+ 0,707	+ 0,707	+ 22,60	+ 22,60	135°	+ 0,707	- 0,707
4	35	60°	+ 0,866	+ 0,500	+ 29,70	+ 17,50	180°	0,000	- 1,000
5	34	75°	+ 0,966	+ 0,269	+ 32,90	+ 8,79	225°	- 0,707	- 0,707
6	27	90°	+ 1,000	0,000	+ 27,00	0,00	270°	- 1,000	0,000
7	21	105°	+ 0,966	- 0,259	+ 20,90	- 5,43	315°	- 0,707	+ 0,707
8	17	120°	+ 0,866	- 0,500	+ 14,70	- 8,50	360°	0,000	+ 1,000
9	14	135°	+ 0,707	- 0,707	+ 9,88	- 9,88	405°	+ 0,707	+ 0,707
10	11	150°	+ 0,500	- 0,866	+ 5,50	- 9,53	450°	+ 1,000	0,000
11	7	165°	+ 0,259	- 0,966	+ 1,81	- 6,75	495°	+ 0,707	- 0,707
12	0	180°	0,000	- 1,000	0,00	0,00	540°	0,000	- 1,000
Сумма					+ 181,27	+ 45,57			

Продолжение

N	y _m	k = 3			k = 5				
		x = 3ωt	y sin 3ωt	y cos 3ωt	x = 5ωt	sin 5ωt	cos 5ωt	y sin 5ωt	y cos 5ωt
1	15	45°	+ 11,61	+ 11,61	75°	+ 0,966	+ 0,259	+ 14,47	+ 3,88
2	26	90°	+ 26,00	0,00	150°	+ 0,500	- 0,866	+ 13,00	- 22,50
3	32	135°	+ 22,60	- 22,60	225°	- 0,707	- 0,707	- 22,60	- 22,50
4	35	180°	0,00	- 35,00	300°	- 0,866	+ 0,500	- 29,70	+ 17,50
5	34	225°	- 24,00	- 24,00	375°	+ 0,259	+ 0,966	+ 8,79	+ 32,90
6	27	270°	- 27,00	0,00	450°	+ 1,000	0,000	+ 27,00	0,00
7	21	315°	- 14,85	+ 14,85	525°	+ 0,259	- 0,966	+ 5,43	- 20,30
8	17	360°	0,00	+ 17,00	600°	- 0,866	- 0,500	- 14,70	- 8,50
9	14	405°	+ 9,88	+ 9,88	675°	- 0,707	+ 0,707	- 9,88	+ 9,88
10	11	450°	+ 11,00	0,00	750°	+ 0,500	+ 0,866	+ 5,50	+ 9,53
11	7	495°	+ 4,95	- 4,95	825°	+ 0,966	- 0,259	+ 6,75	- 1,81
12	0	540°	0,00	0,00	900°	0,000	- 1,000	0,00	0,00
Сумма			+ 20,19	- 33,21				+ 4,06	- 2,02

Мы таким образом разложили кривую фиг. 9,12 в следующий ряд:

$$y = 31,15 \sin(x + 14^\circ 30') + 6,42 \sin(3x - 60^\circ) - 0,76 \sin(5x - 26^\circ 30') + \dots$$

На фиг. 9,13 нанесены кривая и три вычисленные гармоники.

9, 8. Метод Рунге

Метод Рунге заключается в упрощении метода Перри. Присматриваясь к таблице, по которой мы произвели вычисления по методу Перри, можно заметить, что многие числа и произведения повторяются по нескольку раз. Чем больше гармоник мы будем вычислять, тем чаще будут повторения. Метод Рунге состоит в такой систематизации вычисления, чтобы избежать повторений. Произведем, например, по методу Перри вычисления для нахождения первой и одиннадцатой гармоник кривой, симметричной относительно горизонтальной оси. Согласно сказанному выше можно ограничиться суммированием только для первого полупериода. Разделим часть основания кривой, соответствующую половине периода, на 12 равных частей и через точки деления проведем ординаты до пересечения с кривой y_1, y_2, \dots, y_{12} . Величина ординаты y_{12} равна нулю вследствие симметрии кривой.

Определим A_1' и A_{11}' :

$$\begin{aligned} A_1' &= A_1 \cos \psi_1 = \frac{2}{12} (y_1 \sin 15^\circ + y_2 \sin 30^\circ + y_3 \sin 45^\circ + y_4 \sin 60^\circ + y_5 \sin 75^\circ + \\ &+ y_6 \sin 90^\circ + y_7 \sin 105^\circ + y_8 \sin 120^\circ + y_9 \sin 135^\circ + y_{10} \sin 150^\circ + y_{11} \sin 165^\circ) = \\ &= \frac{1}{6} (y_1 \sin 15^\circ + y_2 \sin 30^\circ + y_3 \sin 45^\circ + y_4 \sin 60^\circ + y_5 \sin 75^\circ + y_6 + \\ &+ y_7 \sin 75^\circ + y_8 \sin 60^\circ + y_9 \sin 45^\circ + y_{10} \sin 30^\circ + y_{11} \sin 15^\circ) = \\ &= \frac{1}{6} [(y_1 + y_{11}) \sin 15^\circ + (y_2 + y_{10}) \sin 30^\circ + (y_3 + y_9) \sin 45^\circ + (y_4 + y_8) \sin 60^\circ + \\ &+ (y_5 + y_7) \sin 75^\circ + y_6]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11}' &= A_{11} \cos \psi_{11} = \frac{2}{12} (y_1 \sin 165^\circ + y_2 \sin 330^\circ + y_3 \sin 495^\circ + y_4 \sin 660^\circ + \\ &+ y_5 \sin 825^\circ + y_6 \sin 990^\circ + y_7 \sin 1155^\circ + y_8 \sin 1320^\circ + y_9 \sin 1485^\circ + \\ &+ y_{10} \sin 1650^\circ + y_{11} \sin 1815^\circ) = \frac{1}{6} (y_1 \sin 15^\circ - y_2 \sin 30^\circ + y_3 \sin 45^\circ - \\ &- y_4 \sin 60^\circ + y_5 \sin 75^\circ - y_6 + y_7 \sin 75^\circ - y_8 \sin 60^\circ + y_9 \sin 45^\circ - y_{10} \sin 30^\circ + \\ &+ y_{11} \sin 15^\circ) = \frac{1}{6} [(y_1 + y_{11}) \sin 15^\circ - (y_2 + y_{10}) \sin 30^\circ + (y_3 + y_9) \sin 45^\circ - \\ &- (y_4 + y_8) \sin 60^\circ + (y_5 + y_7) \sin 75^\circ - y_6]. \end{aligned}$$

Мы видим, что A_1' и A_{11}' содержат одни и те же произведения, только с разными знаками. Другие гармоники содержат подобные же произведения, но с другой комбинацией знаков.

Имея это в виду, составим следующие суммы и разности:

$$\begin{array}{llll} s_1 = y_1 + y_{11}; & s_2 = y_2 + y_{10}; & s_3 = y_3 + y_9; & s_4 = y_4 = y_8; \\ s_5 = y_5 + y_7; & d_1 = y_1 - y_{11}; & d_2 = y_2 - y_{10}; & d_3 = y_3 - y_9; \\ d_4 = y_4 - y_8; & d_5 = y_5 - y_7; & r_1 = s_1 + s_3 - s_5; & \\ r_2 = s_2 - y_6; & e_1 = d_1 - d_3 - d_5. & & \end{array}$$

Значения этих выражений вставим в таблицу, предварительно помножив их на синус угла, указанный в той же горизонтальной стороне.

ТАБЛИЦА 9,2

К вычислению гармоник по методу Рунге

Слагаемые амплитуд	A_k'			A_k''		
	1 и 11	3 и 9	5 и 7	1 и 11	3 и 9	5 и 7
$\sin 15^\circ = 0,259$	s_1	—	s_5	d_5	—	d_1
$\sin 30^\circ = 0,500$	s_2	—	s_2	d_4	—	d_4
$\sin 45^\circ = 0,707$	s_3	r_1	$-s_3$	d_3	e_1	$-d_3$
$\sin 60^\circ = 0,866$	s_4	—	$-s_4$	d_2	—	$-d_2$
$\sin 75^\circ = 0,966$	s_5	—	s_1	d_1	—	d_5
$\sin 90^\circ = 1$	y_6	r_2	y_6	—	$-d_4$	—
Сумма первых чисел столбца, умноженных на значения соответствующих синусов .	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1
Сумма вторых чисел столбца, умноженных на значения соответствующих синусов .	S_2	S_2	S_2	S_2	S_2	S_2
Сумма этих чисел	$6A_1'$	$6A_3'$	$6A_5'$	$6A_1''$	$6A_3''$	$6A_5''$
Разность этих чисел	$6A_{11}'$	$6A_9'$	$6A_7'$	$6A_{11}''$	$6A_9''$	$6A_7''$
Слагающие амплитуд	A_1'	A_3'	A_5'	A_1''	A_3''	A_5''
Слагающие амплитуд	A_{11}'	A_9'	A_7'	A_{11}''	A_9''	A_7''

Правильность этой таблицы читатель может легко проверить, сравнивая выражения для любой гармоники, от первой до одиннадцатой, по формуле § 9,6 и по этой таблице.

Пример 9,3. Для кривой фиг. 9,12 находим, что

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 15 + 7 = 22; & s_2 &= 26 + 11 = 37; & s_3 &= 32 + 14 = 46; \\
 s_4 &= 35 + 17 = 52; & s_5 &= 34 + 21 = 55; & y_6 &= 27; \\
 d_1 &= 15 - 7 = 8; & d_2 &= 26 - 11 = 15; & d_3 &= 32 - 14 = 18; \\
 d_4 &= 35 - 17 = 18; & d_5 &= 34 - 21 = 13; \\
 r_1 &= 22 + 46 - 55 = 13; \\
 r_2 &= 37 - 27 = 10; \\
 e_1 &= 8 - 18 - 13 = -23.
 \end{aligned}$$

Подставим эти числа в таблицу, предварительно помножив их на синус соответствующего угла, и произведем указанные в таблице действия.

Слагаемые амплитуд	A_k'			A_k''		
	1 и 11	3 и 9	5 и 7	1 и 11	3 и 9	5 и 7
$\sin 15^\circ = 0,259 \dots$	5,7	—	14,2	3,4	—	2,1
$\sin 30^\circ = 0,500 \dots$	18,5	—	18,5	9,0	—	9,0
$\sin 45^\circ = 0,707 \dots$	32,5	9,3	—32,5	12,7	—16,2	—12,7
$\sin 60^\circ = 0,866 \dots$	44,9	—	—44,9	12,9	—	—13,0
$\sin 75^\circ = 0,966 \dots$	53,1	—	21,3	7,7	—	12,6
$\sin 90^\circ = 1,000 \dots$	27,0	10,0	27,0	—	—18,0	—
Сумма первых чисел столбца	91,3	9,3	3,0	21,9	—18,0	— 4,0
Сумма вторых чисел столбца	90,0	10,0	0,6	23,8	—16,2	2,0
Сумма этих чисел .	181,7	19,3	3,6	45,7	—34,2	— 2,0
Разность этих чисел	0,9	—0,7	2,4	—1,9	— 1,8	— 6,0
Слагающие амплитуд	30,3	3,23	0,6	7,6	— 5,7	—1,33
Слагающие амплитуд	0,15	—0,12	0,4	—0,32	— 0,3	— 1,0

Примечание. В отличие от табл. 9,2 вместо $s_1, s_2, \dots, d, \dots, r$ подставлены значения этих величин, уже умноженные на соответствующие синусы.

9, 9. Метод Роте

Метод Роте — графический метод нахождения гармоник, основанный на тех же формулах (9,16) — (9,18), что и метод Перри.

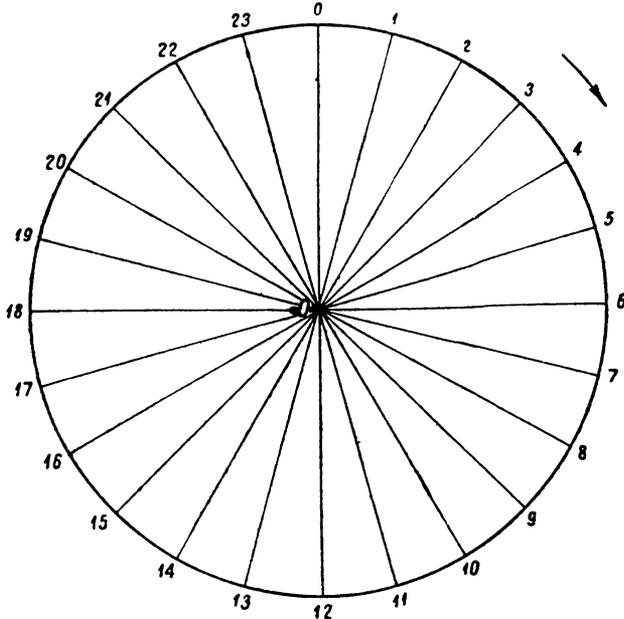
Делим период на n равных частей (на фиг. 9, 14 $n=24$). Через точки деления проводим ординаты до пересечения с кривой. Затем отдельно строим (фиг. 9, 15) n -лучевую симметричную звезду с углом между двумя соседними лучами $\frac{360^\circ}{n}$ (в данном примере этот угол равен 15°). Нулевым лучом считаем вертикальный луч, направленный вверх, 00 , остальные лучи будем отсчитывать последовательно по направлению часовой стрелки ($0-1, 0-2, \dots, 0-23$). Для нахождения амплитуды и фазы первой гармоники проводим (фиг. 9, 16) параллельно лучу $0-1$ (фиг. 9, 15) вектор $\overline{0-1}$ длиной y_1 , из конца вектора $\overline{0-1}$ параллельно лучу $0-2$ проводим вектор $\overline{1-2}$ длиной y_2 , затем параллельно лучу $0-3$ вектор $\overline{2-3}$ длиной y_3 и т. д. до вектора $\overline{10-11}$. Через точку 11 мы должны были бы провести вектор, параллельный лучу $0-12$ длиной y_{12} , но $y_{12}=0$. Следовательно, точки 11 и 12 на фиг. 9, 16 совпадают. Через точку 12 проводим вектор $\overline{12-13}$ длиной y_{13} , параллельный лучу $0-13$, но в противоположном

направлении, так как y_{13} — отрицательно. Затем строим вектор $\overline{13-14}$ и т. д. до вектора $\overline{22-23}$. Точка 24 совпадает с точкой 23, так как $y_{24} = 0$. Полученная таким образом геометрическая сумма $\overline{0-24}$ деленная на $\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12$, по величине и направлению представляет собой первую гармонику. Амплитуда ее A_1 равна



$\frac{1}{12}$ части $\overline{0-24}$, а фаза ее ψ_1 равна углу между $\overline{0-24}$ и горизонтальной прямой. Угол ψ_1 отсчитывается, как на всех векторных диаграммах, против часовой стрелки от горизонтальной линии.

Из фиг. 9, 16, видно, что вектор $\overline{0-24}$ состоит из двух равных частей $\overline{0-12}$ и $\overline{12-24}$. Как видно из построения, это есть следствие симметрии относительно горизонтальной оси взятой кривой (фиг. 9, 14). Следовательно, можно было ограничиться построением для половины периода (до точки 12), но в таком случае для получения амплитуды A надо разделить $\overline{0-12}$ лишь на $\frac{n}{4} = \frac{24}{4} = 6$ равных частей.



Фиг. 9, 15.

При построениях для третьей и пятой гармоник мы так и поступим.

Для нахождения амплитуды и фазы третьей гармоники выполняем такое же построение, как и для первой гармоники с той разницей, что мы проводим векторы параллельно лучам, номер которых втрое больше номера ординаты. Построение для третьей гармоники сделано на фиг. 9, 17.

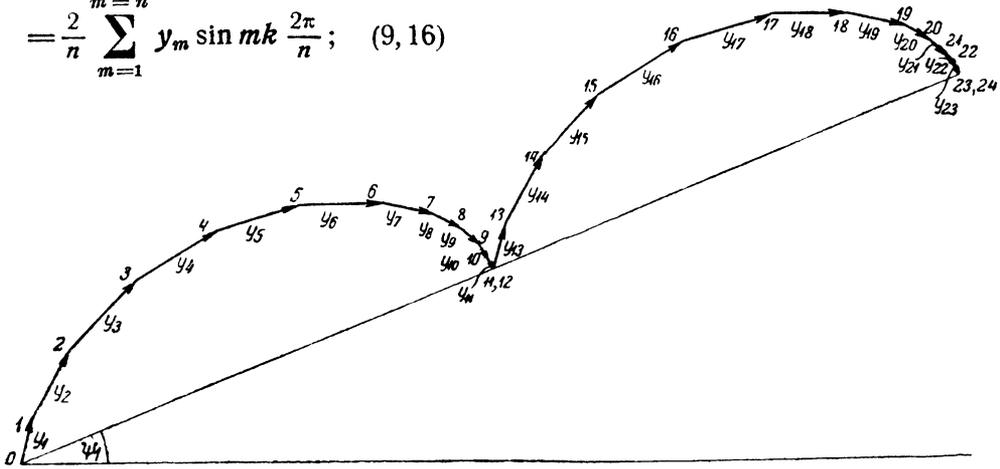
Вектор $\overline{0-1}$ проведен параллельно лучу $\overline{0-3}$, составляющему с вертикальной линией угол $3 \cdot \frac{2\pi}{n} = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, вектор $\overline{1-2}$ параллелен лучу $\overline{0-6}$, составляющему с той же линией угол $2 \cdot 3 \cdot \frac{2\pi}{n} = 90^\circ$, и т. д. Замыкающая $\overline{0-12}$, уменьшенная в шесть раз, по величине и направлению представляет собой амплитуду и фазу третьей гармоники.

На фиг. 9,18 сделано такое же построение для пятой гармоники. Здесь составляющие векторы параллельны лучам, номера которых в пять раз больше номеров соответствующих ординат, и, следовательно, образуют с нулевым лучом углы $5 \frac{2\pi}{n}$; $2 \cdot 5 \frac{2\pi}{n}$; $3 \cdot 5 \frac{2\pi}{n}$. и т. д.

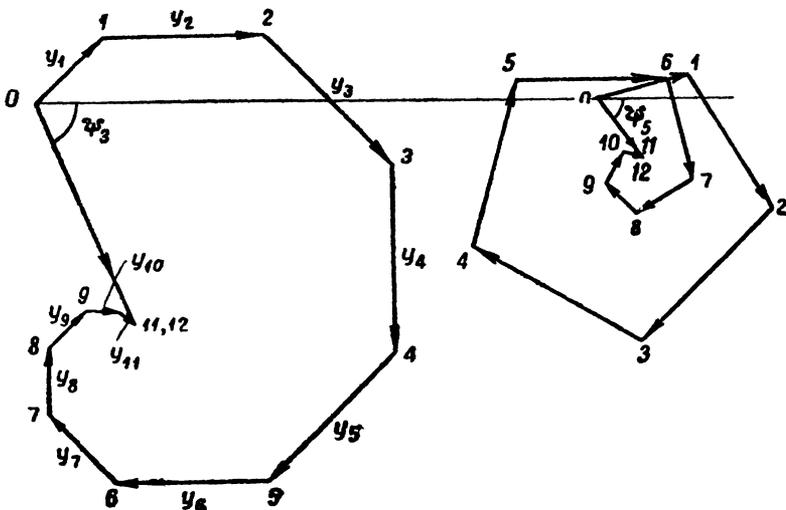
В § 9,6 мы получили формулы

$$A_k \cos \psi_k = \frac{2}{n} \left(y_1 \sin k \frac{2\pi}{n} + y_2 \sin 2k \frac{2\pi}{n} + y_3 \sin 3k \frac{2\pi}{n} + \dots + y_n \sin nk \frac{2\pi}{n} \right) =$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{m=n} y_m \sin mk \frac{2\pi}{n}; \quad (9, 16)$$



Фиг. 9, 16.



Фиг. 9, 17.

Фиг. 9, 18.

$$A_k \sin \psi_k = \frac{2}{n} \left(y_1 \cos k \frac{2\pi}{n} + y_2 \cos 2k \frac{2\pi}{n} + y_3 \cos 3k \frac{2\pi}{n} + \dots + y_n \cos nk \frac{2\pi}{n} \right) =$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{m=n} y_m \cos mk \frac{2\pi}{n}. \quad (9, 17)$$

Умножим обе части второго уравнения на j и сложим его почленно с первым:

$$A_k (\cos \psi_k + j \sin \psi_k) = \frac{2}{n} \left[y_1 \left(\sin k \frac{2\pi}{n} + j \cos k \frac{2\pi}{n} \right) + \left(\sin 2k \frac{2\pi}{n} + j \cos 2k \frac{2\pi}{n} \right) y_2 + y_3 \left(\sin 3k \frac{2\pi}{n} + j \cos 3k \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + y_n \left(\sin nk \frac{2\pi}{n} + j \cos nk \frac{2\pi}{n} \right) \right] = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{m=n} y_m \left(\sin mk \frac{2\pi}{n} + j \cos mk \frac{2\pi}{n} \right).$$

Выражение, стоящее в левой части этого уравнения, представляет собой вектор, имеющий амплитуду A_k и фазу ψ_k . Этот вектор в комплексной форме может быть представлен в виде

$$A_k = (\cos \psi_k + j \sin \psi_k) = A_k e^{j\psi_k}.$$

Выражение, стоящее в правой части, содержит множитель j при косинусе, а не при синусе. Но путем небольшого преобразования мы можем привести к обычному виду

$$y_m \left(\sin mk \frac{2\pi}{n} + j \cos mk \frac{2\pi}{n} \right) = jy_m \left(\cos mk \frac{2\pi}{n} - j \sin mk \frac{2\pi}{n} \right) = jy_m e^{-jmk \frac{2\pi}{n}}.$$

Таким образом мы можем заменить два уравнения, определяющих горизонтальную и вертикальную слагаемые k -й гармоники, одним, представляющим ее в векторной форме:

$$A_k e^{j\psi_k} = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{m=n} jy_m e^{-jmk \frac{2\pi}{n}}. \quad (9, 19)$$

Заметим, что $jy_m e^{-jmk \frac{2\pi}{n}}$ представляет собой вектор с амплитудой y_m , повернутый относительно вертикальной оси на угол $mk \frac{2\pi}{n}$ в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке.

Те построения, которые мы сделали выше для нахождения амплитуд и фаз всех гармоник, диктуются этой формулой.

Кроме описанных методов приближенного разложения периодических кривых есть еще ряд других как аналитических, так и графических методов. Существуют также графические приборы, так называемые анализаторы, служащие той же цели.

9, 10. Кривые тока в цепи с несинусоидальной электродвижущей силой

Если действующую в цепи э. д. с. с мгновенным значением e мы разложим на произвольное число слагаемых e_1, e_2, \dots, e_k ,

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_k,$$

то мгновенное значение тока i в каждый момент равно сумме мгновенных значений токов, вызванных каждой из слагающих э. д. с. в отдельности (принцип суперпозиции).

Предположим, что в цепи действует какая-то периодическая э. д. с. Тогда, разлагая ее в ряд Фурье, мы можем найти мгновенное значение тока в каждый момент как сумму мгновенных значений токов, вызванных каждой из гармоник э. д. с. в отдельности.

Так как все гармоники — синусоиды, то к ним применимы общие законы цепи переменного тока, рассмотренные выше. Если, например,

$$e = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots,$$

то

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1),$$

где

$$I_{1m} = \frac{E_{1m}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

если мы имеем последовательно включенные сопротивление, индуктивность и емкость.

Третья гармоника имеет утроенную частоту. Поэтому реактивное сопротивление, обусловленное индуктивностью для третьей гармоники, будет равно $3\omega L$. Реактивное сопротивление емкости равно $\frac{-1}{3\omega C}$. Общее реактивное сопротивление $x_3 = 3\omega L - \frac{1}{3\omega C}$. Кажущееся сопротивление

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$i_3 = I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3),$$

где

$$I_{3m} = \frac{E_{3m}}{\sqrt{R^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{3\omega L - \frac{1}{3\omega C}}{R}.$$

Таким образом находим кажущееся сопротивление и мгновенное значение тока для любой k -й гармоники:

$$z_k = \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2};$$

$$i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k),$$

где

$$I_{km} = \frac{E_{km}}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R}.$$

Таким образом находим общий ток

$$i = i_1 + i_3 + \dots + i_n + \dots$$

Чтобы начертить кривую тока, надо вычислить и построить гармоники тока, и затем по точкам построить кривую, ординаты которой равны алгебраической сумме ординат этих гармоник.

Пример 9,4. В качестве примера построим кривую тока в цепи, в которой действует э. д. с., меняющаяся согласно кривой фиг. 9, 12 при масштабе ординат $m = 10 \text{ V/mm}$. Пусть цепь состоит из последовательно соединенных сопротивления $R = 2 \text{ }\Omega$, индуктивности $L = 1 \text{ мН}$ и конденсатора емкостью $C = 1000 \text{ }\mu\text{F}$. При вычислениях и построениях ограничимся только первой, третьей и пятой гармониками.

В § 9,7 мы разложили эту кривую и наши амплитуды и фазы первых трех гармоник. Выражая амплитуды в вольтах, имеем:

$$\begin{aligned} E_{1m} &= 311,5 \text{ V}; & \psi_1 &= 14^\circ 30'; \\ E_{3m} &= 64,2 \text{ V}; & \psi_3 &= -60^\circ; \\ E_{5m} &= 7,6 \text{ V}; & \psi_5 &= -26^\circ 30'. \end{aligned}$$

Вычислим теперь амплитуды и фазы токов первых трех гармоник:

$$I_{1m} = \frac{E_{1m}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{311,5}{\sqrt{2^2 + \left(314 \cdot 0,001 - \frac{10^6}{314 \cdot 1000}\right)^2}} = 91 \text{ A};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{314 \cdot 0,001 - \frac{10^6}{314 \cdot 1000}}{2} = -1,43; \quad \varphi_1 = -55^\circ;$$

$$I_{3m} = \frac{E_{3m}}{\sqrt{R^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2}} = \frac{64,2}{\sqrt{2^2 + \left(3 \cdot 314 \cdot 0,001 - \frac{10^6}{3 \cdot 314 \cdot 1000}\right)^2}} = 31,4 \text{ A};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{3\omega L - \frac{1}{3\omega C}}{R} = \frac{3 \cdot 314 \cdot 0,001 - \frac{10^6}{3 \cdot 314 \cdot 1000}}{2} = -0,059; \quad \varphi_3 = -3^\circ 30';$$

$$I_{5m} = \frac{E_{5m}}{\sqrt{R^2 + \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right)^2}} = \frac{7,6}{\sqrt{2^2 + \left(5 \cdot 314 \cdot 0,001 - \frac{10^6}{5 \cdot 314 \cdot 1000}\right)^2}} = 3,3 \text{ A};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_5 = \frac{5\omega L - \frac{1}{5\omega C}}{R} = \frac{5 \cdot 314 \cdot 0,001 - \frac{10^6}{5 \cdot 314 \cdot 1000}}{2} = 0,60;$$

$$\varphi_5 = 31^\circ.$$

Зная углы $\psi_1, \psi_3, \psi_5, \varphi_1, \varphi_3$ и φ_5 , мы можем определить начальные фазы первых трех гармоник тока, считая за начало отсчета момент прохождения через нуль заданной кривой напряжения.

Фаза первой гармоники тока будет $\psi_1 - \varphi_1 = 14^\circ 30' + 55^\circ = 69^\circ 30'$. Фаза третьей гармоники тока будет



Фиг. 9,19.

$$\psi_3 - \varphi_3 = -60^\circ + 3^\circ 30' = -56^\circ 30'.$$

Фаза пятой гармоники тока будет

$$\psi_5 - \varphi_5 = -26^\circ 30' - 31^\circ = -57^\circ 30'.$$

На фиг. 9,19 построены гармоники i_1, i_3, i_5 и их сумма. Там же построена кривая e . Как видно из фиг. 9,19, кривая тока i не похожа на кривую э. д. с. Объясняется это тем, что активное и реактивное сопротивления у разных гармоник находятся в разных соотношениях, вслед-

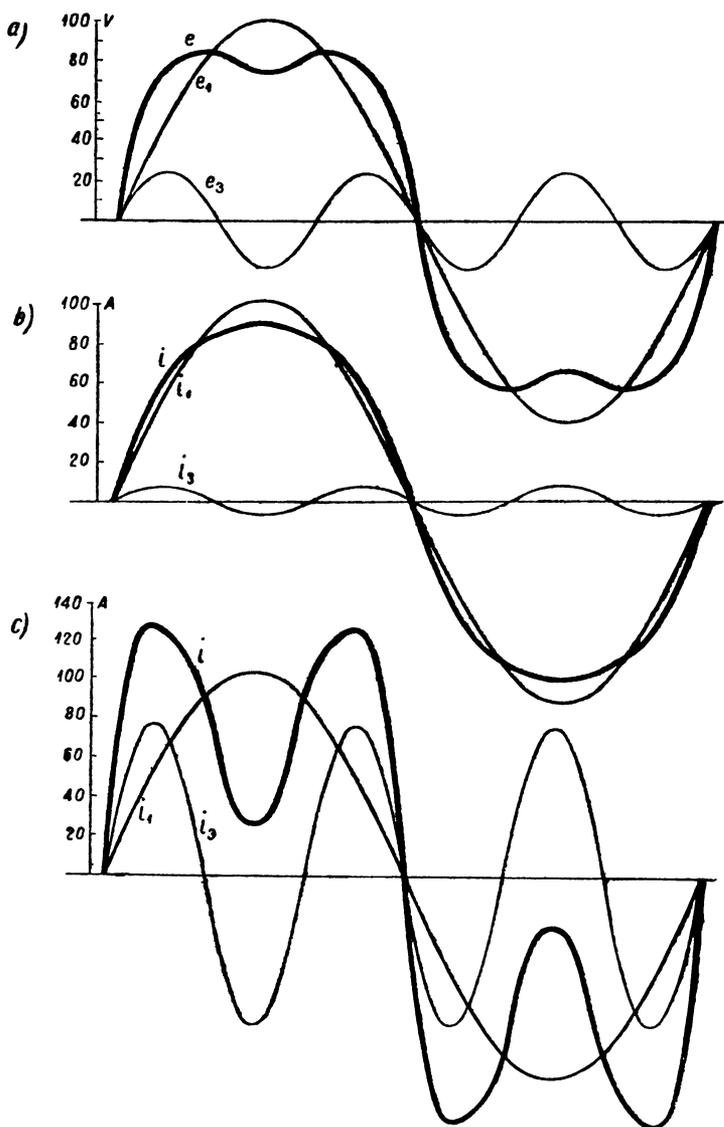
ствие чего, с одной стороны, амплитуды синусоид тока непропорциональны амплитудам синусоид тех же гармоник э. д. с. и, с другой стороны, фазы гармоник тока относительно заданной кривой иные, чем фазы тех же гармоник э. д. с. относительно той же кривой.

9, 11. Влияние индуктивности и емкости цепи на форму кривой тока

Разберем подробнее взаимоотношение между формами кривых тока и э. д. с. для разных цепей.

а) Цепь содержит только активное сопротивление. В этом случае кажущееся сопротивление для всех гармоник одинаково, если пренебречь поверхностным эффектом (см. гл. 5). Следовательно, амплитуды синусоид тока разных гармоник изменяются пропорционально амплитудам соответствующих гармоник э. д. с. Кроме того, все гармоники тока совпадают по фазе с соответствующими гармониками э. д. с. Вследствие этого кривые тока и э. д. с., равные каждая сумме подобных и совпадающих по фазе синусоид, тоже подобны между собой.

б) Цепь содержит одну только индуктивность. Реактивное сопротивление для k -й гармоники $X_k = k\omega L = kX_1$ возрастает пропорционально порядку гармоники, и чем порядок гармоники выше, тем сопротивление для этой гармоники больше. Следовательно, амплитуды гармоник тока убывают быстрее, чем амплитуды соответствующих гармоник э. д. с. Поэтому форма кривой тока ближе к синусоиду, чем форма кривой э. д. с. На фиг. 9, 20, а показана кривая э. д. с., содержащая синусоиду первого порядка с амплитудой $E_{1m} = 100$ В и синусоиду третьего порядка с ампли-



Фиг. 9, 20.

тудой $E_{3m} = 25 \text{ V}$. При $\omega L = 1 \text{ }\Omega$ кривая тока фиг. 9, 20, *b* изобразится суммой двух синусоид с амплитудами

$$I_{1m} = \frac{E_{1m}}{\omega L} = \frac{100}{1} = 100 \text{ A}; \quad I_{3m} = \frac{E_{3m}}{3\omega L} = \frac{25}{3} \text{ A}.$$

Как видно из фиг. 9, 20, *a* и *b*, суммарная кривая тока *i* ближе к синусоиде, чем суммарная кривая э. д. с. *e*.

с) Цепь содержит одну только емкость. Реактивное сопротивление для *k*-й гармоники $X_k = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_1}{k}$ убывает пропорционально порядку гармоники, и чем выше порядок гармоники, тем сопротивление меньше. Поэтому форма кривой тока больше отстает от синусоиды, чем форма кривой э. д. с. На фиг. 9, 20, *c* представлена кривая тока в цепи с такой же э. д. с., как в предыдущем примере, но с чистой емкостью, дающей реактивное сопротивление для основной частоты

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 1 \text{ }\Omega.$$

9, 12. Резонанс высших гармоник

Если для какой-нибудь из гармоник индуктивное и емкостное сопротивления равны, т. е. если

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C},$$

то для этой гармоники имеет место резонанс, благодаря чему при небольшой величине активного сопротивления *R* соответствующая гармоника тока может иметь очень большую величину сравнительно с другими гармониками тока. Напряжения на зажимах индуктивности или емкости могут тоже стать очень большими сравнительно с э. д. с., действующей в цепи.

На этом свойстве основано выделение высших гармоник при помощи резонанса.

9, 13. Эффективные значения несинусоидальных токов и напряжений

Предварительно найдем величину следующего интеграла, который встретится нам в дальнейшем изложении:

$$M = \int_0^T \sin(m\omega t + \alpha) \sin(n\omega t + \beta) dt.$$

Найдем *M* в предположении, что *m* и *n*—целые числа, не равные нулю.

Согласно тригонометрическим формулам, приведенным в § 9, 3, имеем

$$\begin{aligned} M &= \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(m\omega t + \alpha - n\omega t - \beta) - \cos(m\omega t + \alpha + n\omega t + \beta)] dt = \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos[(m-n)\omega t + (\alpha - \beta)] - \cos[(m+n)\omega t + (\alpha + \beta)] \} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(m-n)\omega t + (\alpha - \beta)] dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos[(m+n)\omega t + (\alpha + \beta)] dt. \end{aligned}$$

При $m \neq n$ оба эти интеграла превращаются в нуль.
 При $m = n$ первый интеграл превращается в

$$\frac{1}{2} \int_0^T \cos(\alpha - \beta) dt = \frac{T}{2} \cos(\alpha - \beta),$$

а второй попрежнему равен нулю.

Таким образом при $m \neq n$ $M = 0$, а при $m = n$

$$M = \frac{T}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

В частности, при $m = n$ и $\alpha = \beta$ $M = \frac{T}{2}$.

Переходим к определению эффективных значений несинусоидальных токов и напряжений. Эффективное значение тока любой формы равно такому постоянному току I , который за время, равное одному или нескольким периодам переменного тока, выделяет в данной цепи столько же энергии, как и переменный ток, меняющийся по закону, определяемому данной кривой: $i = f(t)$.

Зависимость между I и i может быть выражена уравнением

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt,$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \tag{9,20}$$

Разлагая периодический ток i в ряд:

$$i = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots \\ \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k),$$

получаем, что

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k)]^2 dt}.$$

При возведении в квадрат многочлена, стоящего в квадратных скобках, мы получим многочлен, содержащий сумму квадратов всех членов плюс удвоенные произведения каждого из членов на все последующие.

Таким образом мы получим члены вида

$$\int_0^T I_{nm}^2 \sin^2(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) dt,$$

где n имеет все целые значения от 1 до k , а также члены вида

$$\int_0^T 2I_{lm} I_{nm} \sin(l\omega t + \psi_l - \varphi_l) \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) dt.$$

По изложенному

$$\int_0^T I_{nm}^2 \sin^2(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) dt = \frac{T}{2} I_{nm}^2; \\ \int_0^T 2I_{lm} I_{nm} \sin(l\omega t + \psi_l - \varphi_l) \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) dt = 0,$$

так как

$$l \neq n.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} I_{1m}^2 + \frac{T}{2} I_{3m}^2 + \dots + \frac{T}{2} I_{km}^2 \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} I_{1m}^2 + \frac{1}{2} I_{3m}^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{km}^2}. \end{aligned}$$

Заменяя $\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}$ через I_1 — эффективное значение первой гармоники $\frac{I_{3m}}{\sqrt{2}}$ через I_3 , $\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}$ через I_k , получаем, что

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + \dots + I_k^2}. \quad (9, 21)$$

Подобным же образом находим эффективные значения напряжения U :

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + \dots + U_k^2}, \quad (9, 22)$$

где U_1, U_3, \dots, U_k — эффективные значения первой, третьей и k -й гармоник напряжения:

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}; \quad U_3 = \frac{U_{3m}}{\sqrt{2}}; \quad \dots; \quad U_k = \frac{U_{km}}{\sqrt{2}}.$$

Эффективное значение периодической кривой любой формы можно найти и не прибегая к разложению ее в гармонический ряд.

Для этого преобразуем несколько формулу (9, 20), определяющую эффективное значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Разделим и умножим подкоренное выражение на ω :

$$I = \sqrt{\frac{1}{\omega T} \int_0^T i^2 \omega dt}.$$

Введем множитель ω под знак дифференциала и в связи с этим изменим верхний предел интеграла:

$$I = \sqrt{\frac{1}{\omega T} \int_0^{\omega T} i^2 d\omega t}.$$

Заменяем ωt через α , тогда $\omega T = 2\pi$;

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d\alpha}.$$

Последняя формула показывает, что для нахождения I надо построить кривую i^2 , ординаты которой равны квадратам ординат данной кривой, причем для удобства размещения на чертеже можно для квадратичных величин принять любой новый масштаб, затем надо найти среднее значение

ние этой квадратичной кривой за один период, т. е. разделить ее площадь на длину абсциссы, соответствующей одному периоду. Корень квадратный из найденного среднего значения квадратичной кривой есть иско- мое эффективное значение.

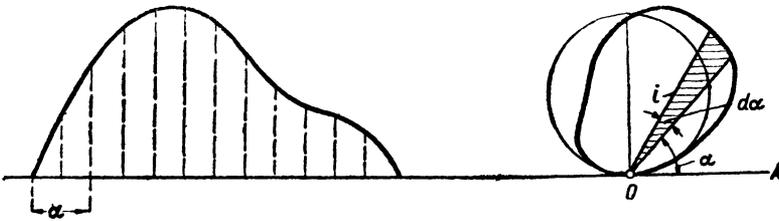
Если кривая симметрична, то можно ограничиться построением для половины периода.

Эффективное значение периодической кривой, симметричной отно- сительно горизонтальной оси, можно найти еще проще по методу Фле- минга.

Этот метод состоит в следующем:

Заданную кривую $i=f(\alpha)$ строим в полярных координатах (фиг. 9, 21).

Для этого выбираем начало координат O и полярную ось OA . На радиусах-векторах, проведенных под углом α к OA , откладываем, начиная



Фиг. 9, 21.

от точки O , соответствующие значения i . Кривая, соответствующая пер- вой половине периода, от $\alpha=0$ до $\alpha=\pi$ будет замкнутой фигурой, рас- положенной над осью OA . Площадь заштрихованного элемента этой фигуры

$$dS = \frac{1}{2} i^2 d\alpha,$$

а площадь всей фигуры

$$S = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} i^2 d\alpha.$$

Построим круг, равновеликий полученной фигуре. Диаметр круга D определится из уравнения

$$\frac{1}{4} \pi D^2 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} i^2 d\alpha,$$

откуда

$$D = \sqrt{\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} i^2 d\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i^2 d\alpha} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i^2 d\alpha}.$$

Согласно доказанному в предыдущем параграфе

$$\sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i^2 d\alpha}$$

для кривой, симметричной относительно горизонтальной оси, представляет собой эффективное значение тока i , на основании чего

$$D = I \sqrt{2} = I_m.$$

Следовательно, диаметр построенного таким образом круга представляет собой амплитуду синусоиды тока, имеющего такое же эффективное значение. Такая синусоида называется эквивалентной.

Таким же образом мы можем построить амплитуду эквивалентной синусоиды напряжения и по ней найти эффективное значение.

9,14. Мощность при несинусоидальном токе

Мощность при несинусоидальном токе определяется как среднее значение мощности за один период совершенно так же, как и для синусоидального тока:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt. \quad (9,23)$$

Подставляя вместо u и i их выражения в виде гармонического ряда:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots] \times \\ \times [I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots] \, dt.$$

После умножения многочленов, заключенных в квадратные скобки, и интегрирования их почленно мы получим двоякого вида интегралы: один от произведения синусоид одинаковой частоты вида

$$\int_0^T U_{km} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \, dt$$

и другие от произведения синусоид с различной частотой вида

$$\int_0^T U_{lm} I_{nm} \sin(l\omega t + \psi_l) \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) \, dt.$$

Согласно с выводами предыдущего параграфа

$$\int_0^T U_{km} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \, dt = U_{km} I_{km} \frac{T}{2} \cos \varphi_k;$$

$$\int_0^T U_{lm} I_{nm} \sin(l\omega t + \psi_l) \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n) \, dt = 0,$$

так как $l \neq n$.

Таким образом

$$P = \frac{1}{T} (U_{1m} I_{1m} \frac{T}{2} \cos \varphi_1 + U_{3m} I_{3m} \cos \varphi_3 + \dots) = \\ = \frac{U_{1m} I_{1m}}{2} \cos \varphi_1 + \frac{U_{3m} I_{3m}}{2} \cos \varphi_3.$$

Подставляя

$$U_{1m} = U_1 \sqrt{2}; \quad U_{3m} = U_3 \sqrt{2}; \quad \dots; \\ I_{1m} = I_1 \sqrt{2}; \quad I_{3m} = I_3 \sqrt{2}; \quad \dots,$$

получим

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots \quad (9,24)$$

Таким образом общая мощность (активная) при несинусоидальном токе равна сумме мощностей, соответствующих каждой из гармоник в отдельности.

Для любой гармоники

$$U_k \cos \varphi_k = I_k R.$$

Подставляя это выражение в уравнение (9, 24), получим

$$\begin{aligned} P &= I_1^2 R + I_3^2 R + \dots = (I_1^2 + I_3^2 + \dots) R = I^2 R = UI \frac{IR}{U} = \\ &= UI \sqrt{\frac{I^2 R^2}{U^2}} = UI \sqrt{\frac{(I_1^2 + I_3^2 + \dots) R^2}{U_1^2 + U_3^2 + \dots}} = UI \sqrt{\frac{I_1^2 R^2 + I_3^2 R^2 + \dots}{U_1^2 + U_3^2 + \dots}} = \\ &= UI \sqrt{\frac{U_1^2 \cos^2 \varphi_1 + U_3^2 \cos^2 \varphi_3 + \dots}{U_1^2 + U_3^2 + \dots}}. \end{aligned} \quad (9, 25)$$

Выражение, стоящее под знаком радикала, есть дробь, числитель и знаменатель которой содержит одинаковое число членов, каждый член числителя $U_k^2 \cos^2 \varphi_k$ вообще меньше соответствующего члена знаменателя, так как он имеет добавочный множитель $\cos^2 \varphi_k$. В частном случае при $\cos \varphi_k = 1$ соответствующие члены числителя и знаменателя равны между собой. Это имеет место для одной какой-нибудь k -й гармоники при резонансе, если $k\omega L = \frac{1}{k\omega C}$, или для всех гармоник, если в цепи имеется одно только активное сопротивление. В этом случае все гармоники тока совпадают по фазе с соответствующими гармониками напряжения и $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_3 = \dots = 1$. Таким образом величина радикала равна единице для цепи, в которой имеется только активное сопротивление, и меньше единицы для цепи, в которой имеется индуктивность или емкость или обе вместе. Во всяком случае величина радикала не больше единицы. Обозначим величину радикала через $\cos \varphi$, что мы можем сделать, так как он не больше единицы. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{\frac{U_1^2 \cos^2 \varphi_1 + U_3^2 \cos^2 \varphi_3 + \dots}{U_1^2 + U_3^2 + \dots}}; \\ P &= UI \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9, 26)$$

В этой формуле можно рассматривать угол φ как сдвиг фаз эквивалентных синусоид тока и напряжения.

Пример 9, 5. Определим эффективное значение э.д.с. и тока, мощность и коэффициент мощности для цепи, данные которой приведены в примере 9,4:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{\left(\frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{3m}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{5m}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2} (311,5^2 + 64,2^2 + 7,6^2)} = 225 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{\frac{1}{2} (I_{1m}^2 + I_{3m}^2 + I_{5m}^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (91^2 + 31,4^2 + 3,3^2)} = 68,1 \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 = \frac{1}{2} (U_{1m} I_{1m} \cos \varphi_1 + U_{3m} I_{3m} \cos \varphi_3 + \\ &+ U_{5m} I_{5m} \cos \varphi_5) = \frac{1}{2} [311,5 \cdot 91 \cdot \cos(55^\circ) + 64,2 \cdot 31,4 \cdot \cos(-3^\circ 30') + \\ &+ 7,6 \cdot 3,3 \cdot \cos(31^\circ)] = \frac{1}{2} (16\,500 + 2\,010 + 20) = 9\,265 \text{ Вт}; \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{9\,265}{225 \cdot 68,1} = 0,606.$$

9,15. Измерение активного сопротивления, индуктивности и емкости

В цепях с синусоидальными кривыми напряжения и тока можно вычислить активное сопротивление, индуктивность и емкость на основании измерения напряжения, тока и мощности.

При несинусоидальных кривых вычисление этих величин имеет свои особенности.

Разберем отдельно вопрос для R , C и L .

а) Активное сопротивление. Вследствие поверхностного эффекта (гл. 10) активное сопротивление провода при переменном токе больше, чем при постоянном токе, так как не вся площадь сечения равномерно используется. Чем выше частота, тем больше влияние поверхностного эффекта. Для высших гармоник, частота которых больше, активное сопротивление возрастает. Следовательно, в результате действия всех гармоник активное сопротивление, вычисленное по формуле $R = \frac{P}{I^2}$, будет иметь значение большее, чем при синусоидальном токе той же частоты, и большее, чем при постоянном токе.

б) Индуктивность. Если внешняя цепь состоит из одной только индуктивности L с весьма малым активным сопротивлением, которым можно пренебречь, то, включив в эту цепь чисто синусоидальное напряжение и измерив напряжение U и ток I , мы можем вычислить реактивное сопротивление X_L и индуктивность L по формулам

$$X_L = \omega L = \frac{U}{I} \quad \text{и} \quad L = \frac{U}{\omega I}. \quad (9, 27)$$

Но если бы мы захотели, пользуясь этой же формулой, вычислить индуктивность в случае, когда напряжение несинусоидально, мы получили бы для L значение, большее действительного.

В самом деле, эффективное значение напряжения при несинусоидальной кривой составляет

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}$$

Ток в случае цепи с одной только индуктивностью составляет

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots} = \sqrt{\frac{U_1^2}{\omega^2 L^2} + \frac{U_3^2}{9\omega^2 L^2} + \frac{U_5^2}{25\omega^2 L^2} + \dots} = \\ &= \frac{1}{\omega L} \sqrt{U_1^2 + \frac{U_3^2}{9} + \frac{U_5^2}{25} + \dots}, \end{aligned}$$

откуда

$$L = \frac{1}{\omega I} \sqrt{U_1^2 + \frac{U_3^2}{9} + \frac{U_5^2}{25} + \dots} < \frac{1}{\omega I} \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots} = \frac{U}{\omega I} \quad (9, 28)$$

Следовательно, величина индуктивности, вычисленная по уравнению (9, 27), больше действительной.

с) Емкость. Включив цепь, состоящую из одной только емкости на чисто синусоидальное напряжение и измерив напряжение U и ток I , мы можем вычислить реактивное сопротивление и емкость по формуле

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I} \quad \text{и} \quad C = \frac{I}{\omega U}. \quad (9, 29)$$

Но если бы мы захотели, пользуясь этой же формулой, вычислить емкость в случае, когда напряжение несинусоидально, мы получили бы для C значение, большее действительного.

В самом деле, эффективное значение напряжения при несинусоидальной кривой составляет

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}$$

Ток в случае цепи с одной только емкостью составляет

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \dots} = \sqrt{\omega^2 C^2 U_1^2 + 9\omega^2 C^2 U_3^2 + 25\omega^2 C^2 U_5^2 + \dots} = \omega C \sqrt{U_1^2 + 9U_3^2 + 25U_5^2 + \dots}$$

Следовательно,

$$C = \frac{I}{\omega \sqrt{U_1^2 + 9U_3^2 + 25U_5^2 + \dots}} < \frac{I}{\omega \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}} = \frac{I}{\omega U}. \quad (9, 30)$$

Надо заметить, что если мы примем, не учтя наличия высших гармоник,

$$L = \frac{U}{\omega I} \text{ и } C = \frac{I}{\omega U},$$

мы в первом случае сделаем значительно меньшую ошибку, чем во втором.

9.16. Коэффициент формы кривой

В гл. 4 выведена следующая формула для цепи с синусоидальной э. д. с.:

$$E = 4kfw\Phi_m,$$

где E — эффективное значение э. д. с.;

f — частота;

w — число витков;

Φ_m — максимальное значение потока;

k — коэффициент формы, который для синусоидальной э. д. с. равняется отношению эффективного значения э. д. с. к среднему:

$$k = \frac{E}{E_{cp}}.$$

Докажем, что эти формулы справедливы для цепи с любой периодической э. д. с., симметричной относительно горизонтальной оси.

В гл. 3 была выведена формула для мгновенного значения э. д. с., наводимой в катушке при изменении пронизывающего ее магнитного потока:

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ вольт.}$$

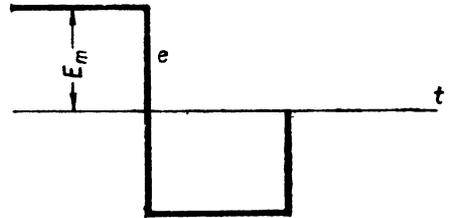
Допустим, что изменение e задано нам в виде периодической кривой, симметричной относительно горизонтальной оси. Найдем закон изменения Φ :

$$d\Phi = -\frac{10^8}{w} e dt.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\Phi = \text{const} - \frac{10^8}{w} \int e dt.$$

Последнее уравнение показывает, что в первом полупериоде, когда e положительно, поток убывает пропорционально площади, заключенной между кривой и осью. Наибольшее значение поток имеет в начале, а наименьшее в конце первого полупериода, так как во втором полупе-



Фиг. 9, 22.

риоде e отрицательно и поток возрастает. Вследствие симметричности e относительно горизонтальной оси поток за вторую половину периода увеличивается настолько же, насколько он уменьшился за первую половину периода. Следовательно, он к концу целого периода приобретает то же значение, которое он имел в начале периода. Впоследствии в главе о нестационарных явлениях будет показано, что при установившемся режиме, т. е. спустя некоторое время после включения (в большинстве случаев спустя долю секунды) поток будет симметричен относительно горизонтальной оси. Отсюда следует, что значения потока в начале и конце первого полупериода равны по величине и противоположны по знаку. Если наибольшее положительное значение потока в начале периода будет Φ_m , то в конце первого полупериода оно будет $-\Phi_m$. Решая уравнение

$$\Phi = \text{const} - \frac{10^8}{\omega} \int e dt$$

для момента $t=0$, получим

$$\Phi_m = \text{const}.$$

Решая это же уравнение для момента $t = \frac{T}{2}$, получим

$$-\Phi_m = \text{const} - \frac{10^8}{\omega} \int_0^{\frac{T}{2}} e dt = \Phi_m - \frac{10^8}{\omega} \int_0^{\frac{T}{2}} e dt,$$

или

$$2\Phi_m = \frac{10^8}{\omega} \int_0^{\frac{T}{2}} e dt.$$

Выражение $\int_0^{\frac{T}{2}} e dt$ есть площадь, ограниченная кривой за полупериод.

Если мы эту площадь разделим на ее основание $\frac{T}{2}$, то мы получим среднее значение e за полупериода E_{cp} :

$$\frac{\int_0^{\frac{T}{2}} e dt}{\frac{T}{2}} = E_{cp};$$

$$\int_0^{\frac{T}{2}} e dt = \frac{T}{2} E_{cp};$$

$$2\Phi_m = \frac{10^8}{\omega} \cdot \frac{T}{2} \cdot E_{cp},$$

откуда

$$E_{cp} = \frac{4\omega}{T} \Phi_m = 4\omega f \Phi_m,$$

где $f = \frac{1}{T}$ есть число периодов в секунду.

Обозначим и здесь, как в гл. 4, отношение эффективного значения E к среднему значению E_{cp} через коэффициент формы:

$$\frac{E}{E_{cp}} = k,$$

откуда

$$E = E_{cp} \cdot k$$

и

$$E = 4k\omega\Phi_m.$$

Для синусоидальных э. д. с. мы нашли в гл. 4.

$$k = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Найдем k для других периодических кривых, причем ограничимся только кривыми, симметричными относительно горизонтальной и вертикальной осей. Для таких кривых мы можем вычислить E и E_{cp} как среднеквадратичное и среднее значения за первую четверть периода:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e^2 dt};$$

$$E_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e dt;$$

$$k = \frac{E}{E_{cp}} = \frac{\sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e^2 dt}}{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e dt}.$$

Пример 9,6. Вычислить k для кривой э. д. с., имеющей:

а) Прямоугольную форму (фиг. 9,22).

В течение первой четверти периода $e = E_m$.

$$E = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} E_m^2 dt} = E_m;$$

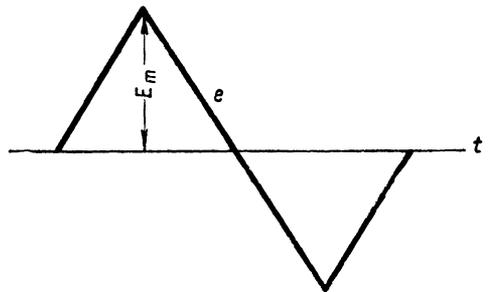
$$E_{cp} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} E_m dt = E_m;$$

$$k = \frac{E}{E_{cp}} = \frac{E_m}{E_m} = 1.$$

б) Форму равнобедренного треугольника (фиг. 9,23).

В течение первой четверти периода

$$e = E_m \frac{t}{\frac{T}{4}} = \frac{4E_m}{T} t;$$



Фиг. 9,23.

$$E = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{16E_m^2}{T^2} t^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{T} \left[\frac{16E_m^2}{T^2} \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{\frac{T}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{T} \frac{16E_m^2}{T^2} \frac{T^3}{64 \cdot 3}} = \frac{E_m}{\sqrt{3}};$$

$$E_{cp} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} e dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4E_m}{T} t dt = \frac{4}{T} \left[\frac{4E_m}{T} \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{\frac{T}{4}} =$$

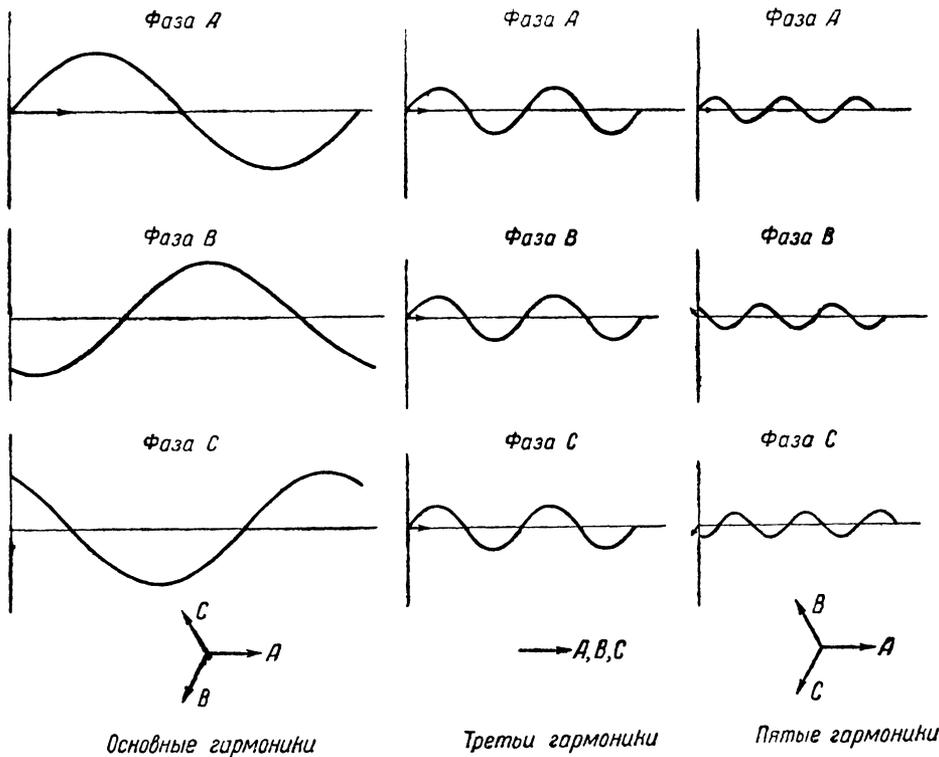
$$= \frac{4}{T} \frac{4E_m}{T} \frac{T^2}{16 \cdot 2} = \frac{E_m}{2};$$

$$k = \frac{E}{E_{cp}} = \frac{E_m}{\sqrt{3}} : \frac{E_m}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15.$$

Сравнивая полученные результаты, мы видим, что для кривой прямоугольной формы $k=1$, для более острых кривых k больше единицы и, чем кривая острее, тем k больше.

9.17. Высшие гармоники в трехфазной системе

Все выводы в главе о трехфазном токе сделаны в предположении, что э.д.с. имеет чисто синусоидальную форму. При форме кривой, отступающей от синусоиды, не все выводы этой главы справедливы.



Фиг. 9, 24.

Пусть в трехфазной симметричной системе с равномерной нагрузкой действующая э.д.с. имеет сложную форму кривой. Разложим ее в ряд

Фурье и рассмотрим явления, происходящие в цепи, для каждой из составляющих гармоник в отдельности.

На фиг. 9, 24 изображены составляющие э. д. с. всех трех фаз основной или первой гармоники, третьей гармоники и пятой гармоники. Электродвижущая сила второй фазы сдвинута относительно э. д. с. первой фазы на одну треть периода, т. е. на $\frac{T}{3}$. На ту же часть периода сдвинуты и все гармоники. Следовательно, основные гармоники образуют нормальную трехфазную систему.

Период третьей гармоники $T_3 = \frac{1}{3} T$, следовательно, третья гармоника второй фазы сдвинута на целый период относительно третьей гармоники первой фазы. Но сдвиг фаз на целый период равносильен отсутствию сдвига. Поэтому третьи гармоники во всех трех фазах совпадают — они образуют систему нулевой последовательности.

Период пятой гармоники $T_5 = \frac{1}{5} T$. Сдвиг на $\frac{1}{3} T$ равносильен сдвигу на $\frac{5}{3} T_5$. Следовательно, пятая гармоника второй фазы отстает от пятой гармоники первой фазы на $\frac{5}{3} T_5$ или опережает ее на $\frac{1}{3} T_5$. Аналогично находим, что пятая гармоника третьей фазы опережает пятую гармонику второй фазы на $\frac{1}{3} T_5$.

Пятые гармоники образуют систему обратной последовательности фаз.

В самом деле, имеем следующие аналитические выражения мгновенных значений э. д. с. для трех фаз первой гармоники:

$$\begin{aligned} e_{1A} &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \\ e_{1B} &= E_{1m} \sin\left[\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \psi_1\right] = E_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{\omega T}{3} + \psi_1\right) = \\ &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - 120^\circ); \\ e_{1C} &= E_{1m} \sin\left[\omega\left(t - \frac{2T}{3}\right) + \psi_1\right] = E_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{2\omega T}{3} + \psi_1\right) = \\ &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - 240^\circ). \end{aligned}$$

Для трех фаз третьей гармоники:

$$\begin{aligned} e_{3A} &= E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3); \\ e_{3B} &= E_{3m} \sin\left[3\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \psi_3\right] = E_{3m} \sin(3\omega t - \omega T + \psi_3) = \\ &= E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - 360^\circ) = E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) = e_{3A}; \\ e_{3C} &= E_{3m} \sin\left[3\omega\left(t - \frac{2T}{3}\right) + \psi_3\right] = E_{3m} \sin(3\omega t - 2\omega T + \psi_3) = \\ &= E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - 720^\circ) = E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) = e_{3A}. \end{aligned}$$

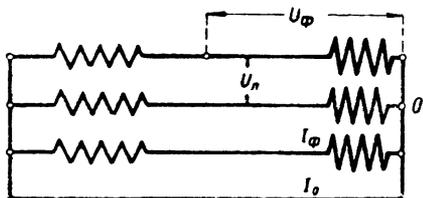
Для трех фаз пятой гармоники:

$$\begin{aligned} e_{5A} &= E_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5); \\ e_{5B} &= E_{5m} \sin\left[5\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \psi_5\right] = E_{5m} \sin\left(5\omega t - \frac{5\omega T}{3} + \psi_5\right) = \\ &= E_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5 - 600^\circ) = E_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5 + 120^\circ); \\ e_{5C} &= E_{5m} \sin\left[5\omega\left(t - \frac{2T}{3}\right) + \psi_5\right] = E_{5m} \sin\left(5\omega t - \frac{10\omega T}{3} + \psi_5\right) = \\ &= E_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5 + 1200^\circ) = E_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5 + 240^\circ). \end{aligned}$$

Эти результаты наглядно иллюстрируются кривыми и векторными диаграммами фиг. 9, 24.

Важно заметить, что скорость вращения векторов для разных гармоник — разная: для первой гармоники она равна ω , для третьей гармоники 3ω , для пятой гармоники 5ω и т. д.

Для того чтобы легче разобраться в тех явлениях, которые имеют место в трехфазной системе при несинусоидальном напряжении, разберем предварительно явления, происходящие в системе нулевой последовательности (э. д. с. всех трех фаз совпадают) для трех случаев соединения: звездой без четвертого провода, звездой с четвертым проводом и треугольником. Во всех трех случаях предполагаем, что генератор и приемник соединены одинаково, т. е. оба звездой или оба треугольником. Случаи смешанных соединений учавшийся легко разберет сам.



Фиг. 9, 25.

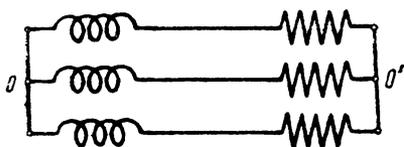
а) Соединение звездой с четвертым проводом (фиг. 9, 25). В отличие от обычной трехфазной системы здесь геометрическая сумма трех фазовых токов равна не нулю, а арифметической их сумме или утроенной величине каждого из них. Этот ток и пойдет по четвертому проводу:

$$I_0 = 3I_\phi.$$

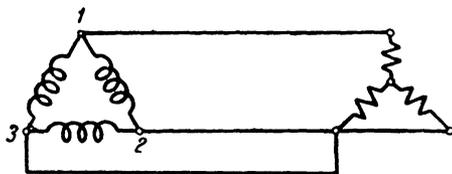
Линейное напряжение равно не $U_\phi \sqrt{3}$, а нулю, так как оно составляет разность двух одинаковых совпадающих по фазе напряжений:

$$\dot{U}_A - \dot{U}_B = 0.$$

б) Соединение звездой без четвертого провода (фиг. 9, 26). Токи во всех трех фазах равны нулю, так как мы имеем



Фиг. 9, 26.



Фиг. 9, 27.

здесь три одинаковых источника, включенных параллельно при разомкнутой внешней цепи. Фазные напряжения на зажимах приемника равны нулю, так как в сопротивлениях нагрузки нет тока.

Напряжение между нейтральной точкой генераторов и нейтральной точкой приемника O' равно э. д. с. каждой фазы.

Мощность равна нулю, так как тока в цепи нет.

с) Соединение обмоток генератора треугольником (фиг. 9, 27). Сумма э. д. с., действующих в замкнутом контуре 1-2-3, равна не нулю, а утроенной величине э. д. с. каждой из обмоток, так как все они совпадают по фазе и равны между собой.

В замкнутой внутренней цепи треугольника 1-2-3 пойдет при разомкнутой внешней цепи ток $I_0 = \frac{3U}{3Z} = \frac{U}{Z}$, где Z — кажущееся сопротивление одной фазы генератора. Ток будет такой же, как если бы каждая из фаз в отдельности была коротко замкнута на себя.

Напряжение на зажимах равно нулю, так как вся э. д. с. целиком поглощается внутренним падением напряжения: $U_\phi = U_n = 0$.

Ток во внешней цепи равен нулю, так как на зажимах внешней цепи нет никакого напряжения: $I_\phi = I_n = 0$.

Мощность во внешней цепи равна нулю.

Теперь мы можем вернуться к решению поставленного выше вопроса о том, каковы будут явления в симметричной трехфазной системе при несинусоидальной э. д. с.

После разложения э. д. с. на гармоники и нахождения токов каждой гармоники надо по принципу наложения отдельно сложить действие гармоник, кратных трем, и отдельно остальных гармоник. Тогда получатся следующие результаты:

а) Соединение звездой с четвертым проводом. Фазный ток I_ϕ , линейный ток I_n и фазное напряжение U_ϕ исчисляются так же, как для симметричной трехфазной системы, так как гармоники, кратные трем, дают такие же напряжения и токи, как и остальные гармоники. В линейном же напряжении гармоники, кратные трем, отсутствуют, и поэтому линейное напряжение будет

$$U_n = \sqrt{3} \sqrt{U_{1\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + \dots}$$

Так как фазное напряжение содержит все гармоники

$$U_\phi = \sqrt{U_{1\phi}^2 + U_{3\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + \dots},$$

то отношение $U_n : U_\phi$ меньше $\sqrt{3}$.

Дальнейшее отличие состоит в том, что все токи гармоник, кратных трем, возвращаются по четвертому проводу, и поэтому ток в четвертом проводе

$$I_0 = 3 \sqrt{I_{3\phi}^2 + I_{9\phi}^2 + \dots}$$

Так как для гармоник, кратных трем, соотношение $U_n = U_\phi \sqrt{3}$ не имеет места, то мощность нельзя вычислять по формуле $P = UI \sqrt{3} \cos \varphi$, где под U и I подразумеваются линейные напряжения и ток. Мощность третьих гармоник надо вычислять по формуле $P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi$. Применив и для остальных гармоник эту же формулу, получим

$$P = 3(U_{1\phi} I_{1\phi} \cos \varphi_1 + U_{3\phi} I_{3\phi} \cos \varphi_3 + U_{5\phi} I_{5\phi} \cos \varphi_5 + \dots).$$

б) Соединение звездой без четвертого провода. При этом соединении гармоники, кратные трем, отсутствуют в фазном и линейном токах, в фазном и линейном напряжениях и не дают мощности.

Соответствующие суммарные величины будут:

$$I_\phi = \sqrt{I_{1\phi}^2 + I_{5\phi}^2 + \dots};$$

$$I_n = I_\phi;$$

$$U_\phi = \sqrt{U_{1\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + \dots} \quad (\text{для потребителя});$$

$$U_\phi = \sqrt{U_{1\phi}^2 + U_{3\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + \dots} \quad (\text{для генератора});$$

$$U_n = \sqrt{3} \sqrt{U_{1\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + \dots} = \sqrt{3} U_\phi;$$

$$P = \sqrt{3} (U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 + \dots);$$

$$U_0 = \sqrt{U_{3\phi}^2 + U_{9\phi}^2 + \dots} \quad (\text{напряжение между нейтралями}).$$

в) Соединение треугольником.

Здесь тоже отсутствуют гармоники, кратные трем, в фазном (у приемника) и линейном токах, в фазном и линейном напряжениях и не дают мощности во внешней цепи. Зато гармоники э. д. с. кратные трем, дают ток во внутренней цепи генератора I_a .

Рассуждая попрежнему, получим

$$\begin{aligned} I_\phi &= \sqrt{I_{1\phi}^2 + I_{5\phi}^2 + \dots} \quad (\text{в фазе приемника}); \\ I_a &= \sqrt{3} \sqrt{I_{1\phi}^2 + I_{5\phi}^2 + \dots} = \sqrt{3} I_\phi; \\ U_\phi &= \sqrt{U_{1\phi}^2 + U_{5\phi}^2 + \dots}; \\ U_a &= U_\phi; \\ P &= \sqrt{3} (U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 + \dots); \\ I_a &= \sqrt{\left(\frac{U_{3\phi}}{z_{3\phi}}\right)^2 + \left(\frac{U_{9\phi}}{z_{9\phi}}\right)^2 + \dots} \end{aligned}$$

Наличие высших гармоник и, в частности гармоник, кратных трем, во многих случаях оказывает неблагоприятное действие на электрическую установку. Перечислим вкратце некоторые из них:

а) Индукционное влияние линии передачи сильного тока на провода слабого тока (связи). Каждый из трех проводов трехфазной линии передачи при протекании в нем переменного тока создает в окружающем пространстве переменное магнитное поле. В близко расположенном проводе связи наводится переменная э. д. с., величина которой зависит от частоты, от тока и от расстояния между проводами сильного и слабого тока. Эта э. д. с. вызывает в проводах связи ток, который вообще мешает нормальной работе линии связи. При симметричном расположении провода связи относительно трех проводов линии передачи геометрическая сумма трех полей, создаваемая тремя токами, равна нулю для токов гармоник, не кратных трем, для токов же гармоник, кратных трем, результирующее поле равно арифметической сумме трех полей или утроенной величине поля, создаваемого током каждого провода. Следовательно, электромагнитное влияние токов гармоник, не кратных трем, равно нулю, а гармоник, кратных трем, имеет некоторую величину, отличную от нуля, и, следовательно, мешает нормальной работе линии связи. Токи третьих гармоник в линии передач могут протекать только в том случае, если нейтрали трансформаторов заземлены на обоих концах линии.

Если же нейтраль заземлена только на одном конце линии, нейтраль на другом конце оказывается под напряжением $U_0 = \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + \dots}$. При этом действие электрического поля проводов трехфазной системы может также оказывать мешающее влияние на провода связи, так как действие третьих гармоник во всех трех проводах линии передачи оказывается одинаковым (влияние электрического поля остальных гармоник взаимно компенсируется при симметричном расположении проводов линии передачи относительно линии связи).

в) Соединение генераторов треугольником. Если трехфазный генератор соединен треугольником, в обмотке его, даже при разомкнутой внешней цепи, будет проходить ток, вызванный гармониками э. д. с., кратными трем. Величина этого тока будет такова, как если бы каждая фаза генератора была коротко замкнута на себя. Правда, ток будет не очень велик, так как, с одной стороны, амплитуды этих гармоник э. д. с. не очень велики, с другой стороны, индуктивное сопротивление обмотки генератора для этих гармоник вследствие увеличения частоты возрастает.

ГЛАВА 10

ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА, СОДЕРЖАЩИЕ ЖЕЛЕЗО

10.1. Отличительные особенности цепей с железом

Цепью с железом мы называем такую электрическую цепь, магнитный поток которой полностью или частично замыкается через железо или иной ферромагнитный материал (фиг. 10, 1).

Общим случаем таких цепей являются цепи, включающие в себя обмотки электрических машин, трансформаторов и аппаратов, в магнитную систему которых входит железо, сталь, чугун или другие ферромагнитные материалы.

Цепи с железом обладают рядом особенностей по сравнению с индуктивными цепями, магнитный поток которых целиком замыкается через воздух (фиг. 10, 2)¹ или другую неферромагнитную среду. Эти особенности мы рассмотрим на примере реактивной катушки с железным сердечником, изображенной на фиг. 10, 1.

Первая особенность. При замыкании потока через железо нарушается прямая пропорциональность между потоком Φ и током, которая имеет место при замыкании магнитного потока через воздух (прямая *a* на фиг. 10, 3), так как зависимость между потоком Φ в железе и намагничивающим током определяется, как известно, кривой намагничения (кривая *b* на фиг. 10, 3).

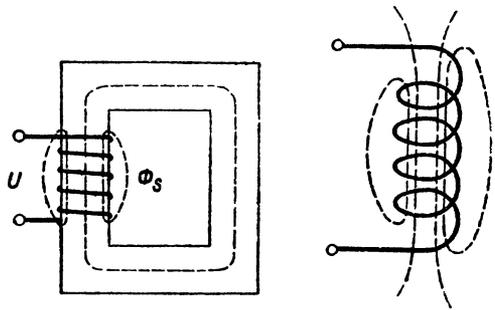
Нарушение прямолинейной зависимости Φ от i ведет прежде всего к тому, что индуктивность $L = \frac{\Psi}{i}$, которой мы раньше пользовались при расчете цепи переменного тока, перестает быть величиной постоянной (см. гл. 3).

Лишь в пределах приблизительно прямолинейной начальной части кривой намагничения L можно принять за постоянную величину.

В результате непостоянства L уравнение

$$u = iR + L \frac{di}{dt}, \quad (10, 1)$$

¹ Такие цепи были рассмотрены при изучении общих законов цепи переменного тока в гл. 4.



Фиг. 10, 1.

Фиг. 10, 2.

непосредственно связывающее напряжение с током, должно быть заменено уравнением

$$u = iR + \omega \frac{d\Phi}{dt} = iR + u', \tag{10,2}$$

в котором отсутствует индуктивность L , уступившая место магнитному потоку Φ или потокосцеплению $\omega\Phi$.

Точно так же в векторной диаграмме составляющая внешнего напряжения U , компенсирующая э. д. с. самоиндукции (фиг. 10,4) для цепей с железом, в общем случае не может быть подсчитана по формуле

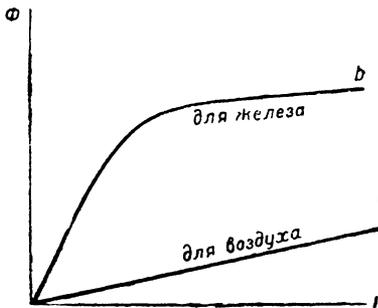
$$\dot{U}' = j\dot{\omega}\Phi,$$

как это делалось для цепей без железа. Промежуточной расчетной величиной и здесь должен явиться магнитный поток, через который индуцированная э. д. с. определяется при помощи уравнения

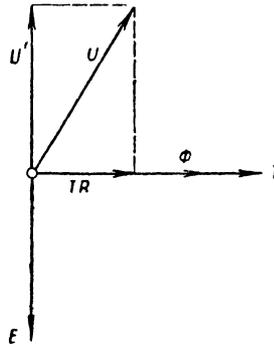
$$E = 4kf\omega\Phi_m.$$

Таким образом в силу нарушения пропорциональности между током и магнитным потоком последний является необходимой промежуточной расчетной величиной при исследовании цепей с железом, а в векторных диаграммах (фиг. 10,4) обычно даже исходным вектором при построении диаграммы.

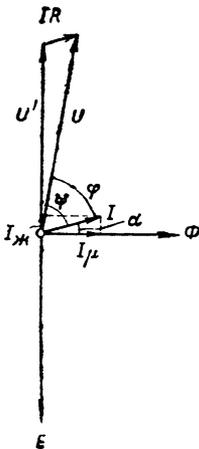
Вторая особенность. Замыкание потока через железо связано при переменном токе с затратой энергии, превращаемой в железе в тепло. Часть этой энергии тратится при перемагничивании железа



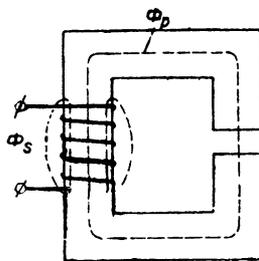
Фиг. 10, 3.



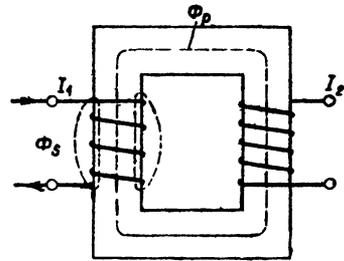
Фиг. 10, 4.



Фиг. 10, 5.



Фиг. 10, 6.

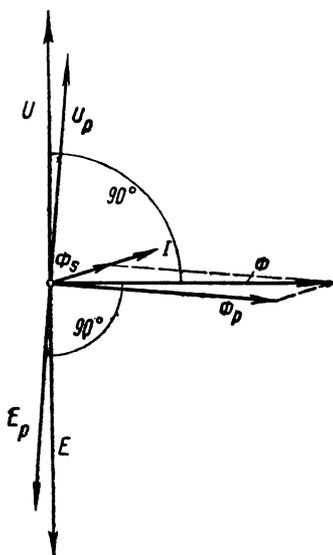


Фиг. 10, 7.

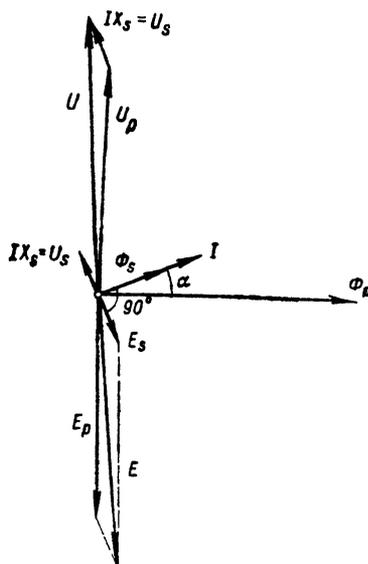
вследствие гистерезиса, другая — вследствие того, что переменный поток индуцирует в толще железа так называемые вихревые токи или токи Фуко (см. ниже).

Потери в железе ведут к тому, что ток, возбуждающий магнитный поток (ток возбуждения), оказывается сдвинутым по отношению к U' не на 90° , как это имело место для цепи без железа, а на угол ψ , меньший

90° (фиг. 10,5), так как в этом случае внешняя цепь должна доставлять мощность $P_{\text{жс}} = U'I \cos \psi$, превращаемую в железе в тепло. По отношению к потоку ток возбуждения оказывается сдвинутым на угол $\alpha = \frac{\pi}{2} - \psi$. Сдвиг тока по отношению к потоку дает формальные основания разложить вектор тока возбуждения на две составляющие: 1) активную $I_{\text{жс}}$, совпадающую по фазе с вектором напряжения U' (эта составляющая обусловлена потерями в железе), и 2) реактивную составляющую I_{μ} ,



Фиг. 10, 8.



Фиг. 10, 9.

совпадающую по фазе с потоком. I_{μ} называют составляющей намагничивания.

При наличии железного сердечника не весь поток, пронизывающий катушку, проходит через железо, всегда имеется известная часть магнитных линий, которые замыкаются через воздух (фиг. 10,6 и 10,7). Относительная величина этой части потока, называемой потоком рассеяния Φ_s ¹, зависит от величины магнитного сопротивления для потока, направляемого через сердечник и называемого главным или рабочим потоком Φ_p . Если магнитное сопротивление для рабочего потока велико, что имеет место: 1) при наличии воздушного зазора в магнитной системе (фиг. 10,6), 2) при большом насыщении железа рабочим потоком, то поток рассеяния Φ_s будет относительно больше, так как пути для потока рассеяния являются параллельными магнитным путям через железо. Точно так же отношение потока рассеяния к главному потоку возрастает при наличии на сердечнике второй катушки, ток которой создает противом. д. с.² (фиг. 10,7).

Так как почти вся м. д. с., затрачиваемая на создание потока рассеяния, приходится на путь потока в воздухе, то поток рассеяния принимается совпадающим по фазе с током возбуждения и, следовательно,

¹ Так как в качестве главного потока обычно рассматривается поток, проходящий по железу.

² Магнитодвижущая сила, т. е. обидие ампервитки.

расходится с рабочим потоком на тот же угол, на который вектор тока возбуждения расходится с вектором рабочего магнитного потока.

Общую э. д. с., индуктируемую в обмотке обоими потоками (рабочим потоком Φ_p и потоком рассеяния Φ_s), мы можем определить или геометрически, складывая потоки Φ_p и Φ_s и определяя э. д. с. по результирующему потоку Φ (фиг. 10, 8), или же определяя э. д. с., индуктируемые каждым потоком в отдельности, и затем геометрически складывая их (фиг. 10, 9),

$$\dot{E} = \dot{E}_p + \dot{E}_s,$$

где \dot{E}_p — э. д. с., индуктируемая рабочим потоком, а \dot{E}_s — э. д. с., индуктируемая потоком рассеяния.

Обычно пользуются вторым способом, так как он представляет следующие удобства:

1) не смешиваются между собой два потока, один из которых связан с потерями в железе, а другой Φ_s с ними не связан;

2) для подсчета э. д. с. рассеяния можно, как и в тех случаях, когда железо отсутствует, ввести в расчет индуктивность рассеяния

$$L_s = \frac{\Sigma w \Phi_s}{i},$$

равную отношению потокосцепления потока рассеяния к току.

На векторных диаграммах обычно вместо вектора E_s наносят сразу противоположный ему вектор индуктивного падения напряжения

$$\dot{U}_s = j i \omega L_s = j i X_s.$$

В реактивных катушках с замкнутым железным сердечником при нормальном насыщении и отсутствии противодействующих ампервитков (фиг. 10, 1) поток рассеяния настолько мал, что действие его можно не учитывать.

При наличии замкнутого железного сердечника отношение магнитного потока к току настолько велико, что из двух составляющих внешнего напряжения, определяемых уравнением (10, 2), первая составляющая — активное падение напряжения iR — оказывается очень малой. В расчетах ею можно вначале без заметного ущерба для конечных результатов пренебречь, считая, что все внешнее напряжение тратится только на компенсацию э. д. с. самоиндукции. Иначе говоря, можно полагать, что

$$U \approx U' = 4k f w \Phi_m, \quad (10, 4)$$

как это и сделано при построении векторных диаграмм (фиг. 10, 8 и 10, 9). Это позволяет значительно упростить расчеты цепей с железом.

Из уравнения (10, 4) следует также характерная для цепей с железом связь между подведенным напряжением и магнитным потоком в сердечнике.

Заданному напряжению U у зажимов катушки должен соответствовать определенный магнитный поток, а именно такой, который индуктирует приблизительно равную внешнему напряжению э. д. с. самоиндукции.

Ток, который будет при этом идти через реактивную катушку, определится требуемой величиной потока Φ и магнитным сопротивлением цепи R_m :

$$\Phi = \frac{I w}{R_m}, \quad (10, 5)$$

откуда

$$I = \frac{\Phi R_m}{w}.$$

Из этой формулы мы видим, что чем больше магнитное сопротивление цепи R_m , тем больший ток I будет потреблять катушка из сети при том же заданном напряжении U .

Рассматривая в качестве примера катушки фиг. 10,1 и 10,2 присоединенными к одной и той же сети и считая их активные сопротивления незначительными, а число витков одинаковым, мы можем утверждать, что пронизывающие катушки потоки приблизительно одинаковы, а токи различны, причем ток в катушке без железного сердечника будет во много раз превосходить ток в катушке, имеющей железный сердечник.

10.2. Кривая тока возбуждения

Отсутствие пропорциональности между током и потоком приводит еще к одному важному следствию, а именно: при синусоидальном намагничивающем токе поток, а следовательно, и напряжение будут несинусоидальными, и наоборот: при синусоидальном напряжении ток и поток будут несинусоидальными.

Кривую тока возбуждения при заданном внешнем синусоидальном напряжении мы можем получить, если пренебрежем в начале первым слагаемым в уравнении (10,2).

Это уравнение принимает вид

$$u = w \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10,2')$$

откуда

$$\Phi = \frac{1}{w} \int u dt.$$

Полагая, что u является гармонической функцией времени

$$u = U_m \sin \omega t,$$

мы получаем, что и поток также является гармонической функцией времени.

Действительно,

$$\Phi = \frac{1}{w} U_m \int \sin \omega t dt = -\frac{1}{w\omega} U_m \cos \omega t + k.$$

Так как при $t=0$

$$\Phi = -\Phi_m = -\frac{U_m}{w\omega},$$

то

$$k = 0,$$

и поэтому

$$\Phi = -\frac{1}{w\omega} U_m \cos \omega t = \frac{U_m}{w\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

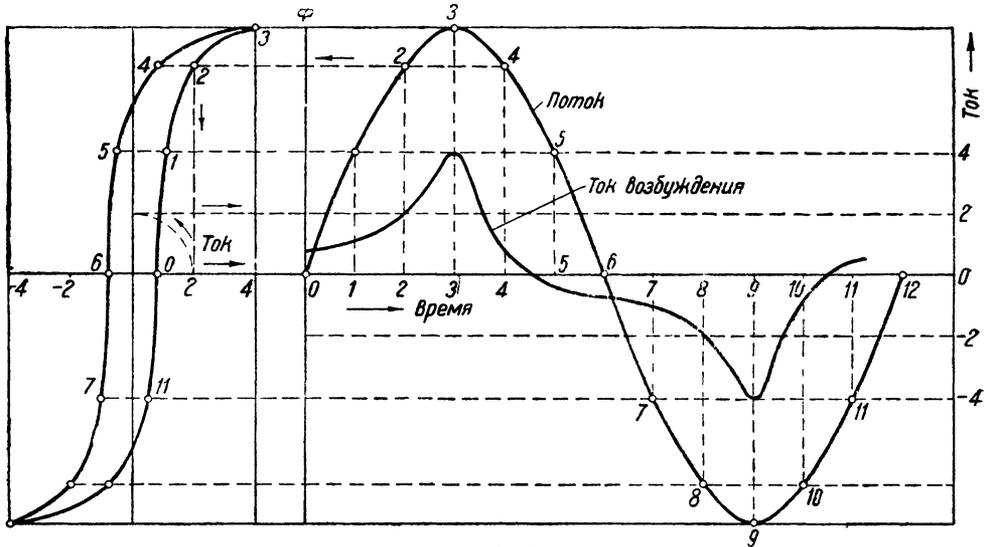
По синусоиде потока и графику зависимости Φ от i (фиг. 10,10), построенному по петле гистерезиса путем пересчета B на Φ (считая, что магнитная цепь состоит из однородного замкнутого сердечника сечением S), мы можем построить кривую тока в функции времени $i=f(t)$.

Для одной точки такое построение показано на фиг. 10,10. Ординаты кривой тока $i=f(t)$, соответствующие тем или иным значениям

потока $\Phi = f(t)$, взятые из левого графика $\Phi = f(i)$ и перенесены на правый график.

Полученная кривая тока возбуждения, как видно из графика, является сложной периодической функцией времени ¹.

Разложив полученную кривую тока на основную волну и высшие гармоники, мы можем выделить из состава гармонических активную составляющую тока, которая обусловлена потерями на гистерезис.



Фиг. 10,10.

Такой составляющей является исключительно активная составляющая основной волны тока, совпадающая по фазе с напряжением, так как только эта составляющая дает при синусоидальном напряжении среднюю мощность (за период), не равную нулю. Другие составляющие тока, к которым относятся как реактивная составляющая основной волны, так и все высшие гармонические тока, дают (при синусоидальном напряжении) среднюю мощность, за период равную нулю (см. § 9,14). Так, произведя в качестве примера разложение кривой, приведенной на фиг. 10,10, и приняв за начало отсчета момент, соответствующий максимуму напряжения, мы получаем следующий гармонический ряд:

$$i = 2,707 \sin(\omega t + 9,3^\circ) - 1,11 \sin(3\omega t + 10,3^\circ) + \\ + 0,255 \sin(5\omega t - 48,2^\circ) - 0,1 \sin(7\omega t - 59,3^\circ),$$

в котором имеются только нечетные гармоники, так как кривая симметрична относительно оси абсцисс. Составляющей, обусловленной потерями на гистерезис, является в этом случае косинусоида

$$i_h = 2,707 \sin 9,3^\circ \cos \omega t.$$

Выделяя эту косинусоиду и суммируя остающуюся от основной волны реактивную составляющую

$$i_{i,r} = 2,707 \cos 9,3^\circ \sin \omega t$$

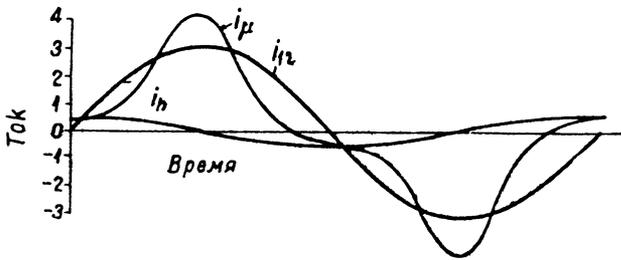
¹ Эта кривая не является кривой полного действительного тока возбуждения, так как здесь не учтена слагающая тока, обусловленная наличием вихревых токов (токов Фуко).

с высшими гармоническими кривой тока, мы получаем суммарную несинусоидальную кривую намагничивающего тока i_μ .

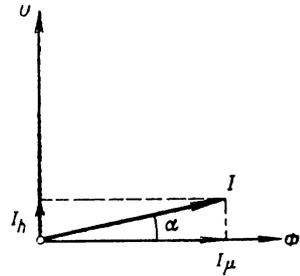
Кривые i_h и i_μ представлены на фиг. 10, 11. Нулевые значения кривой i_μ совпадают по времени с нулевыми значениями потока.

Анализируя ряды, полученные в результате разложения кривых намагничивания, Штейнмец нашел, что особенно резко в этих кривых выражены третья, а затем пятая и седьмая гармоники и что амплитуды этих гармоник тем больше, чем выше максимальное значение индукции, т. е. чем больше насыщение железа сердечника.

В табл. 10,1 приведены величины третьей и пятой гармоник тока в процентах от основной синусоиды для одного из ходовых сортов трансформаторного железа при разных максимальных индукциях в железе, а также коэффициенты амплитуды кривой тока, т. е. отношение макси-



Фиг. 10, 11.



Фиг. 10, 12.

мального значения тока к эффективному. Заменяя несинусоидальную кривую тока i_μ эквивалентной синусоидой, мы можем нанести на векторную диаграмму действующие значения эквивалентных синусоид токов I_h и I_μ (фиг. 10,12), откладывая вектор I_μ как реактивный по направлению потока, а вектор I_h — как активный по направлению напряжения. Ток возбуждения (без учета вихревых токов) явится геометрической суммой этих составляющих

$$I_0 = \sqrt{I_h^2 + I_\mu^2} \tag{10,6}$$

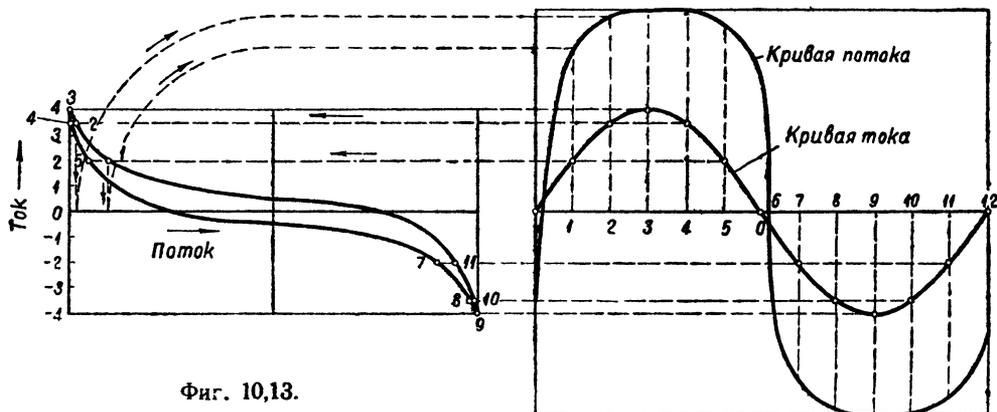
ТАБЛИЦА 10 1

B_{\max} Gs	Гармоники тока		Коэффициент амплитуды
	Третья	Пятая	
10 000	21,49%	5,3%	1,45
15 000	27,5%	11,5%	1,8
20 000	69,2%	38,5%	3,3

Отношение составляющих токов $\frac{I_h}{I_\mu}$ определяет „угол гистерезиса“ $\alpha = \arctg \frac{I_h}{I_\mu}$. Величина этого угла характеризует величину потерь на гистерезис.

Мы нашли кривую тока при синусоидальном напряжении. Иногда приходится решать и обратную задачу: определять кривую напряжения, если известно, что ток синусоидален. Ход решения задачи остается тем же. По кривой $\Phi = f(i)$ и синусоиде тока строим графически кривую потока

как это показано на фиг. 10,13, и затем, дифференцируя последнюю, получаем кривую напряжения. Кривая потока, как видно из графика, имеет притупленную форму, а, следовательно, кривая напряжения — весьма заостренную с большим коэффициентом амплитуды.



Фиг. 10,13.

Если произвести разложение кривой потока на основную волну и высшие гармонические, то оказывается, что наиболее резко выражены в кривой потока третья и пятая гармонические составляющие. Относительная величина этих гармоник в процентах от основной волны приблизительно та же, что и у кривой тока.

10.3. Практические методы определения намагничивающего тока

Определение намагничивающей составляющей тока с помощью гармонического анализа представляет большую и кропотливую работу, а потому к этому методу прибегают в практических расчетах весьма редко.

Более простым методом определения эффективного значения намагничивающего тока, получившим распространение на практике, является следующий приближенный метод расчета:

По кривым намагничивания, снятым для железа при постоянном токе, определяется максимальное значение напряженности магнитного поля H_m для отдельных участков магнитной цепи, так же как при расчете магнитной цепи, питаемой постоянным током (см. гл. 3). Затем находится $I_{\mu m}$ по формуле

$$I_{\mu m} = \frac{\sum_1^v H_m l}{\omega},$$

где H_m — максимальное значение напряженности поля на отдельных участках магнитной цепи;

l — длина отдельных участков;

ω — число витков обмотки возбуждения;

$I_{\mu m}$ — максимальное значение намагничивающего тока.

Для того чтобы перейти от максимального значения тока $I_{\mu m}$ к его эффективному значению, нужно знать коэффициент амплитуды $k_A = \frac{I_{\mu m}}{I_{\mu}}$. Коэффициент амплитуды при симметричной относительно оси абсцисс кри-

вой тока определяется из соотношения

$$k_A = \frac{I_m}{I} = \frac{I_{1m} + I_{3m} + I_{5m}}{\sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2}} = \frac{I_{1m}(1 + \alpha_3 + \alpha_5)}{I_1 \sqrt{1 + \alpha_3^2 + \alpha_5^2}} = \sqrt{2} \frac{(1 + \alpha_3 + \alpha_5)}{\sqrt{1 + \alpha_3^2 + \alpha_5^2}} = \sqrt{2} \xi, \quad (10,7)$$

где

$$\xi = \frac{1 + \alpha_3 + \alpha_5}{\sqrt{1 + \alpha_3^2 + \alpha_5^2}},$$

а

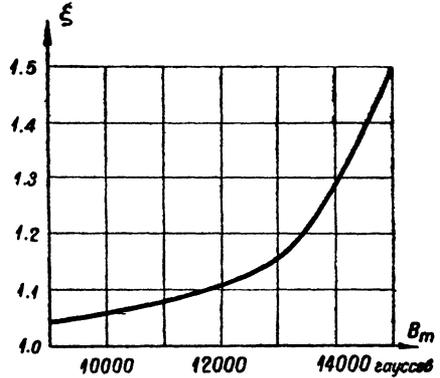
$$\alpha_3 = \frac{I_3}{I_1} = \frac{I_{3m}}{I_{1m}}; \quad \alpha_5 = \frac{I_5}{I_1} = \frac{I_{5m}}{I_{1m}}$$

и т. д. представляют собой отношения высших гармонических I_3, I_5 и т. д. к основной волне I_1 .

При максимальных значениях индукции, не превосходящих $B_{\max} = 10\,000$ Gs, значения α невелики, а потому ξ может быть принято равным единице, следовательно, $k_A = \sqrt{2}$:

При индукциях выше 10 000 Gs, ξ оказывается значительно больше единицы.

Для ходовых сортов железа значения этого поправочного коэффициента приводятся в справочниках. Для высоколегированного трансформаторного железа кривая $\xi = f(B_{\max})$ приведена на фиг. 10,14.



Фиг. 10,14.

10,4. Потери в железе

Энергию, теряемую при перемагничивании железа (т. е. переходящую в железе в тепло), можно подсчитать по найденной путем гармонического анализа активной составляющей тока основной синусоиды. Но мы уже упоминали, что в практических расчетах весьма редко пользуются гармоническим анализом даже для определения намагничивающей составляющей тока, тем меньше оснований прибегать к этому способу при определении потерь на гистерезис и на вихревые токи, так как эти потери гораздо проще могут быть вычислены по эмпирическим формулам.

Наиболее распространенной является формула Штейнметца

$$W_h = \eta B_m^{1,6} 10^{-7}, \quad 1$$

выражающая потерю энергии W_h за один цикл перемагничивания в J/cm^3 в зависимости от B_m (в гауссах), где $\eta = 0,001$ до $0,03$ — коэффициент, характеризующий данный сорт железа. Позднейшие исследования показали, что для индукций ниже 1 000 Gs и выше 10 000 Gs вместо показателя степени 1,6 лучше применять показатель 2.

Более точной является формула Рихтера, согласно которой потери на гистерезис в W/kg выражаются следующим образом:

$$P_h = \alpha \frac{f}{100} \cdot \frac{B_m}{10\,000} + \beta \frac{f}{100} \left(\frac{B_m}{10\,000} \right)^2. \quad (10,8)^1$$

¹ Здесь B_m в Gs.

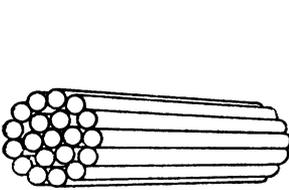
Для индукций в пределах от 10 000 до 16 000 Gs можно вместо формулы (10,8) пользоваться формулой

$$P_h = \sigma_h \frac{f}{100} \left(\frac{B_m}{10\,000} \right)^2. \quad (10,9)^1$$

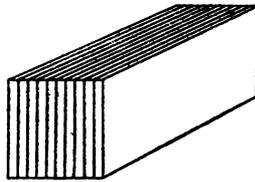
Значения коэффициентов α и β и σ_h для разных сортов железа даны в табл. 10,2.

При перемагничивании железа помимо потерь на гистерезис возникают также потери на вихревые токи, индуцируемые переменным магнитным потоком в толще железа.

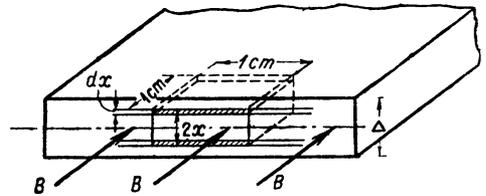
Для того чтобы уменьшить величину этих токов, железные сердечники собираются из отдельных изолированных между собой проволок (фиг. 10,15) или листов (фиг. 10,16).



Фиг. 10,15.



Фиг. 10,16.



Фиг. 10,17.

При частоте 50 Hz листы выполняются толщиной от 0,3 до 1 mm, при более высоких частотах применяется еще более тонкая сталь — от 0,07 до 0,015 mm. Изоляцией между листами служит тонкая бумага, лак или окалина.

Так как вихревые токи располагаются в плоскостях, перпендикулярных вектору магнитной индукции, то магнитная система при переменном токе конструируется так, чтобы магнитный поток был направлен вдоль листов, из которых набран сердечник (фиг. 10,17).

Подсчет потерь на вихревые токи мы произведем в предположении равномерного распределения потока по сечению листа. В действительности из-за размагничивающего действия вихревых токов поток не распределяется строго равномерно по сечению, а несколько уплотняется к краям листа (поверхностный эффект). Для частот ниже 100 Hz с этим явлением можно, однако, не считаться.

Наведенные токи, охватывающие магнитные линии, вследствие малой толщины листов идут параллельно сторонам листа.

Выделяя из листа (фиг. 10,17) элемент его объема (пустотелую призму) с высотой $2x$, толщиной стенок dx и длиной и шириной по 1 cm, получим, что мощность, теряемая в этом элементе вследствие циркуляции тока по его стенкам, равна

$$dP_x = \frac{E_x^2}{R_x},$$

где $E_x = 4kfB_m 2x$ — э. д. с., наведенная потоком, пронизывающим рассматриваемый элемент, а $R_x = \rho \frac{2}{dx}$ — сопротивление элемента, удельное сопротивление железа ρ здесь должно быть выражено в $\Omega \cdot \text{cm}$.

¹ В этой формуле B_m должно быть выражено в Gs.

Длиной торцевых сторон элемента $2x$ мы за их малостью по сравнению с шириной элемента (1 см) пренебрегаем.

Интегрируя по толщине листа (Δ), т. е. суммируя мощность, теряемую во всех таких элементах от середины до краев листа, мы получим мощность, теряемую в объеме Δ см³:

$$P_f = \int_0^{\frac{\Delta}{2}} dP_x = \frac{32k^2f^2B_{\max}^2}{\rho} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{4}{3\rho} k^2f^2B_{\max}^2 \Delta^3.$$

Потери в W/см³ выражаются формулой

$$P_{f_0} = \frac{P_f}{\Delta} = \frac{4}{3\rho} (kfB_m\Delta)^2,$$

где k — коэффициент формы кривой напряжения;

ρ — удельное сопротивление в $\Omega \cdot \text{см}$;

B_m — максимальное значение индукции, выраженное в V · sec/cm².

Давая формуле более удобный для практических расчетов вид, получаем

$$P_{f_0} = \frac{4}{3\rho} \left(\Delta \cdot k \cdot \frac{f}{100} \cdot \frac{B_m}{10\,000} \right)^2. \quad (10,10)$$

P_{f_0} выражает потери в W/см³, если B_m выражено в гауссах, а ρ — в $\frac{\Omega \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$.

Эта формула показывает, что заметного уменьшения потерь на вихревые токи можно добиться кроме максимально возможного уменьшения толщины листов путем увеличения удельного электрического сопротивления железа ρ . С этой целью известные сорта листовой стали (легированная сталь) изготавливаются с примесью кремния. С увеличением процентного содержания кремния электрическое сопротивление железа сильно повышается.

При синусоидальном потоке и, следовательно, при синусоидальной э. д. с., когда $k = 1,1$, потери на токи Фуко в W/kg выражаются формулой

$$P_f = \sigma_f \left(\frac{f}{100} \right)^2 \left(\frac{B_m}{10\,000} \right)^2; \quad (10,11)$$

для листовой стали с удельным весом 7,8 значения коэффициента $\sigma_f = \frac{1\,000}{7,8} \Delta^2 \cdot 1,11 \frac{4}{3\rho}$ приведены в табл. 10,2.

ТАБЛИЦА 10,2

Сорт стали	Примесь кремния в %	Δ в мм	Для формул				Удельные потери при $B_m = 10\,000\text{Gs}$ в W/kg
			(10,8)		(10,9)	(10,11)	
			α	β	σ_h	σ_f	
Обыкновенная динамная сталь	0,3	1,0	0,9	3,5	4,4	22,4	7,8
	0,5	0,5	0,9	3,5	4,4	5,6	3,6
		0,35	0,9	3,8	4,7	3,2	3,15
Трансформаторная высоколегированная	4,0	0,5	0,4	2,6	3,0	1,2	1,8
	4,5	0,35	0,3	2,1	2,4	0,6	1,35

В последней графе таблицы приведены также так называемые удельные потери, т. е. суммарные потери (в W/kg) на гистерезис и вихревые токи

$$P_{\Sigma} = \sigma_h \frac{f}{100} \left(\frac{B_m}{10000} \right)^2 + \sigma_f \left(\frac{f}{100} \cdot \frac{B_m}{10000} \right)^2$$

для индукции $B_m = 10000$ Gs при нормальной частоте $f = 50$ Hz.

При той же частоте и другой индукции приведенные в таблице значения удельных потерь изменятся пропорционально квадрату индукций.

Формулы (10,9) и (10,10) дают зависимость потерь в железе от индукции. Если же определить потери на перемагничивание железа не в зависимости от индукции, а в зависимости от приложенного напряжения, то нужно будет с помощью уравнения

$$E = 4k f \omega \Phi_m = 4k f \omega B_m S$$

найти B_m как функцию E , выразив B_m в гауссах, и подставить полученное выражение $\frac{B_m}{10000} = \frac{E \cdot 10^4}{4k \omega f S}$ в формулы (10,9) и (10,11). Это дает

$$P_h = \sigma_h \frac{f}{100} \left(\frac{E \cdot 10^4}{4k \omega f S} \right)^2 = C_1 \frac{U^2}{k^2 f} \quad (10,9')$$

и

$$P_f = \sigma_f \left(\frac{f}{100} \frac{E \cdot 10^4}{4k \omega f S} \right)^2 = C_2 U^2, \quad (10,11')$$

так как $U \approx E$. Формула (10,9') показывает, что потери на гистерезис при неизменном напряжении U обратно пропорциональны первой степени частоты и квадрату коэффициента формы.

Из формулы (10,11') следует, что потери на вихревые токи при неизменном U не зависят ни от частоты, ни от коэффициента формы.

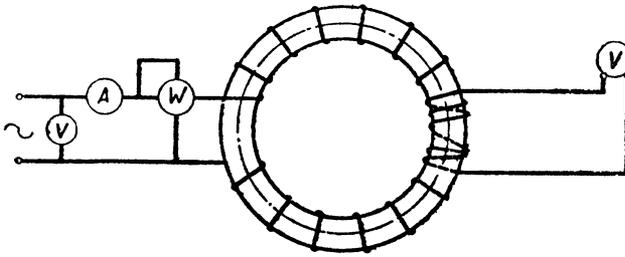
Так как в высоколегированном железе потери на гистерезис преобладают над потерями на токи Фуко (см. табл. 10,2), то общие потери в железе при заданном напряжении U зависят от частоты и коэффициента формы, примерно так же, как от них зависят потери на гистерезис.

Удельные потери в железе могут быть определены

и опытным путем. Для этого из испытуемой стали изготавливают сердечник кольцеобразной или четырехугольной формы и располагают на нем равномерно две обмотки (фиг. 10,18), к одной из которых подводится переменное синусоидальное напряжение. Другая обмотка служит для измерения наведенной э. д. с. с тем, чтобы по ней судить об индукции в железе. Измеряя ток и мощность, потребляемую первичной обмоткой, и учитывая потери в приборах, можно вычислить активную мощность, потребляемую железом, объем и вес которого известны. По э. д. с. E_2 , наведенной во вторичной обмотке, индукция определяется с помощью формулы

$$E_2 = 4,44 f \omega_2 B_m S.$$

Меняя напряжение и частоту в первичной обмотке, можно определить удельные потери при разных индукциях и частотах.



Фиг. 10,18.

Имея в виду, что потери на гистерезис при неизменной B_m пропорциональны первой степени частоты, а потери на вихревые токи — квадрату частоты, можно произвести разделение потерь на гистерезис и вихревые токи.

Для этого полученные из опыта суммарные удельные потери следует отнести к одному циклу перемагничивания:

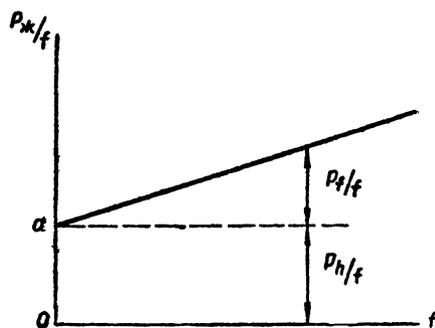
$$\omega_0 = \frac{P_{\text{св}}}{f} = \frac{P_h}{f} + \frac{P_f}{f} = C_1 + C_2 f,$$

и нанести ω_0 на график в функции частоты (фиг. 10,19). Полученное уравнение представляет собой уравнение прямой, в которой первое слагаемое (потери на гистерезис за один цикл перемагничивания) от частоты не зависит, а второе слагаемое (потери на вихревые токи за один цикл перемагничивания) пропорционально первой степени частоты.

Отрезок Oa , отсекаемый на оси ординат прямой (фиг. 10,19), дает постоянную $C_1 = \frac{P_h}{f}$. Вторую постоянную $C_2 = \frac{P_f}{f^2}$ можно вычислить, деля остаток любой ординаты $\frac{P_{\text{св}}}{f} - C_1 = \frac{P_f}{f}$ на соответствующую абсциссу f .

Умножая величины C_1 и C_2 соответственно на f и на f^2 , получаем отдельные потери на гистерезис и на вихревые токи при любой частоте.

Для построения прямой фиг. 10,19 по опытным данным достаточно иметь результаты измерений потерь при двух разных частотах и одной и той же индукции.



Фиг. 10,19.

10.5. Векторная диаграмма реактивной катушки

В § 10,2 и 10,3 было показано, как определяется магнитный поток при заданном напряжении и как по этому потоку рассчитывается намагничивающая составляющая тока возбуждения I_μ .

После определения потерь в железе мы можем найти и активную составляющую тока возбуждения, которая определяется из уравнения

$$I_{\text{св}} = I_h + I_f = \frac{P_h}{E} + \frac{P_f}{E} = \frac{P_{\text{св}}}{E}. \quad (10,12)$$

Полный ток возбуждения I_0 (фиг. 10,20) будет равен геометрической сумме составляющих $I_{\text{св}}$ и I_μ :

$$I_0 = \sqrt{I_{\text{св}}^2 + I_\mu^2}. \quad (10,13)$$

Составляющая, напряжения U' , компенсирующая э. д. с. самоиндукции E' и опережающая ток на 90° , определяется по вышеприведенной формуле

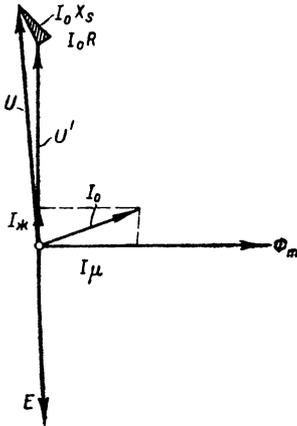
$$U' = 4kf\omega\Phi_m.$$

Для получения вектора полного напряжения на зажимах цепи к U' необходимо добавить: 1) вектор активного падения напряжения $\dot{I}_0 R$, совпадающий по фазе с током \dot{I}_0 , и вектор индуктивного падения напряжения $\dot{I}_0 jX_s$, опережающий вектор тока \dot{I}_0 на 90° .

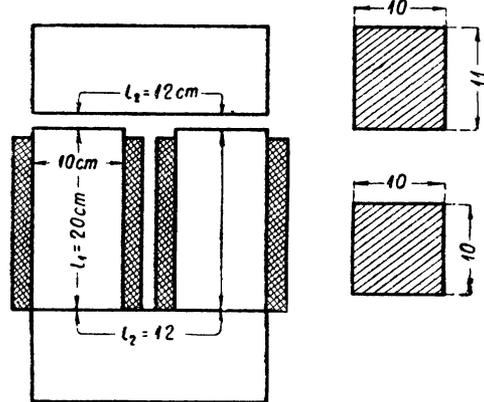
Величина L_s , необходимая для подсчета индуктивного падения напряжения, обычно берется, исходя из данных опытного исследования, величина R легко подсчитывается по параметрам катушки.

Как выше уже указывалось, активное и индуктивное падение напряжения в катушке обычно невелико.

Пример 10.1. Реактивная катушка с размерами сердечника, данными на фиг. 10,21, имеет две последовательно соединенные катушки по 75 витков в каждой. Активное сопротивление каждой катушки $R = 0,2 \Omega$.



Фиг. 10,20.



Фиг. 10,21.

Сердечник набран из листовой трансформаторной стали толщиной $\Delta = 0,35 \text{ mm}$.

Определить ток возбуждения в катушке и построить полную векторную диаграмму при питании катушки синусоидальным напряжением $U = 400 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$.

1) Полагая $U = U'$, т. е. пренебрегая вначале падением напряжения, определяем поток Φ_m :

$$\Phi_m = \frac{U'}{4kf\omega} = \frac{400}{4 \cdot 1,11 \cdot 50 \cdot 150} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{sec}.$$

2) Определяем B_m в различных участках магнитной цепи, состоящей из двух сердечников, верхнего и нижнего яра.

Вводя множитель 10^8 для перехода к гауссам от $\text{V} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$, индукция в сердечнике

$$B_{1m} = \frac{\Phi_m}{S_1} \cdot 10^8 = \frac{1,2 \cdot 10^6}{100} = 12\,000 \text{ Gs}.$$

Индукция в яре

$$B_{2m} = \frac{\Phi_m}{S_2} \cdot 10^8 = \frac{1,2 \cdot 10^6}{110} = 10\,900 \text{ Gs}.$$

3) Пользуясь кривой намагничивания, приведенной на фиг. (10,22), находим напряженность поля (удельные ампервитки) для сердечника и яра в соответствии с найденными значениями индукции $H_{1m} = 6,1 \text{ A/cm}$ и $H_{2m} = 4,9 \text{ A/cm}$.

4) По кривой фиг. 10,14 определяем поправочные множители для коэффициента амплитуды k_A [см. формулу (10,7)] соответственно найденным индукциям:

$$\text{для } B_1 = 12\,000 \text{ Gs}; \xi_1 = 1,11;$$

$$\text{для } B_2 = 10\,900 \text{ Gs}; \xi_2 = 1,07.$$

5) Определяем действующее значение намагничивающего тока

$$I_u = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \xi_1} H_{1m} 2l_1 + \frac{1}{\sqrt{2} \xi_2} H_{2m} 2l_2 \right) = \\ = \frac{1}{150} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1,11} \cdot 6,1 \cdot 2 \cdot 20 + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1,07} \cdot 4,9 \cdot 2 \cdot 12 \right) = 1,6 \text{ A.}$$

6) Взяв из табл. 10,2 значения коэффициентов $\sigma_h = 2,4$ и $\sigma_f = 0,6$, определяем удельные потери в железе для сердечника и ярма:

а) для сердечника:

$$P_{жс01} = \sigma_h \frac{f}{100} \left(\frac{B_m}{10000} \right)^2 + \sigma_f \left(\frac{f}{100} \cdot \frac{B_m}{10000} \right)^2 = \\ = 2,4 \frac{50}{100} \left(\frac{12000}{10000} \right)^2 + 0,6 \left(\frac{50}{100} \cdot \frac{12000}{10000} \right)^2 = 1,95 \text{ W/kg,}$$

а так как масса одного сердечника

$$M_1 = l_1 S_1 \gamma = 100 \cdot 20 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} = 15,6 \text{ kg,}$$

то полные потери в двух сердечниках будут

$$P_{жс1} = 2M_1 P_{жс01} = 2 \cdot 15,6 \cdot 1,95 = 61 \text{ W;}$$

б) для ярма:

удельные потери

$$P_{жс02} = 2,4 \cdot 0,5 \left(\frac{10900}{10000} \right)^2 + 0,6 \left(\frac{0,5 \cdot 10900}{10000} \right)^2 = 1,6 \text{ W/kg.}$$

Масса одного ярма

$$M_2 = l_2 S_2 \gamma = 110 \cdot 15 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} = \\ = 12,9 \text{ kg;}$$

полные потери в двух ярях

$$P_{жс2} = 2M_2 P_{жс02} = 2 \cdot 12,9 \cdot 1,6 = \\ = 41,3 \text{ W.}$$

Общие потери в железе

$$P_{жс} = 61 + 41,3 = 102,3 \text{ W.}$$

7) Активная составляющая тока возбуждения

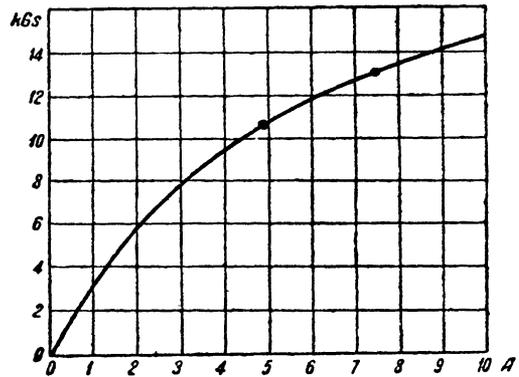
$$I_{жс} = \frac{P_{жс}}{U'} = \frac{102,3}{400} = 0,257 \text{ A.}$$

8) Найдя величины токов, мы строим векторную диаграмму катушки (фиг. 10,20).

Исходным вектором для диаграммы, как указывалось в § 10,1, служит вектор потока Φ_m .

Откладываем его в произвольном масштабе по одной из осей. На фиг. 10,20 вектор потока Φ_m отложен по горизонтальной оси, как это чаще всего и делают.

По вектору потока направляем I_u , а $I_{жс}$ направляем перпендикулярно к I_u в сторону опережения. При этом вектор $I_{жс}$ совпадает по фазе с вектором U' , составляющей напряжения, компенсирующей э. д. с. E , которая отстает от вектора Φ_m на 90° . Величину $U' = -E$ мы приняли равной подведенному напряжению U .



Фиг. 10, 22.

9) По составляющим $I_{жс}$ и I_{μ} графически или аналитически определяем ток возбуждения

$$I_0 = \sqrt{I_{жс}^2 + I_{\mu}^2} = \sqrt{1,6^2 + 0,257^2} = 1,63 \text{ A,}$$

и угол α , на который ток I_0 опережает поток Φ_m ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_{жс}}{I_{\mu}} = \frac{0,257}{1,6} = 0,157; \quad \alpha = 9^{\circ}4'.$$

10) Вектор активного падения напряжения

$$I_0 R = 1,63 \cdot 0,4 = 0,65 \text{ V}$$

откладываем из конца вектора U' параллельно вектору тока. Часто вектор активного падения напряжения бывает настолько мал, что его добавление остается на диаграмме почти незаметным. Так как индуктивность от потока рассеяния при замкнутых магнитных системах реактивных катушек также очень мала, то и вектор индуктивного падения напряжения часто может быть принят равным нулю и в результате U' будет равно подведенному напряжению U .

В тех случаях, когда активное и индуктивное падение напряжения оказываются заметными величинами, результирующий вектор напряжения оказывается больше действительно подведенного напряжения. В результате все величины в векторной диаграмме оказываются несколько преувеличенными, так как мы исходили из преувеличенного значения E' , полагая его равным U . Для уточнения векторной диаграммы достаточно принять полученный вектор напряжения за вектор заданного напряжения, введя поправку в принятый первоначально при построении векторов напряжения масштаб.

Поправку в масштабе для векторов напряжения можно распространить затем на масштабы всех других величин, входящих в диаграмму, т. е. векторов тока и потока, так как в пределах малых абсолютных изменений этих величин можно считать, что они остаются пропорциональными напряжению.

10,6. Схема замещения реактивной катушки

В ряде случаев исследование рабочего процесса электромагнитных механизмов удобнее вести, заменяя их такой электрической цепью, в которой можно было бы не рассматривать процессов, связанных с намагничиванием железа, и в которых поглощение энергии происходило бы только в активных сопротивлениях. Такие электрические цепи называются схемами замещения или эквивалентными схемами.

Схема замещения должна удовлетворять следующему условию: при заданном внешнем напряжении она должна потреблять такой же ток и такую же мощность, как и исследуемая электромагнитная цепь.

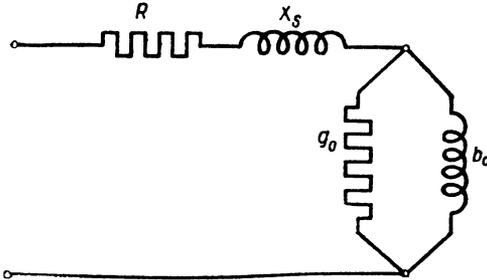
При подборе схемы замещения нашей задачей является не только выбор отвечающей требуемым условиям конфигурации схемы замещения, но и определение всех электрических параметров ее.

Для реактивной катушки схемами замещения могут явиться: схема, представленная на фиг. 10,23 и 10,24, или упрощенная схема, представленная на фиг. 10,25.

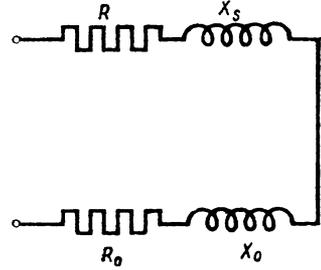
Активное и индуктивное сопротивления R и X_s в схемах фиг. 10,23 и 10,24 равны соответствующим сопротивлениям реактивной катушки.

Проводимости g_0 и b_0 в параллельном разветвлении схемы фиг. 10, 23 определяются из условий:

$$\left. \begin{array}{l} \text{активная} \\ \text{реактивная} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_0 = \frac{I_{\text{ак}}}{U'}; \\ b_0 = \frac{I_{\text{р}}}{U'}. \end{array} \quad (10, 14)$$



Фиг. 10, 23.



Фиг. 10, 24.

Сопротивления в последовательном соединении схемы фиг. 10, 24 определяются из условий:

$$\left. \begin{array}{l} \text{активное} \\ \text{реактивное} \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_0 = \frac{P_{\text{ак}}}{I_0^2}; \\ X_0 = \sqrt{z_0^2 - R_0^2}, \end{array} \quad (10, 15)$$

где

$$z_0 = \frac{U'}{I_0}.$$

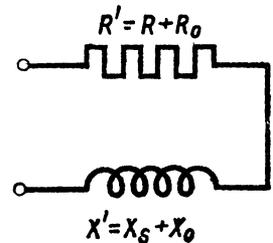
Проводимости одной схемы и сопротивления другой связаны между собой формулами (см. гл. 4):

$$\left. \begin{array}{l} R_0 = \frac{g_0}{g_0^2 + b_0^2}; \\ X_0 = \frac{b_0}{g_0^2 + b_0^2}; \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_0 = \frac{R_0}{R_0^2 + X_0^2}; \\ b_0 = \frac{X_0}{R_0^2 + X_0^2}. \end{array} \quad (10, 16)$$

Легко видеть, что обеим этим схемам удовлетворяет векторная диаграмма фиг. 10, 20.

Более простой эквивалентной схемой реактивной катушки является представленная на фиг. 10, 25. Здесь

$$R' = R + R_0 = R + \frac{P_{\text{ак}}}{I^2} \quad (10, 17)$$



Фиг. 10, 25.

представляет собой полное активное сопротивление катушки, включающее в себя действительное сопротивление катушки, а также эквивалентное сопротивление, потребляющее такую же мощность, какая фактически затрачивается на потери в железе, а индуктивное сопротивление определяется из формулы

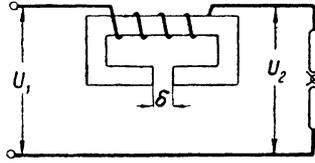
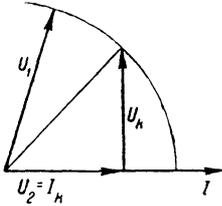
$$\left. \begin{array}{l} \text{где} \\ X' = \sqrt{z^2 - R'^2}, \\ z = \frac{U}{I_0}. \end{array} \right\} \quad (10, 18)$$

10,7. Реактивная катушка при последовательном включении в цепь

Часто может быть поставлена такая задача. На зажимах какого-либо приемника, например, дуговой лампы, должно быть напряжение U_2 , при котором через него будет проходить ток I . Напряжение сети U_1 больше требуемого.

Для уменьшения напряжения (его дросселирования) последовательно с приемником включается реактивная катушка (иногда называемая дроселем или дроссельной катушкой).

При этом на реактивной катушке должно существовать определенное напряжение U , а через ее обмотку должен проходить определенный ток I .



Фиг. 10, 26.

В рассматриваемом случае для катушки оказываются заданными ток и напряжение. Связь между ними может быть найдена из уравнений

$$U \approx 4kf\omega\Phi_m \quad \text{и} \quad \Phi_m = \frac{I_m \omega}{R_M},$$

где R_M — магнитное сопротивление.

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$U \approx 4kf \frac{\omega^2}{R_M} \cdot I_m.$$

Таким образом для получения определенного напряжения при заданном токе и произвольно выбранном числе витков необходимо иметь вполне определенное магнитное сопротивление магнитной цепи катушки, а при произвольном выборе магнитного сопротивления — вполне определенное число витков катушки. В первом случае расчет реактивной катушки сводится к обеспечению вполне определенной величины магнитного сопротивления R_M .

Практически это достигается путем введения в магнитную цепь воздушного зазора, регулируя который, можно влиять на магнитное сопротивление сердечника, меняя тем самым зависимость между током и напряжением.

Пример 10, 2. Какой воздушный зазор должна иметь магнитная цепь катушки, размеры которой даны на фиг. 10, 27, чтобы при токе $I = 10$ А напряжение на зажимах катушки U равнялось бы 40 В, а индукция B_m в сердечнике составляла 6000 Gs.

1) Определяем поток

$$\Phi_m = B_m S = 6000 \cdot 5 \cdot 6 = 0,18 \cdot 10^6 \text{ Мх.}$$

2) Определяем число витков катушки

$$\omega = \frac{U \cdot 10^8}{4kf\Phi_m} = \frac{40 \cdot 10^8}{4 \cdot 1,11 \cdot 50 \cdot 0,18 \cdot 10^6} = 100 \text{ витков.}$$

3) Из кривой намагничивания (фиг. 10, 22) находим удельные ампервитки для железа при $B_m = 6000$ Gs.

$$H_{жс\ m} = 2,1 \text{ А/см.}$$

4) Потребные ампервитки для полного пути потока в железе

$$I_m \omega_{жс} = H_{жс\ m} l_{жс} = 2,1 \text{ А/см} \cdot 64 \text{ см} = 134 \text{ А.}$$

5) Имеющиеся полные ампервитки¹

$$I_m \omega = 10 \sqrt{2} \cdot 100 = 1410 \text{ А.}$$

6) Избыточные ампервитки, которые должны быть затрачены на пути потока в воздушном зазоре,

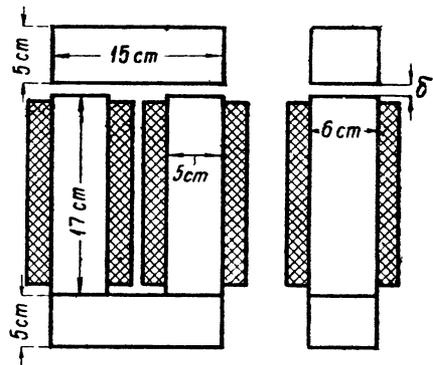
$$\begin{aligned} I_m \omega_0 &= I_m \omega - I_m \omega_{жс} = 1410 - 134 = \\ &= 1276 \text{ А.} \end{aligned}$$

7) Величина воздушного зазора определяется теперь из уравнения

$$l \omega_0 = 2\delta B_m \cdot 0,8,$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{l \omega_0}{2 B_m \cdot 0,8} = \frac{1276}{2 \cdot 6000 \cdot 0,8} = \\ &= 0,133 \text{ см} = 1,33 \text{ мм.} \end{aligned}$$



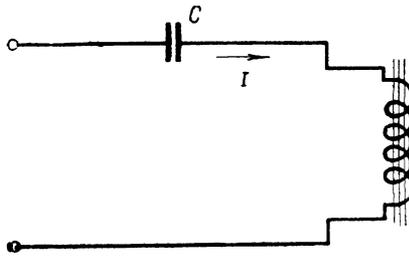
Фиг. 10, 27.

10,8. Резонанс напряжений в цепях с железом

Криволинейная характеристика $U_L = f(I)$ реактивной катушки с железом вызывает некоторые особенности в явлениях резонанса как при последовательном соединении катушки с железом и конденсатора (феррорезонанс напряжения), так и при их параллельном соединении (феррорезонанс токов).

Рассмотрим сначала феррорезонанс напряжений. При последовательном соединении катушки с железом и конденсатора (фиг. 10, 28) реактивная слагающая U_r приложенного к цепи напряжения по абсолютной величине равна разности индуктивного напряжения катушки (U_L) и емкостного напряжения конденсатора (U_C), которые противоположны друг другу по фазе. Поэтому, нанося на график фиг. 10, 29 U_L и U_C в функции тока

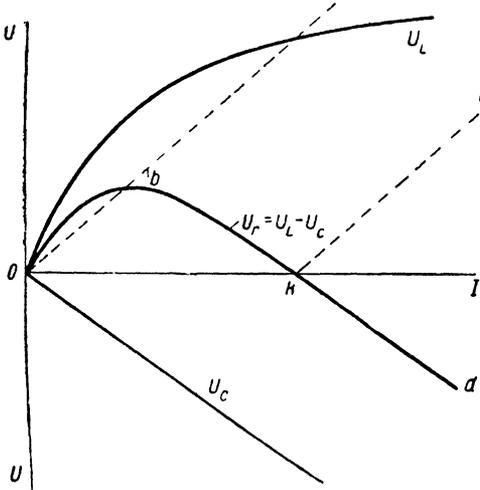
мы получим кривую напряжения U_r (*obkd*) как разность кривых U_L и U_C . Часть кривой *obkd* до точки *k* соответствует преобладанию в цепи реакции индуктивности. При этом для цепи действительна векторная диаграмма фиг. 10, 30. Часть кривой *kd* соответствует преобладанию в цепи реакции емкости. При этом для цепи действительна векторная диаграмма фиг. 10, 31.



Фиг. 10, 28.

¹ При $B_m = 6000$ Gs, $\xi \approx 1$ и $k_A = \sqrt{2}$.

Точка *k* соответствует состоянию резонанса. Если график должен изображать только абсолютную величину реактивного напряжения, то часть кривой *kd* можно заменить симметричным участком *kc*, идущим по другую сторону оси абсцисс.



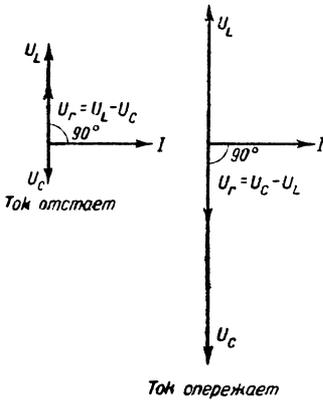
Фиг. 10, 29.

Активная слагающая напряжения $U_a = IR$ пропорциональна току. На фиг. 10, 32 она изображена прямой, проходящей через начало координат и условно расположенной под ось абсцисс. Полное напряжение U определяется по формуле

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2}$$

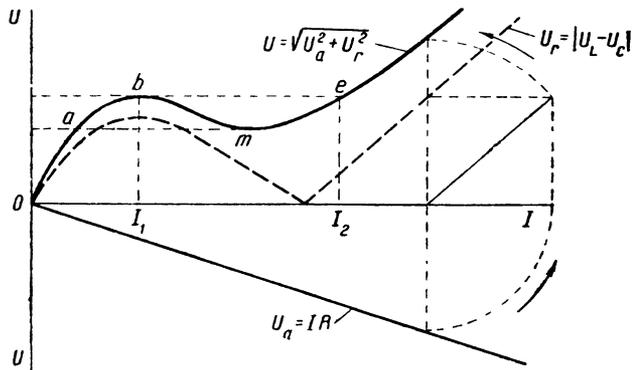
и может быть для любого значения I найдено путем геометрического сложения (под прямым углом) ординат кривой U_r и прямой U_a , как это сделано для одной точки на фиг. 10, 32. Соединяя ряд найденных таким образом точек кривой, мы получаем характеристику $U = f(I)$ с учетом активного сопротивления.

Предположим теперь, что напряжение на зажимах цепи постепенно возрастает от нуля. Сначала ток в цепи также будет постепенно увеличиваться. Но как только напряжение станет больше соответствующего



Фиг. 10, 30.

Фиг. 10, 31.



Фиг. 10, 32.

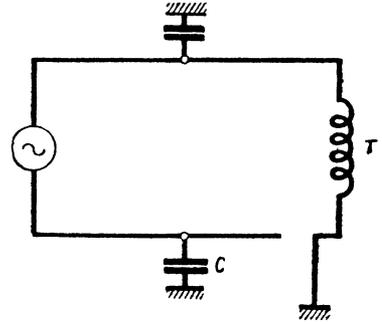
точке *b* (фиг. 10, 32), то произойдет резкий скачок тока от значения I до значения I_2 , соответствующего точке *e* характеристики, так как от точки *b* до точки *e* напряжение, потребное для поддержания тока в цепи меньше приложенного. Вместе с резким возрастанием тока происходит изменение фазы тока по отношению к напряжению: ток из отстающего (фиг. 10, 30) становится опережающим (фиг. 10, 31).

Одновременно меняются величины U_L и U_C и их фазы по отношению к приложенному напряжению, в связи с чем явление феррорезонанс напряжений часто называют явлением опрокидывания.

При обратном ходе, т. е. при уменьшении приложенного напряже-

ния, ток плавно уменьшается до точки t (фиг. 10, 32), в которой происходит обратный скачок в точку a в области малых токов.

Практически явление опрокидывания может иметь место, когда в линии, питающей мало нагруженный трансформатор (фиг. 10, 33), происходит обрыв одного из проводов. Если идущий к приемнику конец провода при этом замыкается на землю, то индуктивность трансформатора оказывается включенной последовательно с емкостью провода и при известных соотношениях индуктивности и емкости получается опрокидывание напряжения и как следствие этого значительное повышение напряжения как между незаземленной частью оборванного провода и землей, так и на зажимах трансформатора. В трехфазной цепи опрокидывание напряжения, кроме того, может вызвать изменение последовательности фаз на обратную.

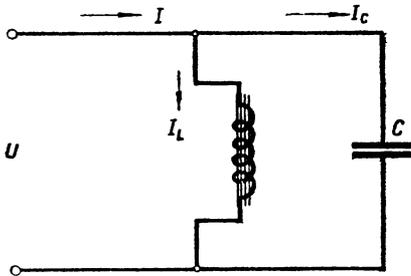


Фиг. 10, 33.

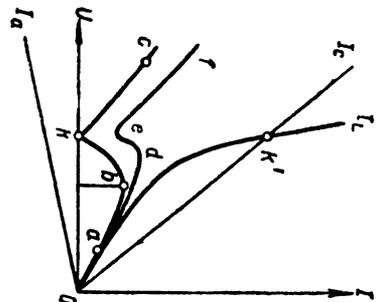
Опрокидывание напряжения может также иметь место при переменной емкости или при переменной частоте и постоянном напряжении на зажимах цепи.

10, 9. Резонанс токов в цепях с железом

При параллельном соединении двух ветвей (фиг. 10, 34), в одну из которых включена реактивная катушка с железным сердечником, а в другую — емкость, реактивная слагающая общего тока цепи является арифметической разностью реактивных токов в обеих



Фиг. 10, 34.



Фиг. 10, 35.

ветвях. Нанося поэтому на график (фиг. 10, 35) кривые $I_L = f(U)$ и $I_C = f(U)$, найдем реактивный ток в неразветвленной части цепи как разность ординат этих кривых.

Результирующая кривая реактивного тока $oabkc$ при параллельном соединении имеет таким образом такой же вид, как и кривая реактивного напряжения при последовательном соединении.

В правой части характеристики до точки k превалирует емкостный ток, в левой части после точки k — индуктивный.

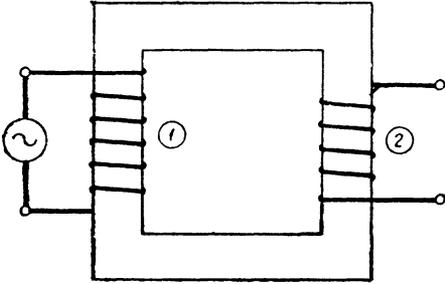
Активная слагающая суммарного тока возрастает пропорционально напряжению и изображена на фиг. 10, 35 прямой, условно расположенной ниже оси абсцисс. Общий ток может быть получен путем построения, аналогичного тому, с помощью которого при последовательном соединении была построена кривая напряжения.

На фиг. 10,35 кривая $odef$ является кривой общего тока с учетом активной составляющей.

10,10. Холостой ход трансформатора

Трансформатором называется аппарат, не имеющий движущихся частей, состоящий из магнитно связанных и электрически разобщенных обмоток, служащий для изменения напряжения и тока при передаче электрической энергии из одной цепи в другую.

Простейшим типом трансформатора является изображенный на фиг. 10,36 однофазный двухобмоточный трансформатор, состоящий из двух обмоток, расположенных на сердечнике из листовой стали. Этот сердечник не является, однако, органической принадлежностью всякого трансформатора. Его имеет большинство трансформаторов, так как он дает лучшую магнитную связь между обмотками. Но в тех случаях, когда бывает нужно сохранить строгую пропорциональность между током и магнитным потоком и избежать потерь в железе (некоторые области техники связи и измерительной техники) применяются трансформаторы и без сердечников (так называемые воздушные трансформаторы).



Фиг. 10,36.

Если к одной из обмоток трансформатора, которую мы будем называть первичной и обозначать цифрой 1, подвести переменное напряжение от питающей сети, то по этой обмотке пойдет ток, создающий магнитное поле. Магнитный поток, замыкающийся по сердечнику, будет пронизывать не только первичную обмотку, индуцируя в ней э. д. с. самоиндукции $e_1 = -\omega_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$, но и вторичную обмотку, обозначенную на фиг. 10,36 цифрой 2, индуцируя в ней э. д. с. взаимной индукции $e_2 = -\omega_2 \frac{d\Phi_p}{dt}$, где Φ_p — часть потока первичной обмотки, пронизывающая вторичную и называемая рабочим потоком.

Если весь поток первичной обмотки пронизывает вторичную, т. е. $\Phi_p = \Phi_1$, то отношение наведенных э. д. с. будет равно отношению чисел витков обмоток:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (10,19)$$

В действительности Φ_1 из-за наличия потока рассеяния Φ_{s0} всегда больше Φ_p , но поток рассеяния Φ_{s0} весьма невелик, пока вторичная обмотка разомкнута.

Отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ называется коэффициентом трансформации. Коэффициент трансформации показывает таким образом, во сколько раз э. д. с., наведенная в первичной обмотке, больше, чем во вторичной¹. Для понизительных трансформаторов коэффициент трансформации больше единицы, для повысительных — меньше единицы.

Если вторичную обмотку трансформатора замкнуть на какой-либо приемник, то под действием наведенной э. д. с. во вторичной цепи возникнет ток, и электрическая энергия будет передаваться из первичной

¹ Определение коэффициента трансформации нормами СССР см. ниже.

цепи во вторичную. При разомкнутой вторичной обмотке мы будем иметь режим холостого хода.

Так как при холостом ходе трансформатора вторичная обмотка не влияет на рабочий процесс в первичной, то соотношения токов, потоков и напряжений в первичной обмотке трансформатора при холостом ходе остаются такими же, как в рассмотренной нами реактивной катушке. Следовательно, для холостого хода трансформатора остается в силе и векторная диаграмма реактивной катушки, представленная на фиг. 10, 20. К ней надо только добавить вектор E_2 , представляющий собой э. д. с., наведенную во вторичной обмотке трансформатора (фиг. 10, 37).

Ток возбуждения I_0 является, следовательно, током холостого хода трансформатора.

Как в реактивной катушке, подведенное к зажимам катушки первичное напряжение U_1 расходуется:

1) На компенсацию э. д. с. $E_1 = 4kf\omega_1\Phi_p$, наведенной в первичной обмотке рабочим потоком Φ_p .

2) На компенсацию э. д. с. $E_{s0} = 4kf\omega_1\Phi_{s0}$, наведенной потоком рассеяния.

Вектор \dot{U}_{s0} , уравновешивающий \dot{E}_{s0} , рассматривается обыкновенно как вектор индуктивного падения напряжения, т. е.

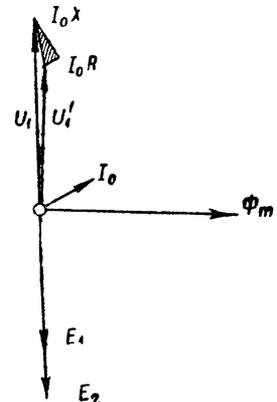
$$\dot{U}_{s0} = -\dot{E}_{s0} = j\dot{I}_0 X_{s0} = jI_0 \omega L_{s0}.$$

3) На покрытие активного падения напряжения $I_0 R_1$. Все это может быть выражено уравнением

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1 - \dot{E}_{s0} + \dot{I}_0 R_1,$$

или

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + j\dot{I}_0 X_{s0} + \dot{I}_0 R_1. \quad (10, 20)$$



Фиг. 10, 37.

Так как активное и индуктивное падения напряжения при холостом ходе трансформатора очень невелики, то, не делая большой погрешности, можно принять

$$\dot{U}_{10} = \dot{U}'_1 = -\dot{E}_1.$$

В связи с этим для облегчения опытного определения коэффициента трансформации нормами СССР установлено за коэффициент трансформации считать не отношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}$, а отношение

$$\frac{U_{10}}{E_2} = \frac{U_{1 \text{ хол}}}{U_{2 \text{ хол}}}, \quad (10, 21)$$

т. е. отношение первичного и вторичного напряжений при холостом ходе трансформатора.

Мощность, потребляемая трансформатором при холостом ходе, определяется уравнением

$$P_0 = U_1 I_0 \cos \varphi_0 = I_0^2 R_1 + P_{\text{ж}} = I_0^2 R_1 + U'_1 I_0 \sin \alpha, \quad (10, 22)$$

где R_1 — активное сопротивление первичной обмотки;

α — угол между векторами тока I_0 и магнитного потока Φ_m .

Эта мощность затрачивается на нагрев проводников первичной обмотки ($I_0^2 R_1$) и железа (вследствие потерь на гистерезис и на вихревые токи).

В воздушных трансформаторах, в которых сохраняется пропорциональность между E_1 и током холостого хода I_0 , можно принять:

$$\dot{U}'_1 = j\dot{I}_0 X_{01}$$

и тогда уравнение (10,20) принимает вид

$$\dot{U}_1 = j\dot{I}_0 X_0 + j\dot{I}_0 X_{s0} + \dot{I}_0 R_1 = j\dot{I}_0 (X_0 + X_{s0}) + \dot{I}_0 R_1. \quad (10,23)$$

Для трансформаторов с железом, работающих на прямолинейном участке кривой намагничивания в определенных и узких границах изменения потока, также можно принять \dot{E}_1 пропорциональным \dot{I}_0 , но для этих трансформаторов надо считать

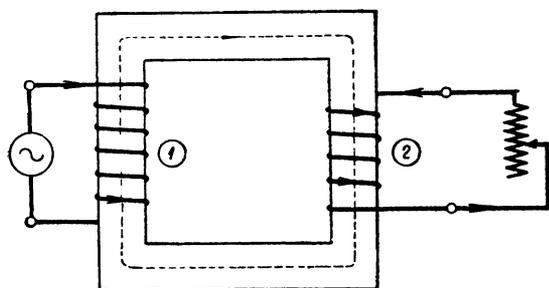
$$\dot{U}'_1 = \dot{I}_0 Z_0 = \dot{I}_0 R_0 + \dot{I}_0 X_0,$$

где R_0 — эквивалентное сопротивление, обусловленное потерями в железе. Уравнение (10,21) преобразуется в этом случае в уравнение

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_0 Z_0 + j\dot{I}_0 X_{10} + \dot{I}_0 R_1. \quad (10,24)$$

10, 11. Нагрузочный режим трансформатора

Замкнув вторичную обмотку трансформатора (фиг. 10,38) на сопротивление (приемник), мы переходим от режима холостого хода к нагрузочному режиму трансформатора, так как под действием э. д. с. E_2 во вторичной цепи появится ток I_2 ,



Фиг. 10,38.

и электрическая энергия начнет передаваться от трансформатора к приемнику. Опыт показывает, что одновременно с появлением тока I_2 увеличивается и ток в первичной цепи, переходя от значения I_0 к значению I_1 , что характеризует собой увеличение притока энергии из питающей сети к трансформатору.

Поскольку обмотки трансформатора электрически не связаны между собой, мы получаем здесь электромагнитную передачу энергии из одной цепи в другую. Основным агентом связи между двумя электрическими цепями является при этом магнитный поток Φ . При появлении тока во вторичной цепи, создаваемая им м. д. с. $I_2 \omega_2$ по закону Ленца стремится уменьшить магнитный поток Φ . Но всякое уменьшение потока связано с уменьшением э. д. с. самоиндукции в первичной цепи и, следовательно, с увеличением разности между U и E_1 , благодаря чему открывается возможность роста первичного тока и первичной м. д. с. $I_1 \omega_1$. Первичный ток растет до тех пор, пока увеличение м. д. с. в первичной обмотке не уравновесит вторичной размагничивающей м. д. с. и не восстановит почти прежней величины потока Φ . Новое значение потока будет все же немного меньше прежнего, потому что, как бы ни была относительно мала величина активного падения напряжения $I_1 R_1$ в первичной обмотке, все же с ростом первичного тока несколько возрастет и эта составляющая напряжения и в результате при неизменном внешнем напряжении U за счет возрастающей $I_1 R_1$ должна несколько уменьшиться E , а вместе с ней и поток Φ_p . Однако изменение это настолько незначительно, что можно считать рабочий магнитный поток трансформатора почти не изменяющимся при изменении нагрузки и принять его равным магнитному потоку при холостом ходе трансформатора.

Так как неизменный магнитный поток требует для своего создания и неизменного числа ампервитков, то

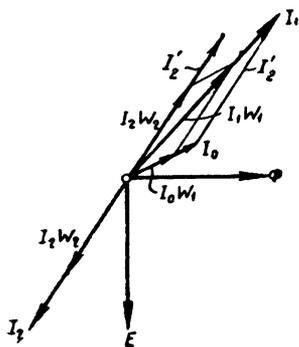
$$i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2 = i_0 \omega_1, \text{ или } i_1 \omega_1 = i_0 \omega_1 + (-i_2 \omega_2), \quad (10, 25)$$

что и показано на векторной диаграмме фиг. 10, 39.

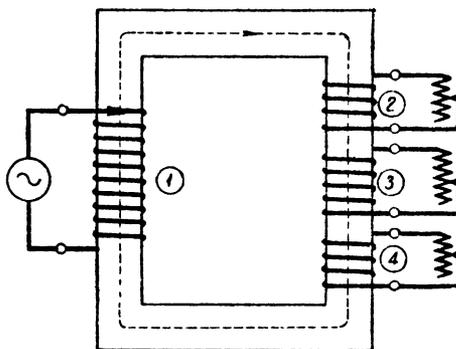
Уравнение (10, 25) и векторная диаграмма фиг. 10, 39 говорят о том, что м. д. с. первичной обмотки при нагрузке представляет собой геометрическую сумму двух слагаемых: намагничивающей составляющей $i_0 \omega_1$ (ампервитки холостого хода) и составляющей $-i_2 \omega_2$, компенсирующей размагничивающее действие вторичной обмотки.

Уравнение (10, 25) может быть следующим образом обобщено для трансформатора, имеющего n обмоток, каждая из которых самостоятельно нагружена (фиг. 10, 40):

$$i_0 \omega_1 = i_1 \omega_1 + i_2 \omega_2 + i_3 \omega_3 + \dots + i_n \omega_n. \quad (10, 26)$$



Фиг. 10, 39.



Фиг. 10, 40.

Это уравнение говорит о том, что геометрическая сумма всех м. д. с. трансформатора равна м. д. с. холостого хода. Это уравнение часто называют уравнением магнитного равновесия трансформатора. Деля обе части уравнения (10, 25) на число витков ω_1 , получим уравнение для определения тока в первичной обмотке

$$i_1 = i_0 + \left(-i_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = i_0 + i_2', \quad (10, 27)$$

которое показывает, что при нагрузке трансформатора к току холостого хода в первичной обмотке добавляется вторичный ток, пересчитанный на число витков первичной обмотки. Этот ток i_2' называется приведенным током. Пересчет на число витков первичной обмотки связан с тем обстоятельством, что непосредственно уравновешивают друг друга не токи, а ампервитки.

На фиг. 10, 39 кроме диаграммы ампервитков представлена также и диаграмма токов.

Появляющиеся при нагрузке уравновешивающие друг друга ампервитки $i_1 \omega_1 = i_2' \omega_1$ и $i_2 \omega_2$, мало влияя на рабочий поток, создают зато, как видно из фиг. 10, 41, потоки рассеяния, которые неодинаково сцепляются с обмотками. Эти потоки рассеяния добавляются к потокам рассеяния холостого хода, значительно превосходя их по величине. Выделение общего потока рассеяния из рабочего потока и распределение общего потока рассеяния на потоки, взаимодействующие с каждой обмоткой в отдельности, не являются однозначной операцией и выполняются разными авторами по-разному. Рассматривая простейший случай расположения

обмоток, представленный на фиг. 10,41, можно считать, что каждую из обмоток охватывает примерно одинаковое число магнитных линий рассеяния $\Phi_{s1} = \Phi_{s2}$. Так как векторы потоков рассеяния, замыкающихся в воздухе, находятся в фазе с векторами создающих их токов, то индуцируемые ими в обмотках э. д. с. E_{s1} и E_{s2} будут отставать от соответствующих векторов тока на 90° (фиг. 10,42). Как видно из диаграммы фиг. 10,42 результирующая э. д. с. $E_{1\text{рез}}$, наводимая в первичной обмотке, включает в себя 1) э. д. с. E_1 , наводимую рабочим потоком, 2) э. д. с. E_{s0} , наводимую потоком рассеяния холостого хода, 3) э. д. с. E_{1s} , наводимую нагрузочным потоком рассеяния.

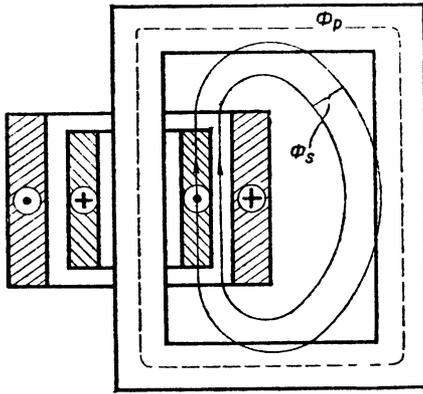
Первичное напряжение U_1 уравнивает результирующую э. д. с. в первичной обмотке E_1 и покрывает, кроме того, составляющую активного падения напряжения.

Все это может быть выражено уравнением

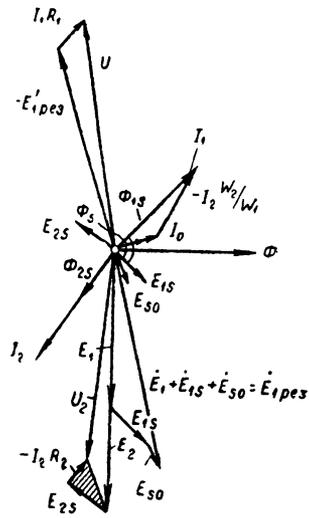
$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_{1\text{рез}} + \dot{I}_1 R_1 = -\dot{E}_1 - \dot{E}_{1s} - \dot{E}_{s0} + \dot{I}_1 R_1$$

или

$$\dot{U}_1 + \dot{E}_1 + \dot{E}_{1s} + \dot{E}_{s0} - \dot{I}_1 R_1 = 0. \quad (10, 28)$$



Фиг. 10, 41.



Фиг. 10, 42.

Заменяя э. д. с. от потоков рассеяния соответствующими индуктивными падениями напряжения, т. е. подставляя

$$\dot{E}_{1s} = -j(I_1 - I_0) X_1;$$

$$\dot{E}_{s0} = -jI_0 X_{s0}$$

и

$$-\dot{E}_1 = \dot{I}_0 Z_0,$$

где

$$Z_0 = R_0 + jX_0,$$

можно придать уравнению (10, 28) следующий вид:

$$\dot{U}_1 = j(I_1 - I_0) X_1 + jI_0 X_{s0} + \dot{I}_0 Z_0 + \dot{I}_1 R_1 = jI_1 X_1 - jI_0 (X_1 - X_{s0}) + \dot{I}_0 Z_0 + \dot{I}_1 R_1.$$

Принимая, далее, для упрощения уравнения, что $X_1 \approx X_{s0}$ или $X_1 - X_{s0} \approx 0$, получаем, что $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 R_1 + jI_1 X_1 + \dot{I}_0 Z_0 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_0 Z_0$, или окончательно

$$\dot{U}_1 - \dot{I}_0 Z_0 - \dot{I}_1 Z_1 = 0. \quad (10, 29)$$

Результирующая э. д. с. $E_{2\text{рез}}$, индуцируемая во вторичной обмотке, включает в себя:

- 1) э. д. с. E_2 , наводимую во вторичной обмотке рабочим потоком,
- 2) э. д. с. E_{2s} , наводимую во вторичной обмотке потоком рассеяния.

Вычитая из вторичной э. д. с. активное падение напряжения во вторичной обмотке, получим напряжение приемника. Следовательно,

$$\dot{E}_2_{\text{рез}} = \dot{E}_2 + \dot{E}_{2s} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 R_2 \quad \text{и} \quad \dot{U}_2 = \dot{E}_2 + \dot{E}_{2s} - \dot{I}_2 R_2$$

или

$$\dot{U}_2 - \dot{E}_2 - \dot{E}_{2s} + \dot{I}_2 R_2 = 0. \quad (10, 30)$$

Выражая в этом уравнении э. д. с. от потока рассеяния через индуктивное падение напряжения, т. е. подставляя $\dot{E}_{2s} = -j\dot{I}_2 X_2$ и обозначая $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z$, где $Z = R + jX$ — кажущееся сопротивление потребителя, можно уравнению (10, 30) придать вид

$$\dot{I}_2 R_2 + j\dot{I}_2 X_2 - \dot{E}_2 + \dot{I}_2 Z = 0$$

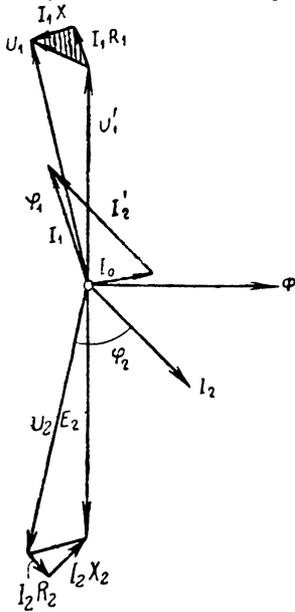
или

$$\dot{E}_2 - \dot{I}_2 (Z + Z_2) = 0. \quad (10, 31)$$

Векторная диаграмма фиг. 10, 42 есть полная векторная диаграмма трансформатора для случая, когда ток во вторичной цепи отстает от напряжения (индуктивный приемник). Если пренебречь э. д. с. E_{s0} от потока рассеяния, холостого хода то векторная диаграмма несколько упрощается (фиг. 10, 43) и вместо уравнения (10, 28) мы получаем

$$\dot{U}_1 + \dot{E}_1 + \dot{E}_{1s} - \dot{I}_1 R_1 = 0. \quad (10, 32)$$

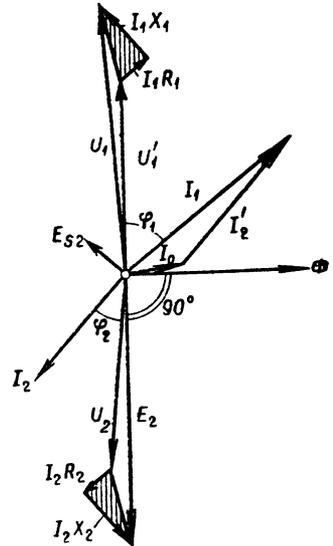
Построение диаграммы трансформатора при заданных значениях U_2 , I_2 и φ_2 на зажимах приемника производится в следующем порядке. Отложив вектор \dot{U}_2 по вертикали вниз (фиг. 10, 43), строим под углом φ_2 к нему вектор тока \dot{I}_2 . Затем к вектору \dot{U}_2 добавляем вектор $\dot{I}_2 R$ (направляя его параллельно вектору тока \dot{I}_2) и вектор $j\dot{I}_2 \omega L_{2s} = -\dot{E}_{s2}$ (направляя его перпендикулярно к вектору тока). В результате получаем э. д. с. \dot{E}_2 , индуктированную во вторичной обмотке рабочим потоком. По найденной величине E_2 , пользуясь формулой $E = 4kf\omega\Phi_m$, определяем величину рабочего потока Φ_p . Вектор потока откладываем перпендикулярно E_2 в сторону опережения. Найденная величина магнитного потока дает нам возможность рассчитать магнитную цепь трансформатора. Из этого расчета определяем ток холостого хода \dot{I}_0 как по фазе, так и по величине. Добавляя к вектору тока холостого хода \dot{I}_0 вектор вторичного тока, приведенного к первичной обмотке, наносим его на диаграмму противоположно \dot{I}_2 и геометрически складывая \dot{I}_2' и \dot{I}_0 , получаем вектор тока в первичной обмотке. По отношению числа витков $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ подсчитываем величину



Фиг. 10, 44.

E_1 . Вектор \dot{E}_1 по своей фазе совпадает с вектором \dot{E}_2 .

Добавляя к вектору $\dot{U}_1' = -\dot{E}_1$, располагаемому противоположно вектору \dot{E}_1 , векторы активного и реактивного падения напряжения $\dot{I}_1 R_1$ и $j\dot{I}_1 X_1$,



Фиг. 10, 43.

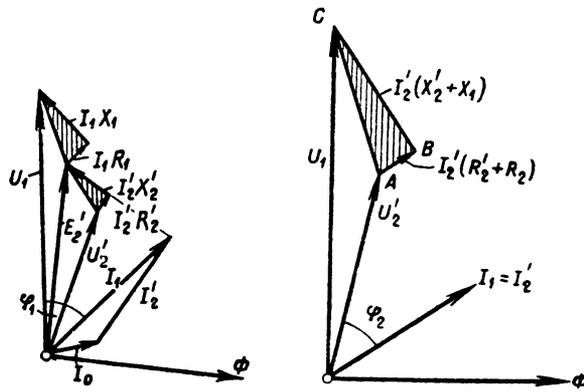
мы получаем в результате геометрического сложения вектор первичного напряжения U_1 .

Для емкостной нагрузки векторная диаграмма трансформатора приведена на фиг. 10,44. При заданных первичных величинах U_1 и I_1 векторная диаграмма строится методом постепенного приближения.

10,12. Приведенная векторная диаграмма

Векторная диаграмма трансформатора значительно упрощается, если данный трансформатор заменить эквивалентным ему приведенным трансформатором, у которого число витков одной из обмоток сделано равным числу витков другой обмотки. Уравнивая витки при сохранении потока,

мы тем самым уравниваем э. д. с., индуктируемые в обеих обмотках рабочим потоком. Это дает нам возможность связать диаграммы напряжений обеих обмоток в одну путем условного совмещения равных векторов \dot{E}_1 и \dot{E}_2 (фиг. 10,45). Приведение может быть сделано к числу витков любой из обмотк. Так, приводя вторичную обмотку к первичной, мы получаем из диаграммы фиг. 10,43 приведенную диаграмму фиг. 10,45, у которой все величины вторичной обмотки: токи, напряжения и сопротивления, пересчитаны на число витков первичной обмотки (приведенные к первичной обмотке величины обозначаются знаком ') и вся нижняя часть диаграммы, относящаяся ко вторичной обмотке, повернута на 180° до совпадения векторов \dot{E}_2' и \dot{U}_1' .



Фиг. 10,45.

Фиг. 10,46.

При пересчете числа витков обмотки с ω_2 на ω_1 все приведенные напряжения, в том числе и напряжение приемника U_2 , увеличиваются в $k = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ раз, поскольку напряжения пропорциональны числу витков, таким образом

$$E_2' = E_2 k; \quad E_{2s}' = E_{2s} k; \quad U_2' = U_2 k. \tag{10,32}$$

Приведенный ток I_2' , наоборот, в k раз меньше, чем ток I_2 , т. е.

$$I_2' = \frac{I_2}{k}, \tag{10,33}$$

так как соответствующее число ампервитков должно остаться неизменным. Приведенное активное сопротивление вторичной обмотки определяется из соотношения

$$\frac{I_2' R_2'}{I_2 R_2} = k,$$

откуда

$$R_2' = R_2 \frac{I_2}{I_2'} k = R_2 k^2, \tag{10,34}$$

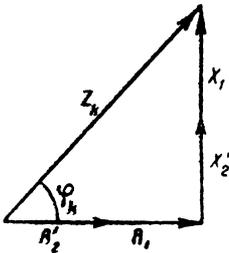
т. е. приведенное к первичной обмотке активное сопротивление вторичной увеличивается в k^2 раз.

Если э. д. с. от потоков рассеяния учитывать посредством введения индуктивных сопротивлений, то и приведенное индуктивное сопротивление

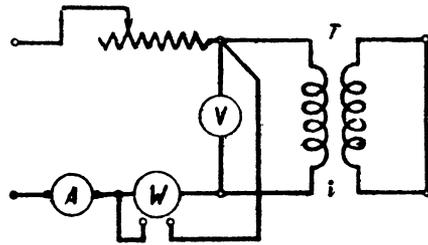
вторичной обмотки аналогично активному сопротивлению возрастает в k^2 раз, так как индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков. Следовательно,

$$X_2' = X_2 k^2. \quad (10, 35)$$

Диаграмма на фиг. 10,46 представляет собой дальнейшее упрощение диаграммы, приведенной на фиг. 10,45. Оно заключается в том, что мы пренебрегаем током холостого хода I_0 , который обычно очень мал по сравнению с током при полной нагрузке. Благодаря этому вектор первичного тока I_1 делается равным по величине и совпадает по фазе с вектором приведенного вторичного тока I_2' . При этом упрощении катеты прямоугольных треугольников, характеризующих внутреннее падение напряжения в каждой из обмоток трансформатора (фиг. 10,45), оказываются параллельными. Будучи сложены, они образуют общий треугольник внутреннего падения напряжения ABC , называемый треугольником короткого замыкания.



Фиг. 10, 47.



Фиг. 10, 48.

Один из катетов этого треугольника изображает активное падение напряжения в обеих обмотках:

$$\dot{U}_R = I_1 (R_1 + R_2'); \quad (10, 36)$$

другой — индуктивное падение напряжения

$$\dot{U}_X = j I_1 (X_1 + X_2'), \quad (10, 37)$$

а гипотенуза — полное падение напряжения в обеих обмотках трансформатора

$$U_k = I_1 z_k = I_1 \sqrt{(R_1 + R_2')^2 + (X_1 + X_2')^2}. \quad (10, 38)$$

Деля все катеты этого треугольника на ток I_1 (фиг. 10,47), мы переходим от треугольника падения напряжения к треугольнику сопротивлений, в котором один катет $R_k = R_1 + R_2'$ представляет собой суммарное активное сопротивление короткого замыкания, другой $X_k = X_1 + X_2'$ — суммарное реактивное сопротивление короткого замыкания, а гипотенуза $z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2}$ — суммарное кажущееся сопротивление короткого замыкания.

Величины U_R , U_X и U_k , а также сопротивления R_k , X_k и Z_k могут быть определены из опыта короткого замыкания, производимого по схеме, представленной на фиг. 10,48.

При опыте одна из обмоток трансформатора, обычно обмотка высшего напряжения, присоединяется к сети, а другая замыкается накоротко. Чтобы ток в обмотках трансформатора не получился чрезмерно большим, напряжение, подводимое к первичной обмотке, снижается до величины, при которой ток оказывается равным нормальному нагрузочному току, т. е. $I_{1k} = I_1$.

Измеряя напряжение U_{1k} , ток I_{1k} и мощность P_{1k} , подводимые в этом опыте к трансформатору, мы можем определить все интересующие нас величины:

$$\left. \begin{aligned} U_R &= \frac{P_k}{I_{1k}}; & U_X &= \sqrt{U_k^2 - U_R^2}; \\ R_k &= R_1 + R_2' = \frac{U_R}{I_{1k}}; & U_{1k} &= U_k, \\ X_k &= X_1 + X_2' = \frac{U_X}{I_{1k}}. \end{aligned} \right\} \quad (10, 39)$$

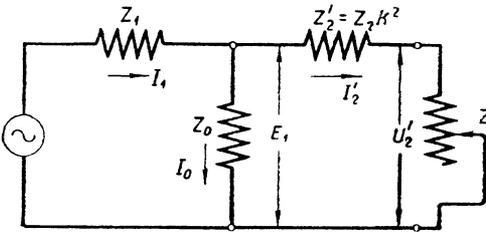
10,13. Схема замещения трансформатора

Схему замещения трансформатора можно составить, определив из уравнений

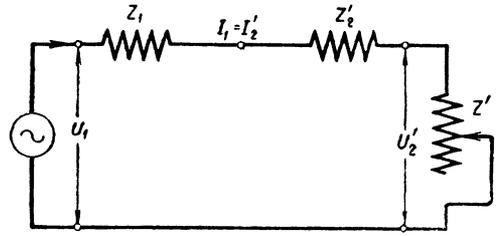
$$\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_0 Z_0 = 0, \quad (10, 29)$$

$$\dot{E}_2 - \dot{I}_2 (Z + Z_2) = 0 \quad (10, 31)$$

связь между первичным током I_1 и первичным напряжением U_1 через параметры цепи. Схема получается наиболее простой, если строить ее для приведенного трансформатора.



Фиг. 10, 49.



Фиг. 10, 50.

Как и при построении векторных диаграмм, приводим вторичную обмотку к первичной. Для этого умножаем уравнение (10, 31) на c :

$$c \dot{E}_2 - \dot{I}_2 (Z + Z_2) c = 0. \quad (10, 40)$$

Имея далее в виду, что

$$c \dot{E}_2 = \dot{E}_1 = -I_0 Z_0 \quad \text{и} \quad \dot{I}_2' = -\frac{\dot{I}_2}{c} = (\dot{I}_1 - \dot{I}_0),$$

и пользуясь уравнением (10, 40), выражаем ток холостого хода I_0 через ток \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 \frac{(Z_2 + Z) c^2}{Z_0 + (Z_2 + Z) c^2}.$$

Подставив найденное значение I_0 в уравнение (10, 29), находим зависимость между \dot{U}_1 и \dot{I}_1 :

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left[Z_1 + \frac{Z_0 (Z_2 + Z) c^2}{Z_0 + (Z_2 + Z) c^2} \right] = \dot{I}_1 Z_X. \quad (10, 41)$$

Множитель в скобках представляет собой эквивалентное сопротивление обмоток трансформатора и приемника, он показывает, в какой комбинации должны быть соединены в схеме замещения отдельные сопротивления, чтобы схема замещения удовлетворяла условиям рабочего процесса трансформатора. Из выражения (10, 41) следует, что схема замещения может быть составлена из сопротивлений Z_1 , Z_0 ; $Z_2' = Z_2 c^2$

$Z' = Zc^2$, включенных, как показано на фиг. 10, 49. Такой схеме, как легко видеть, соответствует приведенная векторная диаграмма фиг. 10, 45. Диаграмма фиг. 10, 46 соответствует упрощенной схеме замещения (фиг. 10, 50), в которой ветвь Z_0 отсутствует, незначительная проводимость этой ветви $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ принята равной нулю.

10,14. Потеря напряжения в трансформаторе и его к. п. д.

Рассмотрим теперь трансформатор, работающий с изменяющейся нагрузкой, и выясним:

1) как изменяется напряжение на зажимах вторичной обмотки при изменении нагрузки и неизменном первичном напряжении,

2) каков к. п. д. трансформатора.

Потеря напряжения характеризуется арифметической разностью величин

$$U_{20} - U_2.$$

Подсчитывая потерю напряжения в процентах по отношению к номинальному, получим

$$e = \frac{U_{20} - U_2}{U_{20}} 100 = \frac{U_{20}' - U_2'}{U_{20}'} 100 = \frac{U_1 - U_2'}{U_1} 100,$$

так как при холостом ходе можно считать, что $U_{20}' = U_1$.

Величина $U_1 - U_2'$ по упрощенной приведенной векторной диаграмме (фиг. 10, 51) может быть выражена арифметической разностью отрезков $OT - OQ = QN$. Описывая из точки O окружность радиусом OT до пересечения в точке N с продолжением OQ и опуская на линию ON перпендикуляр из точки T , получим отрезок TR . Последний представляет собой среднюю пропорциональную между отсекаемыми им отрезками диаметра, равного $2ON$.

Поэтому

$$(TR)^2 = (2ON - NR) NR \approx 2ON \cdot NR,$$

откуда

$$NR = \frac{(TR)^2}{2ON}$$

и

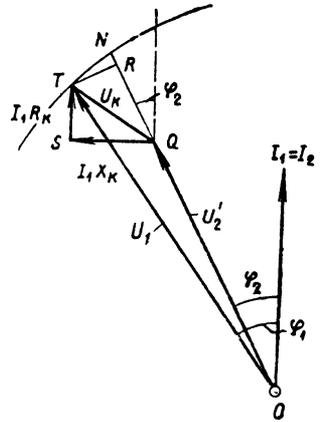
$$QN = QR + NR = QR + \frac{(TR)^2}{2ON}.$$

Разделив оба члена этого равенства на $U_1 = ON$ и умножив на 100, получаем

$$\frac{QN}{ON} 100 = \frac{QR}{ON} 100 + \frac{(TR)^2}{2(ON)^2} 100 = \frac{QR}{ON} 100 + \left(\frac{TR}{ON} 100 \right)^2 \frac{1}{200}.$$

Обозначая

$$a = \frac{QR}{ON} 100 \quad \text{и} \quad b = \frac{TR}{ON} 100$$



Фиг. 10, 51,

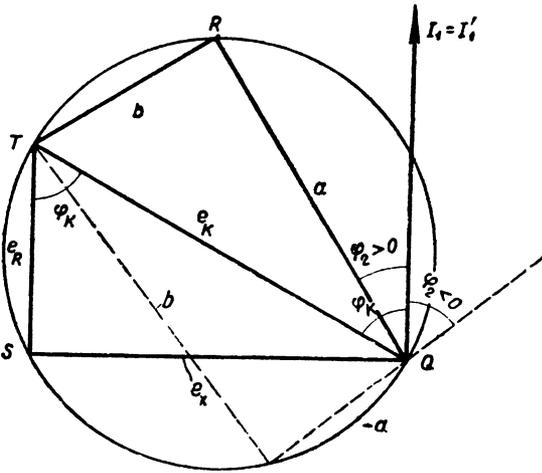
и имея в виду, что потеря напряжения (в процентах)

$$e = \frac{OT - OQ}{OT} 100 = \frac{ON - OQ}{ON} 100 = \frac{QN}{ON} 100,$$

получим

$$e = a + \frac{b^2}{200}. \tag{10,42}$$

Треугольник TQR можно построить, пользуясь только треугольником короткого замыкания QST . Действительно, выделяя этот треугольник из приведенной векторной диаграммы (фиг. 10,52) и построив на его гипотенузе, как на диаметре, окружность, найдем, что луч QR , проведенный под углом φ_2 к вертикальной оси, совпадающей с вектором тока $I_1 = I_2'$, дает на пересечении с окружностью точку, являющуюся основанием перпендикуляра TR . Если стороны треугольника короткого замыкания измерять в процентах от номинального напряжения, обозначая



Фиг. 10,52.

то отрезки QR и TR дадут a и b также в процентах от номинального напряжения.

$$e_R = \frac{U_R}{U_1} 100; \quad e_x = \frac{U_x}{U_1} 100 \quad \text{и}$$

$$e_k = \frac{U_k}{U_1} 100,$$

Подставляя полученные значения a и b в формулу (10,42), мы и определяем величину потери напряжения в трансформаторе в процентах от номинального напряжения, т. е. от напряжения холостого хода.

Из фиг. 10,52 можно видеть, как меняется потеря напряжения в трансформаторе при изменении угла сдвига фаз φ_2 приемника. При отрицательных углах, т. е. при емкостной нагрузке, величина a может стать отрицательной, проходя через нуль при $|\varphi_2| = \frac{\pi}{2} - \varphi_k$. Если по

абсолютной величине $|a| > \frac{b^2}{200}$, то потеря напряжения оказывается отрицательной, т. е. напряжение на вторичных зажимах при нагрузке больше, чем при холостом ходе.

Коэффициентом полезного действия трансформатора η называется отношение мощности, отдаваемой трансформатором, к мощности, потребляемой им из первичной сети; к. п. д. в процентах выражается равенством

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} 100 = \frac{P_2}{P_2 + \Sigma \Delta P} 100,$$

где $\Sigma \Delta P$ обозначает сумму потерь мощности в трансформаторе. Эти потери складываются:

- 1) из джоулевых потерь в первичной и вторичной обмотках трансформатора (потери в меди),
- 2) из потерь на гистерезис и вихревые токи (потери в железе).

Таким образом

$$\Sigma \Delta P = P_m + P_{жс}$$

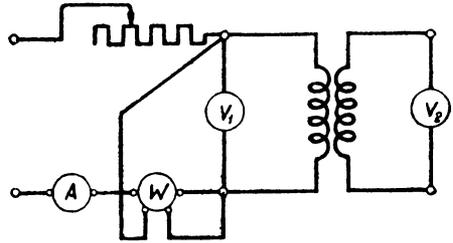
Потери в меди можно считать равными мощности, потребляемой трансформатором в опыте короткого замыкания (при токе, равном номинальному), так как потерями в железе из-за незначительной величины магнитного потока при опыте короткого замыкания можно пренебречь. Следовательно,

$$P_{\text{н}} = I_1^2 R_k = P_k.$$

Потери в железе могут быть определены из опыта холостого хода, производимого по схеме фиг. 10, 53.

В этом опыте производятся измерения:

- 1) подводимого напряжения U_{10} ;
- 2) тока в первичной обмотке I_{10} ;
- 3) потребляемой трансформатором мощности P_0 при разомкнутой вторичной обмотке и
- 4) напряжения U_{20} .



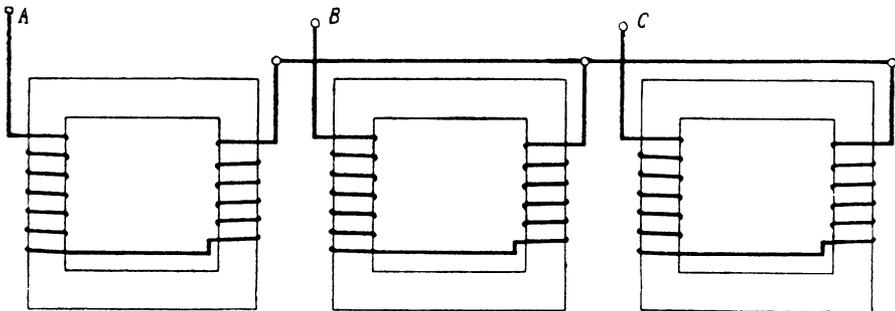
Фиг. 10, 53.

Так как ток холостого хода трансформатора обычно невелик, то джоулевыми потерями при холостом ходе $I_0^2 R_k$ можно пренебречь, считая, что вся поглощаемая трансформатором мощность P_0 тратится на потери в железе. Так как магнитный поток при холостом ходе мало отличается от потока при полной нагрузке, то можно считать потери в железе мало отличающимися от соответствующих потерь при холостом ходе, т. е. принять $P_0 \approx P_{\text{ж}}$; к. п. д. трансформатора определится тогда из отношения

$$\eta = \frac{P_2 \cdot 100}{P_2 + P_0 + P_k}. \quad (10, 43)$$

10,15. Трехфазные трансформаторы

Для трансформирования токов и напряжений в трехфазной сети можно применить три однофазных трансформатора, соединив их звездой или треугольником, или воспользоваться специальным трехфазным трансформатором.

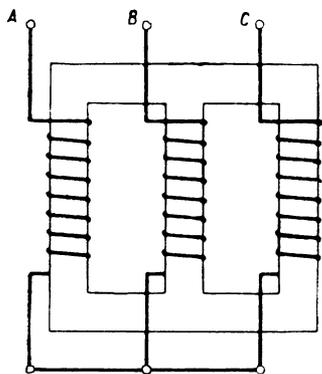


Фиг. 10, 54.

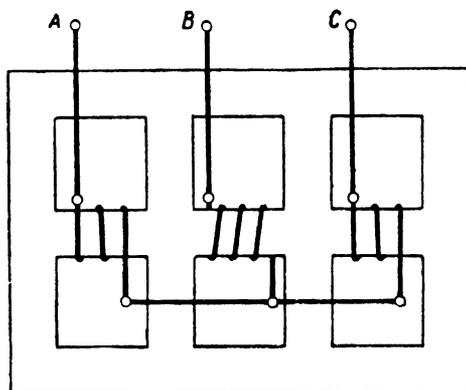
Первый способ схематически представлен на фиг. 10, 54. Трехфазный трансформатор в его двух модификациях представлен на фиг. 10, 55 и 10, 56.

В трехфазном трансформаторе связаны между собой не только обмотки, но и магнитные системы отдельных фаз, образуя общую трех-

сердечниковую магнитную систему. В „стержневом“ типе трансформатора, изображенном на фиг. 10, 55, магнитный поток среднего сердечника, переходя в ярмо, разветвляется в двух направлениях, тогда как магнитные потоки крайних сердечников переходят в ярмо, не разветвляясь. В броневого типа трансформатора, представленном на фиг. 10, 56, магнитный



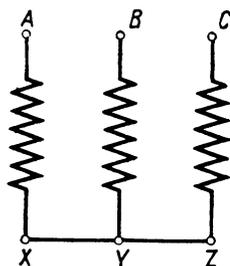
Фиг. 10, 55.



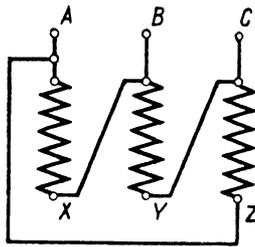
Фиг. 10, 56.

поток каждого сердечника разветвляется по ярму в двух направлениях. В обоих случаях магнитная система трансформатора получается несимметричной из-за разной длины силовых линий, крайних и средней фазы в отдельности. В силу этого намагничивающие токи в отдельных фазах получаются неодинаковыми. Однако при нормальной нагрузке трансформатора эта несимметрия существенного значения не имеет.

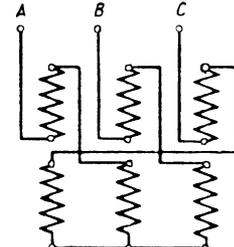
Обмотки трехфазного трансформатора могут быть соединены между собой звездой (фиг. 10, 54, 10, 55, 10, 56 и 10, 57), треугольником (фиг. 10, 58) и, наконец, зигзагом (фиг. 10, 59). Последнее соединение получается



Фиг. 10, 57.



Фиг. 10, 58.



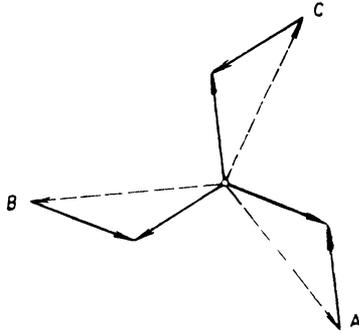
Фиг. 10, 59.

путем деления обмотки каждой фазы на две части и встречного соединения первой части обмотки каждой фазы со второй частью обмотки другой фазы.

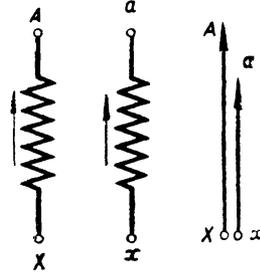
Эта схема применяется в сетях с неравномерной нагрузкой фаз. Векторная диаграмма такого соединения приведена на фиг. 10, 60.

Начала обмоток трех фаз высокого напряжения обозначаются по ОСТ буквами A, B, C , концы обмоток соответственно буквами X, Y, Z . Начала обмоток низкого напряжения обозначаются буквами a, b, c , а концы их буквами x, y, z . Так как соединение каждой из обмоток трансформатора (первичной или вторичной) может быть выполнено звездой, тре-

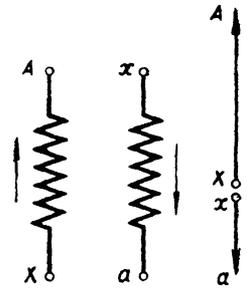
угольником или зигзагом, то для каждой группы соединений в трехфазном трансформаторе возможно весьма большое число комбинаций относительного расположения фаз линейного вторичного напряжения по отношению к соответствующим фазам линейного первичного напряжения.



Фиг. 10, 60.

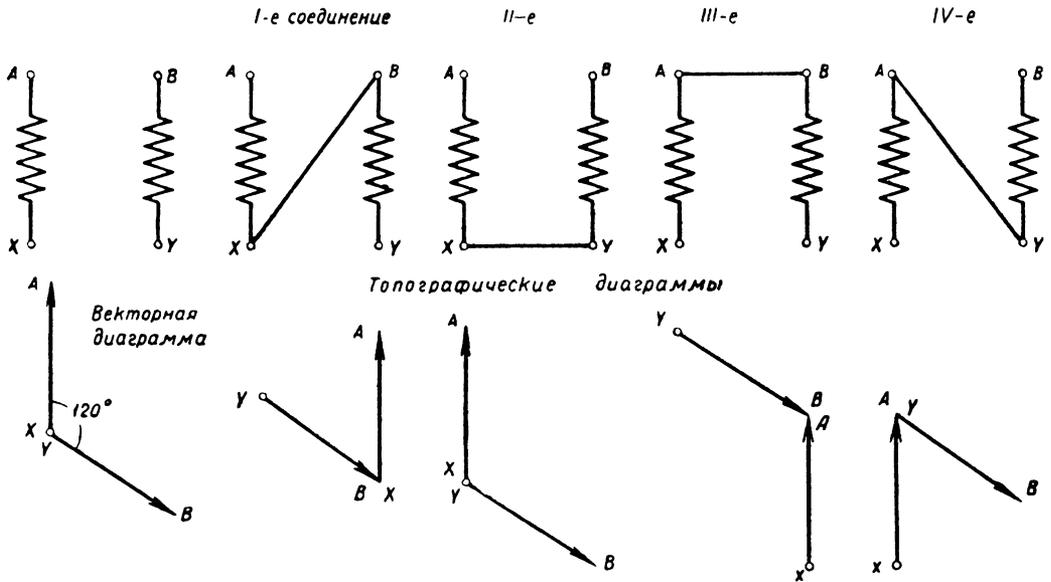


Фиг. 10, 61.



Фиг. 10, 62.

Фазовый сдвиг линейных напряжений для каждой группы соединений определяется по топографической диаграмме, которая дает возможность определить напряжение между отдельными наружными выводами.



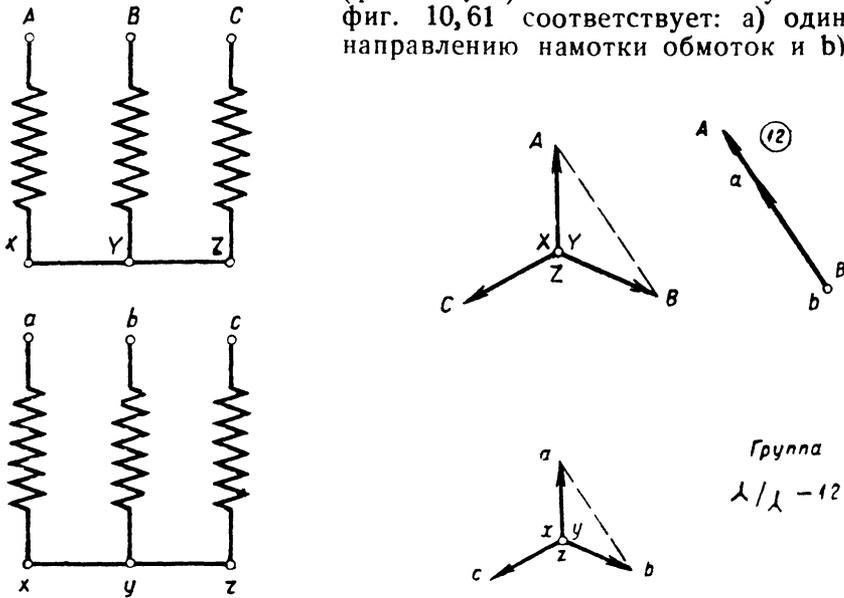
Фиг. 10, 63.

Последнее весьма важно для включения трансформаторов на параллельную работу, правильного соединения приборов и т. п.

При построении топографической диаграммы трансформатора должны быть соблюдены следующие условия:

1. Векторы напряжений в разных обмотках, расположенных на одном и том же сердечнике, должны иметь одинаковое направление (фиг. 10, 61) или же противоположное (фиг. 10, 62) в зависимости от того, будут ли в схеме, изображающей соответствующие фазы обмотки, одно-

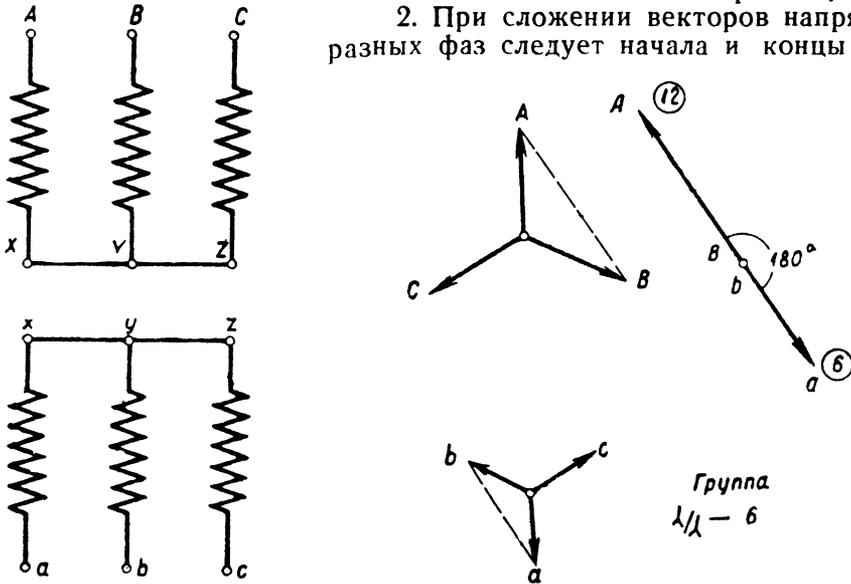
именные буквы *Aa* или *Xx* находиться обе наверху или внизу (фиг. 10,61) или же одна из одноименных букв окажется наверху, а другая — внизу (фиг. 10,62). Обозначение букв по схеме фиг. 10,61 соответствует: а) одинаковому направлению намотки обмоток и б) выбору



Фиг. 10, 64.

начал обеих обмоток наверху или внизу по отношению к сердечнику. Если же одно из этих двух условий не выполнено, то разметка концов на схеме делается согласно фиг. 10,62.

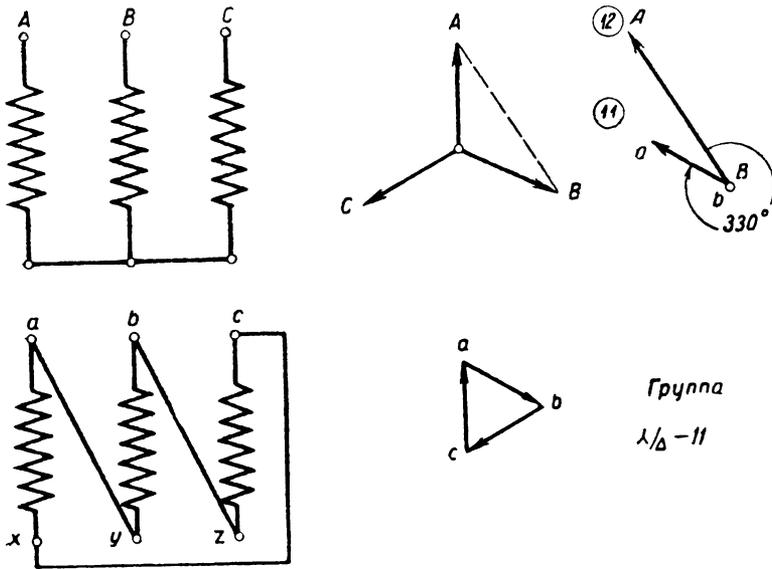
2. При сложении векторов напряжений разных фаз следует начала и концы векто-



Фиг. 10, 65.

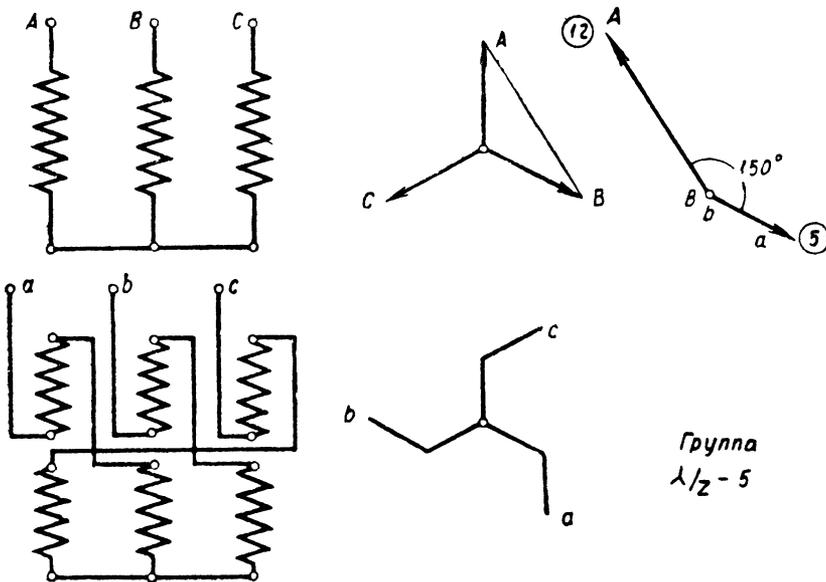
ров соединять так, как соединены между собой начала и концы соответствующих обмоток.

На фиг. 10, 63 приведены топографические диаграммы для четырех вариантов соединения обмоток двух фаз, напряжения которых сдвинуты



Фиг. 10, 66.

друг относительно друга на 120° . На фиг. 10, 64—10, 67 приведены топографические диаграммы для нескольких групп соединений трансформаторов.



Фиг. 10, 67.

торов. Угол, образуемый векторами напряжения между одноименными зажимами обмоток высшего и низшего напряжений, характеризует передачу фазы.

Так, для схемы соединений, показанной на фиг. 11, 29, этот угол составляет 0° , для схемы фиг. 10, 65— 180° , для схемы фиг. 10, 66— 330° , а для схемы фиг. 10, 67— 150° .

Согласно ОСТ сдвиг фаз между обмотками высшего и низшего напряжений указывается расположением стрелок часов. Линейное напряжение, действующее между двумя зажимами обмотки высшего напряжения трансформатора, совмещается с большой (минутной) стрелкой часов, а напряжение, действующее между соответствующими зажимами обмотки низшего напряжения, — с малой (часовой) стрелкой часов.

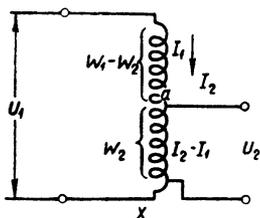
Если большую стрелку считать постоянно установленной на 12 часах, то малая стрелка показывает определенный час, например, 12, 6, 5 и т. д. Час и является дополнительной характеристикой группы.

Так, схема фиг. 10, 64 должна быть отнесена к группе Δ/Δ -12, схема фиг. 10, 65 к группе Δ/Δ -6, схема фиг. 10, 66 — к группе Δ/Δ -11, и, наконец, схема фиг. 10, 67 — к группе Δ/Z -5.

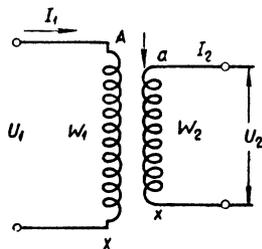
Нагрузочный режим каждой из фаз трехфазного трансформатора при равномерной нагрузке не отличается от нагрузочного режима однофазного трансформатора. Поэтому все те соотношения и векторные диаграммы, которые были установлены для однофазного трансформатора, применимы и для трехфазного. При неравномерной нагрузке фаз трехфазный трансформатор имеет свои особенности, рассмотрение которых является, однако, предметом специального курса трансформаторов.

10.16. Автотрансформаторы

В тех случаях, когда требуется небольшое изменение напряжения, более экономичными оказываются трансформаторы, у которых часть обмотки высшего напряжения служит одновременно и обмоткой низшего



Фиг. 10, 68.



Фиг. 10, 69.

напряжения (фиг. 10, 68). Такие трансформаторы носят название автотрансформаторов.

Распределение тока и напряжения в обмотках автотрансформатора легче уясняется, если подходить к автотрансформатору путем постепенного видоизменения нормального трансформатора с двумя обмотками (фиг. 10, 69), к первичной обмотке которого с числом витков w_1 подведено напряжение U_1 , а во вторичной обмотке с числом витков w_2 наводится э. д. с. E_2 . Токи в первичной и вторичной обмотках обозначим соответственно I_1 и I_2 .

Если соединить обмотку низшего напряжения с обмоткой высшего так, чтобы зажим x был непосредственно соединен с зажимом X , а зажим a был присоединен к такой точке высоковольтной обмотки, которая от-

стоит от зажима X на число витков, равное числу витков обмотки низшего напряжения (фиг. 10, 69), то, заменяя затем две параллельные обмотки одной, мы и получим автотрансформатор.

По верхней части обмотки автотрансформатора (фиг. 10, 68) с числом витков $w_1 - w_2$ продолжает идти ток I_1 , а в объединенной части обмотки ток равен разности токов $I_2 - I_1$, поскольку эти токи в нормальном трансформаторе направлены в разные стороны.

Благодаря меньшему току в значительной части своей обмотки автотрансформатор требует для своего выполнения меньше меди, а следовательно, и железа, и дает более высокий к. п. д.

Выгодность автотрансформатора по сравнению с нормальным трансформатором можно оценить, если сравнить расчетную мощность автотрансформатора с номинальной мощностью, на которую автотрансформатор работает.

Расчетную мощность мы получим, если будем рассматривать автотрансформатор как трансформатор с двумя обмотками, полученными путем деления обмотки автотрансформатора в точке ответвления на две части так, как это показано на фиг. 10, 70.

Мощность такого трансформатора будет равна

$$P_{рас} = (U_1 - U_2)I_1 \approx U_2(I_2 - I_1).$$

Беря отношение расчетной мощности к номинальной мощности автотрансформатора, мы получим

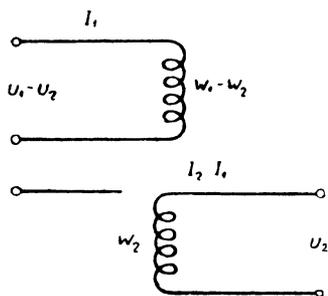
$$\frac{P_{рас}}{P_{ном}} = \frac{(U_1 - U_2)I_1}{U_1 I_1} = 1 - \frac{w_2}{w_1} = 1 - \frac{1}{k}.$$

Эта формула показывает, что отношение мощностей, расчетной и номинальной, определяется коэффициентом трансформации. Так, например,

- | | |
|------------------|--|
| 1) при $k = 1,1$ | $\frac{P_{рас}}{P_{ном}} = 0,09$ |
| 2) „ $k = 1,25$ | $\frac{P_{рас}}{P_{ном}} = 0,2$ |
| 3) „ $k = 2$ | $\frac{P_{рас}}{P_{ном}} = 0,5$ |
| 4) „ $k = 4$ | $\frac{P_{рас}}{P_{ном}} = 0,75$ и т. д. |

Таким образом с приближением коэффициента трансформации к единице применение автотрансформатора делается особенно выгодным, по мере повышения k экономия от применения автотрансформатора уменьшается.

Применение автотрансформаторов при больших коэффициентах трансформации ограничивается еще и тем, что электрическое соединение сетей низшего и высшего напряжений может повести к появлению недопустимо высоких напряжений в сети низшего напряжения и поэтому требует повышения изоляции сети низшего напряжения, а также других мер предосторожности при обслуживании установки. При питании автотрансформатора со стороны общей части обмотки и отдаче энергии от внешних зажимов автотрансформатора мы получаем повысительный автотрансформатор. Соотношение токов и напряжений в этом случае остается тем же, как и в понижающем автотрансформаторе.



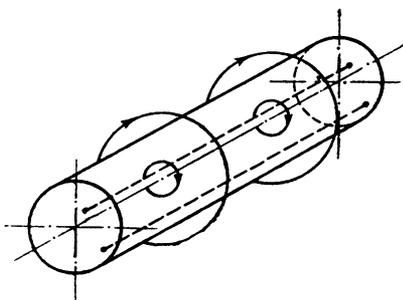
Фиг. 10, 70.

10,17. Поверхностный эффект в проводниках с током

Проводники с током создают, как известно, магнитное поле как вне проводников, так и внутри их.

В то время как магнитные линии внешнего поля охватывают собой проводник в целом, магнитные линии внутри проводника, как видно из фиг. 10,71, сцеплены с разным числом нитей, из которых мы можем мысленно считать состоящим проводник. Нити, лежащие ближе к оси проводника, охватываются большим числом магнитных линий, а нити, лежащие ближе к поверхности, меньшим числом таких линий.

Такое положение приводит к тому, что при изменениях магнитного поля, обусловленных переменным током, в нитях проводника, лежащих ближе к его оси, э. д. с. самоиндукции будет больше, чем у нитей, лежащих ближе к поверхности проводника. Это в свою очередь ведет к тому, что плотность тока распределяется неравномерно по сечению проводника, поскольку внешнее напряжение, создающее ток в проводнике, для всех нитей одинаково. Плотность тока для центральных нитей получается в этом случае меньшей, а для нитей, лежащих у поверхности проводника, — большей.



Фиг. 10, 71.

Ток таким образом смещается от оси проводника к его поверхности. Это явление носит название **поверхностного эффекта** (скинэффекта).

Явление поверхностного эффекта сказывается тем сильнее, чем больше внутреннее поле проводника и чем быстрее это поле изменяется. Это значит, что поверхностный эффект в железных проводах больше, чем в медных, и сказывается этот эффект тем сильнее, чем больше сечение провода и чем выше частота переменного тока в проводнике.

Неравномерное распределение тока ведет к худшему использованию сечения проводника и, следовательно, к повышению его активного сопротивления, благодаря чему повышаются джоулевы потери в проводнике.

Расчет степени неравномерности распределения тока и связанного с этим изменения активного и реактивного сопротивлений проводника мы проведем для простейшего случая цилиндрического бесконечно длинного проводника.

Поперечное сечение такого проводника показано на фиг. 10,72. Нити тока проходят перпендикулярно к взятому сечению, а линии магнитного поля располагаются concentрическими кольцами.

Одно такое кольцо с радиусом x и толщиной dx выделено из данного сечения. Обозначая плотность тока в выделенном бесконечно тонком кольце через δ_x , а напряженности поля на его поверхностях через H_x и $H_x + dH_x$, мы на основе закона полного тока, делая один раз обход по внешнему контуру элемента, а затем по внутреннему контуру, можем написать, что разность этих двух магнитных напряжений обхода должна быть равна току внутри выделенного элемента, т. е.

$$(H_x + dH_x) 2\pi (x + dx) - H_x 2\pi x = 2\pi x dx \delta_x$$

или

$$\frac{dH_x}{dx} + \frac{H_x}{x} = \delta_x.$$

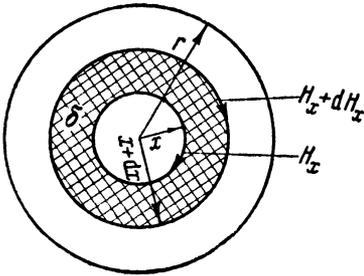
Умножая все слагаемые данного уравнения на μ , мы получаем первое уравнение, связывающее плотность тока с магнитной индукцией:

$$\frac{dB_x}{dx} + \frac{B_x}{x} = \mu \delta_x. \quad (10, 44)$$

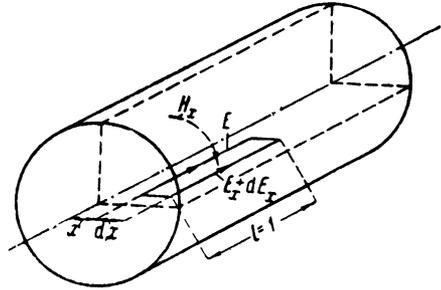
Второе уравнение, связывающее те же величины, мы можем получить, если для выделенного по длине проводника цилиндра (фиг. 10, 73), мы найдем связь между электрическим напряжением обхода по контуру, проведенному внутри этого цилиндра, как показано на фиг. 10, 73, и магнитным потоком, пронизывающим это сечение.

Приняв во внимание, что длина выделенного цилиндра взята нами равной единице, мы можем написать, что

$$E_x - (E_x + dE_x) = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (B_x dx)$$



Фиг. 10, 72.



Фиг. 10, 73.

или

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{dB_x}{dt}.$$

Умножая обе части этого равенства на удельную проводимость проводника γ , мы получаем

$$\frac{d\delta_x}{dx} = \gamma \frac{dB_x}{dt} \quad (10, 45)$$

— второе уравнение, связывающее плотность тока с магнитной индукцией.

В приведенные уравнения входят мгновенные значения величин B и δ , изменяющихся во времени и ориентированных в пространстве вполне определенным образом для каждой точки проводника.

Считая рассматриваемые величины синусоидальными функциями времени, мы можем записать их в виде комплексов

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \sqrt{2} \dot{\Delta} e^{j\omega t}, \\ B &= \sqrt{2} \dot{B} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (10, 46)$$

Здесь $\dot{\Delta}$ и \dot{B} — комплексы, определяющие расположение векторов Δ и B в комплексной плоскости в начальный момент времени, а их модули — действующие значения этих величин.

Подставляя значения δ и B из уравнений (10, 46), а также производной

$$\frac{dB}{dt} = \sqrt{2} j\omega B e^{j\omega t}$$

в уравнения (10, 44) и (10, 45), мы получаем

$$\frac{d\dot{B}}{dx} + \frac{\dot{B}}{x} = \mu\dot{\Delta}; \quad (10, 44')$$

$$\frac{d\dot{\Delta}}{dx} = j\gamma\omega\dot{B}. \quad (10, 45')$$

Решая эти уравнения совместно, мы приходим к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$\frac{d^2\dot{\Delta}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{\Delta}}{dx} - j\mu\gamma\omega\dot{\Delta} = 0.$$

Обозначая коэффициент при неизвестном в этом уравнении через

$$\dot{k}^2 = -j\mu\gamma\omega, \quad (10, 47)$$

мы получаем

$$\frac{d^2\dot{\Delta}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{\Delta}}{dx} + \dot{k}^2\dot{\Delta} = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\dot{\Delta} = \dot{A}J_0(\dot{k}x), \quad (10, 48)$$

где \dot{A} — произвольная постоянная интегрирования, а $J_0(\dot{k}x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Поскольку при $x=0$ плотность тока на оси является конечной величиной, то найденная нами функция нулевого порядка является в то же время функцией первого рода. Она может быть определена путем разложения ее в степенной ряд

$$J_0(\dot{k}x) = 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{\dot{k}x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{\dot{k}x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{\dot{k}x}{2}\right)^6 + \dots$$

Результаты вычислений по данному ряду функции Бесселя для различных значений аргумента этой функции приведены в табл. 10, 3.

Постоянная интегрирования \dot{A} может быть нами предварительно определена по максимальной плотности на поверхности проводника $\dot{\Delta}_{\max}$.

Подставляя в уравнение (10, 48) вместо x радиус провода r , а вместо $\dot{\Delta}$ величину $\dot{\Delta}_{\max}$, мы получаем

$$\dot{A} = \frac{\dot{\Delta}_{\max}}{J_0(\dot{k}r)}.$$

Тогда уравнение (10, 48) дает нам формулу

$$\dot{\Delta} = \dot{\Delta}_{\max} \frac{J_0(\dot{k}x)}{J_0(\dot{k}r)}, \quad (10, 49)$$

которая позволяет определить комплекс вектора плотности тока в любой точке сечения проводника в зависимости от комплекса этого вектора на поверхности проводника.

В рассматриваемом случае комплекс аргумента функции определяется комплексом

$$\dot{k} = \sqrt{-j\mu\gamma\omega} = \sqrt{\mu\gamma\omega e^{-j90^\circ}} = \sqrt{\mu\gamma\omega} e^{-j45^\circ},$$

так как второй множитель в аргументе функции Бесселя является действительной величиной.

Числовые значения функции Бесселя для комплексного аргумента с углом $\varphi = 45^\circ$ приведены в табл. 10, 3.

Таблица 10,3

Значения функции Бесселя нулевого (J_0) и первого порядка (J_1) для комплексного аргумента с углом $\varphi = 45^\circ$

z	$J_0(z < 45^\circ)$		$J_1(z < 45^\circ)$		z	$J_0(z < 45^\circ)$		$J_1(z < 45^\circ)$	
	ρ_0	φ_0°	ρ_1	φ_1°		ρ_0	φ_0°	ρ_1	φ_1°
0,1	1,0000	0,15	0,0500	- 44,931	5,1	6,6203	183,002	6,1793	97,533
0,2	1,0001	0,567	0,1000	- 44,714	5,2	7,0339	187,071	6,5745	101,518
0,3	1,0002	1,283	0,1500	- 44,350	5,3	7,4752	191,140	6,9960	105,504
0,4	1,0003	2,283	0,2000	- 43,854	5,4	7,9455	195,209	7,4456	109,492
0,5	1,0010	3,617	0,2500	- 43,213	5,5	8,4473	199,279	7,9253	113,482
0,6	1,0020	5,150	0,3001	- 42,422	5,6	8,9821	203,348	8,4370	117,473
0,7	1,0037	7,000	0,3502	- 41,489	5,7	9,5524	207,417	8,9830	121,465
0,8	1,0063	9,150	0,4010	- 40,358	5,8	10,160	211,487	9,5657	125,459
0,9	1,0102	11,550	0,4508	- 39,207	5,9	10,809	215,556	10,187	129,454
1,0	1,0155	14,217	0,5014	- 37,837	6,0	11,501	219,625	10,850	133,452
1,1	1,0226	17,167	0,5508	- 36,343	6,1	12,239	223,694	11,558	137,450
1,2	1,0319	20,333	0,6032	- 34,706	6,2	13,027	227,762	12,313	141,452
1,3	1,0436	23,750	0,6549	- 32,928	6,3	13,865	231,830	13,119	145,454
1,4	1,0584	27,367	0,7070	- 31,011	6,4	14,761	235,987	13,978	149,458
1,5	1,0768	31,183	0,7599	- 28,952	6,5	15,717	239,964	14,896	153,462
1,6	1,0983	35,167	0,8136	- 26,768	6,6	16,737	244,031	15,876	157,469
1,7	1,1243	39,300	0,8683	- 24,451	6,7	17,825	248,098	16,921	161,477
1,8	1,1545	43,550	0,9233	- 22,000	6,8	18,986	252,164	18,038	165,486
1,9	1,1890	47,883	0,9819	- 19,428	6,9	20,225	256,228	19,228	169,498
2,0	1,2286	52,283	1,0411	- 16,732	7,0	21,548	260,294	20,500	173,510
2,1	1,2743	56,750	1,1022	- 13,923	7,1	22,959	264,358	21,858	177,523
2,2	1,3250	61,233	1,1659	- 11,000	7,2	24,465	268,422	23,308	181,536
2,3	1,3810	65,717	1,2325	- 7,970	7,3	26,074	272,486	24,856	185,554
2,4	1,4421	70,183	1,3019	- 4,838	7,4	27,790	276,540	26,509	189,571
2,5	1,5111	74,650	1,3740	- 1,613	7,5	29,622	280,612	28,274	193,589
2,6	1,5830	79,114	1,4505	1,701	7,6	31,578	284,674	30,158	197,608
2,7	1,6665	83,449	1,5300	5,099	7,7	33,667	288,736	32,172	201,627
2,8	1,7541	87,873	1,6148	8,570	7,8	35,896	292,798	34,321	205,646
2,9	1,8486	92,215	1,7045	12,111	7,9	38,276	296,859	36,617	209,670
3,0	1,9502	96,518	1,7998	15,714	8,0	40,817	300,920	39,070	213,692
3,1	2,0592	100,789	1,9012	19,372	8,1	43,532	304,981	41,691	217,716
3,2	2,1761	105,032	2,0088	23,081	8,2	46,429	309,042	44,487	221,739
3,3	2,3000	109,252	2,1236	26,833	8,3	49,524	313,102	44,476	225,764
3,4	2,4342	113,433	2,2459	30,622	8,4	52,829	317,162	50,670	229,790
3,5	2,5759	117,605	2,3766	34,445	8,5	56,359	321,222	54,081	233,815
3,6	2,7285	127,160	2,5155	38,295	8,6	60,129	325,282	57,725	237,842
3,7	2,8895	125,875	2,6640	42,171	8,7	64,155	329,341	61,618	241,868
3,8	3,0613	129,943	2,8226	46,067	8,8	68,455	333,400	65,779	245,896
3,9	3,2443	134,096	2,9920	49,978	8,9	73,049	337,459	70,222	249,925
4,0	3,4391	138,191	3,1729	53,905	9,0	77,957	341,516	74,971	253,953
4,1	3,6463	142,279	3,3662	57,840	9,1	83,199	345,577	80,048	257,981
4,2	3,8671	146,361	3,5722	61,789	9,2	88,796	349,566	85,466	262,011
4,3	4,1015	150,444	3,7924	65,743	9,3	94,781	353,693	91,259	266,041
4,4	4,3518	154,513	4,0274	69,706	9,4	101,128	357,751	97,449	270,071
4,5	4,6179	158,586	4,2783	73,672	9,5	108,003	361,811	104,063	274,102
4,6	4,9012	162,657	4,5460	77,638	9,6	115,291	365,868	111,131	278,133
4,7	5,2015	166,726	4,8317	81,615	9,7	123,110	369,958	118,683	282,164
4,8	5,5244	170,795	5,1390	85,590	9,8	131,429	373,983	126,752	286,197
4,9	5,8696	174,865	5,4619	89,571	9,9	140,300	378,002	135,374	290,229
5,0	6,2312	178,933	5,8118	93,549	10	149,831	382,099	144,586	294,266

В столбце z этой таблицы даны модули аргумента от 1 до 10; в столбце J_0 — приведены числовые значения модуля функции Бесселя, которая также является комплексом, а в столбце φ_0° — аргумент этой функции.

Воспользуемся данными этой таблицы для определения величины и фазы вектора плотности тока на оси провода, размеры которого и материал заданы.

В качестве примера рассмотрим поверхностный эффект в проводе с $r=0,18$ см, выполненном в одном случае из меди, а в другом случае из железа, при протекании через провод тока с частотой $f=50$ Hz.

Для медного провода

$$\mu = \mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-8} \text{ Н/см}, \text{ а } \gamma = 5,7 \cdot 10^5 \frac{1}{\Omega \cdot \text{см}}$$

Для железного провода, приняв $\mu_r = 2000$, мы получаем

$$\mu = \mu_0 \mu_r = 1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^3 = 2,512 \cdot 10^{-5} \text{ Н/см},$$

а

$$\gamma = 10^5 \frac{1}{\Omega \cdot \text{см}}.$$

Для медного провода

$$k = \sqrt{\mu \gamma \omega} = \sqrt{1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 5,7 \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 50} = 1,5,$$

а для железного

$$k = \sqrt{2,512 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 50} = 28.$$

$J_0(kx)$ для $x=0$ равно единице, а для $r=0,18$ см и для модуля аргумента $z=kr$ значение этой функции мы найдем, пользуясь таблицей 10,3.

Для медного провода численное значение модуля аргумента

$$z_m = k \cdot r = 1,5 \cdot 0,18 = 0,27,$$

а для железного провода

$$z_{жс} = k \cdot r = 28 \cdot 0,18 = 5,05.$$

Подставляя числовое значение функции, даваемое таблицей, в формулу (10.49), мы получаем плотность тока на оси медного провода

$$\dot{\Delta}_0 = \frac{\dot{\Delta}_{\max}}{1,00017} e^{j1,0^\circ},$$

а на оси железного провода

$$\dot{\Delta}_0 = \frac{\dot{\Delta}_{\max}}{6,425} e^{j180^\circ}.$$

Эти формулы показывают, что в то время как для медного провода плотность тока на оси мало отличается, как по величине, так и по фазе, от плотности тока на поверхности его, отношение соответствующих величин для железного провода сильно отстает от единицы. Плотность тока на оси железного провода, будучи в 6,425 раза меньше плотности тока на поверхности проводника, отличается в то же время по фазе от плотности тока на поверхности провода, а именно на угол $\varphi=180^\circ$. Это говорит о том, что мгновенные значения векторов плотности тока на оси провода и на его поверхности имеют прямо противоположное направление. Если бы мы взяли сечение провода больше рассмотренного

или повысили бы частоту переменного тока, то поверхностный эффект и в медном проводе был бы весьма заметен.

Для определения активного сопротивления провода при наличии поверхностного эффекта найдем вначале зависимость полного тока, протекающего по проводнику, от плотности тока на его поверхности:

$$j_m = \int_0^r 2\pi x \dot{\delta}_x dx = \frac{2\pi \Delta_{\max}}{J_0(\dot{k}r_0)} \int_0^r x J_0(\dot{k}x) dx.$$

Из теории бесселевых функций известно, что

$$\int \dot{z} J_0(\dot{z}) d\dot{z} = \dot{z} J_1(\dot{z}),$$

где $J_1(z)$ есть функция Бесселя первого порядка от аргумента \dot{z} .

Поэтому

$$J_m = 2\pi \dot{\Delta}_{\max} \frac{\dot{z}}{\dot{k}} \frac{J_1(\dot{k}r)}{J_0(\dot{k}r)}.$$

Числовые значения комплексной функции $J_1(\dot{k}r)$ для комплексного аргумента с $\varphi = 45^\circ$ также приведены в табл. 10,3.

Падение напряжения на единицу длины проводника от полного тока будет равно

$$\dot{E}_m = j_m \frac{\dot{k}}{\gamma^2 \pi r} \frac{J_0(\dot{k}r)}{J_1(\dot{k}r)}.$$

Комплексный множитель при токе определяет собою комплекс полного сопротивления проводника с длиной, равной единице.

Определяя активную составляющую этого комплекса сопротивления через R_a , а реактивную составляющую, представляющую собой реактивное сопротивление провода от внутреннего магнитного потока через ωL_i , мы можем записать

$$R_a + j\omega L_i = \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{\dot{k}r}{\pi r^2} \frac{J_0(\dot{k}r)}{J_1(\dot{k}r)}.$$

Обозначая далее

$$J_0(\dot{k}r) = p_0 e^{j\varphi_0},$$

$$J_1(\dot{k}r) = p_1 e^{j\varphi_1},$$

$$\dot{k} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} (1 - j), \quad \text{где } |k| = \sqrt{\mu\omega\gamma},$$

и определяя активное и реактивное сопротивления проводника при переменном токе в долях от сопротивления этого проводника при постоянном токе

$$R = \frac{1}{\gamma \cdot \pi r^2},$$

мы получаем

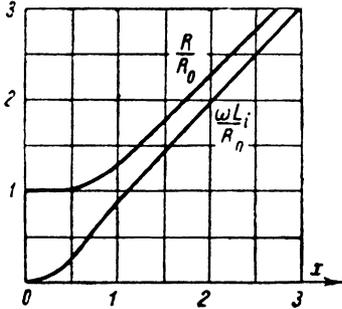
$$\begin{aligned} \frac{R_a}{R} + j \frac{\omega L_i}{R} &= \frac{|k| \cdot r}{2\sqrt{2}} \frac{p_0}{p_1} (1 - j) [\cos(\varphi_0 - \varphi_1) + j \sin(\varphi_0 - \varphi_1)] = \\ &= \frac{|k| \cdot r}{2\sqrt{2}} \frac{p_0}{p_1} [\sin(\varphi_0 - \varphi_1) + \cos(\varphi_0 - \varphi_1) + j [\sin(\varphi_0 - \varphi_1) - \cos(\varphi_0 - \varphi_1)]], \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{R} &= \frac{|k|r}{2\sqrt{2}} \frac{p_0}{p_1} [\sin(\varphi_0 - \varphi_1) + \cos(\varphi_0 - \varphi_1)] = \\ &= \frac{|k| \cdot r}{2} \frac{p_0}{p_1} \sin(\varphi_0 - \varphi_1 + 45^\circ) \end{aligned} \quad (10, 50)$$

и

$$\frac{\omega L_i}{R} = \frac{|k| \cdot r}{2} \frac{p_0}{p_1} \sin(\varphi_0 - \varphi_1 - 45^\circ). \quad (10, 51)$$



Фиг. 10, 74.

По формулам (10, 50) и (10, 51) мы и определяем отношение активного и реактивного сопротивлений (от внутреннего потока) по отношению к сопротивлению проводника при постоянном токе.

Эти отношения для разных значений $x = \frac{r}{2} \sqrt{\pi f \gamma \mu}$ определяются кривыми на фигуре 10, 74.

Пример 10, 3. Определим активное и реактивное сопротивления медного проводника с диаметром $d = 0,1$ см при частоте переменного тока $f = 100\,000$ Hz.

$$k = \sqrt{\mu \gamma \omega} = \sqrt{1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 5,7 \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 100\,000} = 68.$$

Модуль аргумента

$$z = kr = 68 \cdot 0,05 = 3,4.$$

Для данного модуля находим по таблице

$$p_0 = 2,434, \quad \varphi_0 = 113,43^\circ,$$

$$p_1 = 2,246, \quad \varphi_1 = 30,62^\circ,$$

откуда

$$\varphi_0 - \varphi_1 + 45^\circ = 127,8^\circ,$$

и поэтому

$$\frac{R_a}{R} = 1,7 \frac{2,434}{2,246} \sin 127,8^\circ = 1,7 \frac{2,434}{2,246} \sin 52,2^\circ = 1,45;$$

$$\frac{\omega L_i}{R} = 1,7 \frac{2,434}{2,246} \sin 37,8^\circ = 1,126.$$

§ 10.18. Поверхностный эффект в железных листах

При определении потерь на токи Фуко в железных листах мы полагаем, что магнитная индукция распределяется равномерно по сечению листов. В действительности равномерное распределение индукции невозможно в силу того, что токи Фуко, возникающие в железе, создают свое поле, направленное противоположно внешнему магнитному полю.

Для количественного определения распределения индукции по сечению железного листа выделим элементарный слой (фиг. 10, 75) толщиной δx , удаленный от оси листа на расстояние x .

Линии магнитной индукции проходят перпендикулярно к сечению листа, а линии тока перпендикулярны к линиям индукции и лежат в плоскостях, параллельных сечению листа. Выделим в этом слое участок дли-

ной и высотой в 1 см. Обходя замкнутый контур $abcd$, мы можем написать на основе закона электромагнитной индукции, что

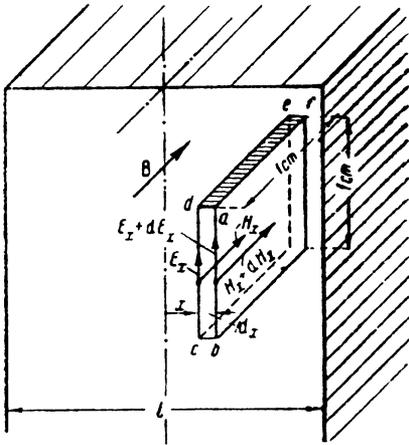
$$E_x - (E_x + dE_x) = - \frac{d}{dt} B_x dx$$

или

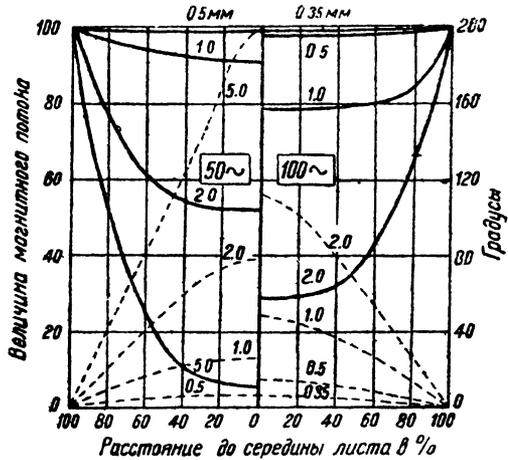
$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{dB_x}{dt}. \tag{10, 52}$$

Ток, проходящий через заштрихованное сечение $defa$ рассматриваемого элементарного слоя (фиг. 10, 75), будет равен

$$i_x = E_x \gamma dx.$$



Фиг. 10, 75.



Фиг. 10, 76.

Обходя по контуру $defa$, мы на основе закона полного тока можем написать, что

$$H_x - (H_x + dH_x) = \gamma E_x dx$$

или

$$dH_x = - \gamma E_x dx.$$

Умножая на μ , мы получаем второе уравнение, связывающее B с E :

$$dB_x = - \mu \gamma E_x dx. \tag{10, 53}$$

Считая E и B синусоидальными функциями времени, мы можем уравнения записать в комплексной форме

$$\frac{d\dot{E}_x}{dx} = j\omega \dot{B}_x, \tag{10, 52'}$$

$$\frac{d\dot{B}_x}{dx} = \mu \gamma \dot{E}_x. \tag{10, 53'}$$

Подставляя значение E_x из уравнения (10, 53') в уравнение (10, 52'), мы получаем

$$\frac{d^2 \dot{B}_x}{dx^2} = - j\mu\omega\gamma \dot{B}_x. \tag{10, 54}$$

Вводя обозначение

$$k^2 = - j\mu\omega\gamma \quad \text{или} \quad k = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu\omega\gamma},$$

мы получаем для уравнения (10,54) решение

$$\dot{B}_{\max} = \dot{A} \operatorname{ch} kx. \quad (10,55)$$

Постоянную интегрирования мы можем определить из условия, что на поверхности листа $x = \frac{l}{2}$ индукция является максимальной:

$$\dot{B}_{\max} = \dot{A} \operatorname{ch} k \frac{l}{2}.$$

Определяя из этого уравнения постоянную \dot{A} и подставляя значение этой постоянной в уравнение (10,55), мы получаем

$$\dot{B}_x = B_{\max} \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} kl}.$$

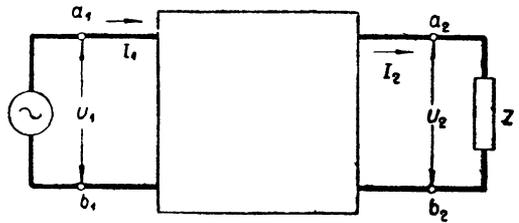
Рассчитанные по данной формуле кривые относительного распределения индукции по сечению железных листов для различных толщин листов для двух частот $f = 50 \text{ Hz}$ и $f = 100 \text{ Hz}$ показаны на фиг. 10,76. Сплошные кривые показывают относительные величины индукции в процентах по отношению к индукции у поверхности, принятой за 100%.

Пунктирные кривые показывают изменения аргумента у комплекса индукции по мере перемещения от поверхности листа к его середине. Шкала для углов дана на этой же фиг. 10,76, справа.

ВСЕОБЩАЯ ЦЕПЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА И КРУГОВАЯ ДИАГРАММА

11.1. Всеобщая цепь переменного тока

При преобразовании электрической энергии в трансформаторе при передаче энергии по проводам и в ряде других случаев мы имеем дело с передающей энергией электрической цепью, к которой с одной стороны приключен генератор, питающий цепь, а с другой стороны — сопротивление Z (нагрузка), получающее энергию от цепи. Подобная передающая цепь носит название четырехполюсника. Из числа четырех ее зажимов (фиг. 11,1) зажимы a_1 и b_1 , соединенные с источником тока, мы называем первичными, а зажимы a_2 и b_2 , к которым приключена нагрузка, — вторичными.



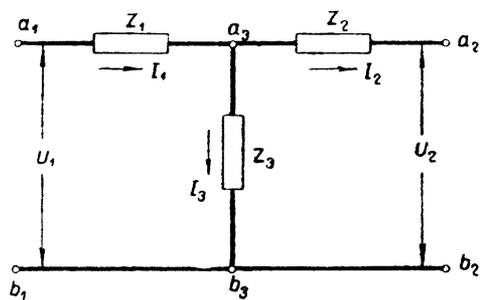
Фиг. 11. 1.

Соответственно будем называть первичными: напряжение U_1 на зажимах a_1b_1 , ток I_1 и мощность P_1 , подводимую к четырехполюснику; вторичными же — напряжение U_2 на зажимах a_2b_2 (нагрузка), ток нагрузки I_2 и мощность P_2 , отдаваемую цепью нагрузке.

Если сопротивления, из которых состоит цепь, и схема их соединений известны, то при любых заданных значениях первичного напряжения U_1 и сопротивления нагрузки Z можно, применив законы Кирхгофа, найти токи I_1 и I_2 , напряжение U_2 и мощности P_1 и P_2 .

Может случиться, что в двух разных четырехполюсниках при любых одинаковых нагрузках Z одинаковые напряжения U_1 вызывают одинаковые по величине и относительной фазе первичные и вторичные токи и, следовательно, одинаковые напряжения U_2 и мощности P_1 и P_2 . Такие четырехполюсники будем называть эквивалентными.

При рассмотрении рабочего процесса в каком-либо четырехполюснике мы можем заменить его другим, ему эквивалентным, так как соотношения между первичными и вторичными токами и напряжениями в обоих четырехполюсниках одинаковы.



Фиг. 11, 2.

Так, в главе о трансформаторах было показано, что для получения соотношений между токами и напряжениями в трансформаторе можно воспользоваться схемой, изображенной на фиг. 11,2, которая при соответствующем подборе сопротивлений Z_1 , Z_2 и Z_3 будет являться эквивалентной схемой трансформатора.

Эта схема может также лечь в основу рассмотрения электрических явлений в линиях электропередач, в асинхронном двигателе и в ряде других цепей. Поэтому она носит название всеобщей цепи. По своему внешнему виду она называется также Т-образной схемой замещения.

В ближайших параграфах мы выведем соотношения между токами и напряжениями в Т-образной схеме и познакомимся с рядом ее свойств; этими же свойствами обладают и все цепи (четырёхполюсники), эквивалентной которым является данная схема.

11.2. Режим нагрузки

Допустим, что нам заданы напряжение и ток нагрузки \dot{U}_2 и \dot{I}_2 , а также все сопротивления всеобщей цепи, т. е. Z_1 , Z_2 , Z_3 (фиг. 11,3). Выразим через заданные величины первичный ток и первичное напряжение.

Напряжение на ответвлении (между точками a_3b_3) равно сумме вторичного напряжения и падения напряжения в сопротивлении Z_2 (вторичной цепи), т. е.

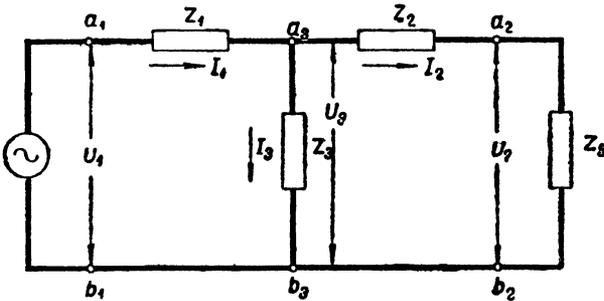
$$\dot{U}_3 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2. \quad (11,1)$$

Ток в ответвлении (в сопротивлении Z_3)

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{Z_3} = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_2}{Z_3} = \frac{\dot{U}_2}{Z_3} + \dot{I}_2 \frac{Z_2}{Z_3}. \quad (11,2)$$

Первичный ток \dot{I}_1 равен сумме вторичного тока и тока в ответвлении

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3. \quad (11,3)$$



Фиг. 11, 3.

Подставляя в (11,3) значение \dot{I}_3 из (11,2), получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z_3} + \dot{I}_2 \frac{Z_2}{Z_3} = \\ &= \frac{\dot{U}_2}{Z_3} + \dot{I}_2 \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right), \end{aligned}$$

и окончательно

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{1}{Z_3} + \dot{I}_2 \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right). \quad (11,4)$$

Первичное напряжение \dot{U}_1 равно сумме напряжения на ответвлении и падения напряжения в сопротивлении Z_1 (в первичной цепи)

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_3 + \dot{I}_1 Z_1. \quad (11,5)$$

Подставляя сюда значение \dot{U}_3 из (11,1) и значение \dot{I}_1 из (11,4) и вынося \dot{U}_2 и \dot{I}_2 за скобки, получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 + i_2 Z_2 + \left[\dot{U}_2 \frac{1}{Z_3} + I_2 \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3} \right) \right] Z_1 = \\ &= \dot{U}_2 + i_2 Z_2 + \dot{U}_2 \frac{Z_1}{Z_3} + i_2 \left(Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \right), \end{aligned}$$

и окончательно

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3} \right) + i_2 \left(Z_2 + Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \right). \quad (11, 6)$$

Для сокращения письма обозначим комплексные коэффициенты при \dot{U}_2 и i_2 в выражениях (11, 6) и (11, 4) буквами \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} и \dot{D} , тогда

$$\dot{U}_1 = \dot{A} \dot{U}_2 + \dot{B} i_2; \quad (11, 7)$$

$$i_1 = \dot{C} \dot{U}_2 + \dot{D} i_2, \quad (11, 8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= A e^{j\alpha} = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3} \right); \\ B &= B e^{j\beta} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}; \\ \dot{C} &= C e^{j\gamma} = \frac{1}{Z_3}; \\ \dot{D} &= D e^{j\delta} = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}. \end{aligned} \right\} \quad (11, 9)$$

Соотношения (11, 7) и (11, 8) имеют место при любых значениях \dot{U}_1 и любом Z .

11.3. П-образная схема замещения

При расчете линий электропередач часто применяется схема замещения, изображенная на фиг. 11, 4. Эта схема носит название П-образной.

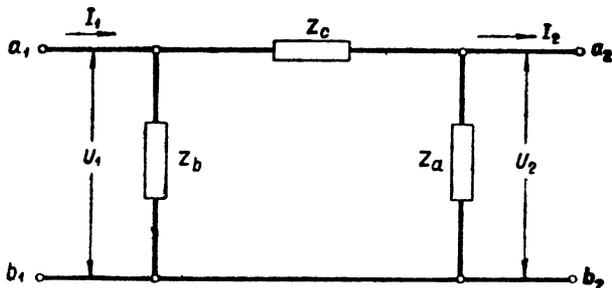
Покажем, что соотношения (11, 7) и (11, 8) имеют место и при П-образной схеме, и найдем выражения коэффициентов \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} и \dot{D} для этого случая.

Сопrotивления Z_a , Z_b и Z_c в П-образной цепи соединены треугольником (фиг. 11, 5). Пользуясь методом Кеннели (стр. 59), мы можем заменить его эквивалентной звездой, составленной из сопротивлений Z_1 , Z_2 и Z_3 (фиг. 11, 2 и 11, 6).

Сопrotивления эквивалентной звезды находим по формулам, выведенным в § 1,24:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}; \\ Z_2 &= \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}; \quad Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}. \end{aligned} \quad (11, 10)$$

Схема, полученная после замены (фиг. 11, 6), нам уже знакома: заменив в П-образной схеме треугольник эквивалентной звездой, мы получим Т-образную схему, эквивалентную данной нам П-образной.

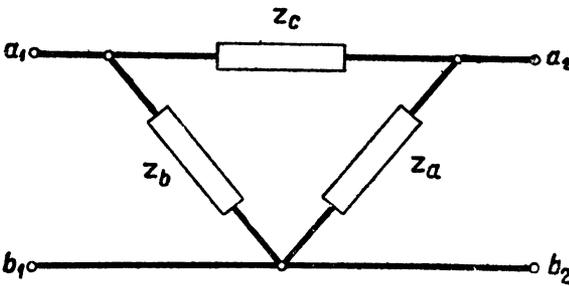


Фиг. 11, 4.

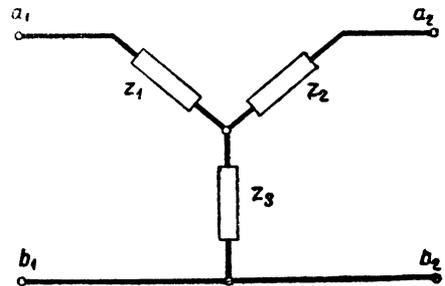
В силу эквивалентности обеих схем соотношения между первичными и вторичными напряжениями и токами одинаковы в обеих цепях. Следовательно, формулы (11,7) и (11,8), выведенные в предыдущем параграфе для Т-образной схемы, справедливы и для П-образной схемы.

Подставив в формулы (11,9) для коэффициентов \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} и \dot{D} значения сопротивлений Z_1 , Z_2 и Z_3 из (11,10), получим:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = 1 + \frac{Z_b Z_c (Z_a + Z_b + Z_c)}{(Z_a + Z_b + Z_c) Z_a Z_b} = 1 + \frac{Z_c}{Z_a}; \\ \dot{B} &= Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} + \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c} + \\ &+ \frac{Z_b Z_c \cdot Z_c Z_a (Z_a + Z_b + Z_c)}{(Z_a + Z_b + Z_c) (Z_a + Z_b + Z_c) Z_a Z_b} = \frac{Z_b Z_c + Z_c Z_a + Z_c^2}{Z_a + Z_b + Z_c} = \\ &= \frac{Z_c (Z_a + Z_b + Z_c)}{Z_a + Z_b + Z_c} = Z_c; \\ \dot{C} &= \frac{1}{Z_3} = \frac{Z_a + Z_b + Z_c}{Z_a Z_b}; \\ \dot{D} &= 1 + \frac{Z_2}{Z_3} = 1 + \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c} \cdot \frac{Z_a + Z_b + Z_c}{Z_a Z_b} = 1 + \frac{Z_c}{Z_b}.\end{aligned}$$



Фиг. 11, 5.



Фиг. 11, 6.

Таким образом для П-образной схемы имеем

$$\dot{U}_1 = \dot{A}\dot{U}_2 + \dot{B}\dot{i}_2; \quad (11,7)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{C}\dot{U}_2 + \dot{D}\dot{i}_2, \quad (11,8)$$

где

$$\left. \begin{aligned}\dot{A} &= 1 + \frac{Z_c}{Z_a}; \\ \dot{B} &= Z_c; \\ \dot{C} &= \frac{Z_a + Z_b + Z_c}{Z_a Z_b}; \\ \dot{D} &= 1 + \frac{Z_c}{Z_b}.\end{aligned} \right\} \quad (11,11)$$

Формулы (11,7) и (11,8) являются универсальными уравнениями четырехполюсников. В любых четырехполюсниках, если они составлены из сопротивлений, величина которых не зависит от тока, первичные напряжения и ток являются линейными функциями вторичных, выражаемыми формулами (11,7) и (11,8).

11,4. Холостой ход и короткое замыкание

Применим соотношения (11,7) и (11,8) для случая, когда $Z = \infty$, т. е. когда вторичные зажимы разомкнуты (холостой ход).

Напряжение \dot{U}_{10} , которое нужно установить на первичных зажимах для того, чтобы напряжение на разомкнутых вторичных зажимах имело заданное значение \dot{U}_2 , назовем первичным напряжением холостого хода. Потребляемый при этом первичный ток \dot{I}_{10} будем называть первичным током холостого хода. Так как при холостом ходе $\dot{I}_2 = 0$ (вторичная цепь разомкнута), то, подставляя это значение в (11,7) и (11,8), находим

$$\dot{U}_{10} = \dot{A}\dot{U}_2; \quad (11,12)$$

$$\dot{I}_{10} = \dot{C}\dot{U}_2. \quad (11,13)$$

Уравнение (11,12) показывает нам, что комплекс $\dot{A} = Ae^{j\alpha}$ равен отношению $\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_2}$. Модуль его A равен отношению первичного и вторичного напряжений, а аргумент α — разности фаз между ними. Комплекс \dot{A} имеет размерность отвлеченного числа. На основании уравнения (11,13) мы находим, что $\dot{C} = Ce^{j\gamma} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_2}$ модуль C равен отношению первичного тока холостого хода к вторичному напряжению; аргумент его γ — сдвигу фаз между ними. \dot{C} имеет размерность проводимости.

Соединим теперь вторичные зажимы накоротко, т. е. сделаем $Z = 0$. Зададимся некоторым значением вторичного тока (равным нормальному рабочему току вторичной цепи) и приложим к первичным зажимам цепи напряжение \dot{U}_{1k} (первичное напряжение короткого замыкания) такое, чтобы вторичный ток \dot{I}_2 имел заданное значение. Возникающий при этом первичный ток \dot{I}_{1k} будем называть первичным током короткого замыкания. Так как вторичные зажимы соединены накоротко, то $\dot{U}_2 = 0$. Подставив это значение в (11,7) и (11,8), получим

$$\dot{U}_{1k} = \dot{B}\dot{I}_2; \quad (11,14)$$

$$\dot{I}_{1k} = \dot{D}\dot{I}_2. \quad (11,15)$$

Отсюда $\dot{B} = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_2}$; модуль B равен отношению первичного напряжения короткого замыкания к вторичному току, а аргумент β — углу между ними. \dot{B} имеет размерность сопротивления. Комплекс $\dot{D} = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_2}$ не имеет размерности.

Сопоставив формулы (11,7) и (11,8), позволяющие по заданным \dot{U}_2 и \dot{I}_2 находить \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , с формулами (11,12) — (11,15), дающими первичные напряжения и ток при холостом ходе и коротком замыкании, получим, что

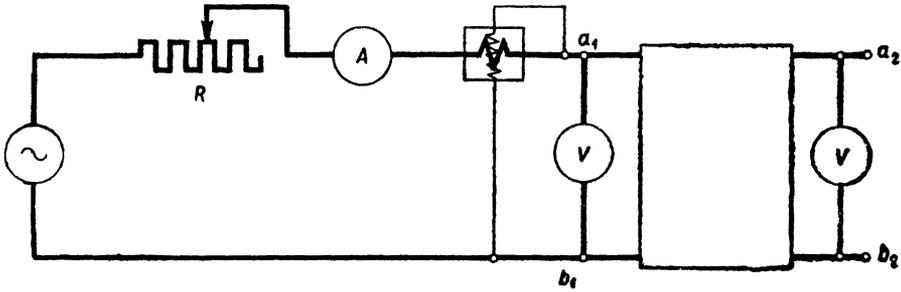
$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{10} + \dot{U}_{1k}; \quad (11,16)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{10} + \dot{I}_{1k}, \quad (11,17)$$

т. е. что первичное напряжение цепи при нагрузке Z , определяемой вторичным напряжением \dot{U}_2 и вторичным током \dot{I}_2 ($Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$), равно геомет-

рической сумме первичного напряжения холостого хода при заданном \dot{U}_2 и первичного напряжения короткого замыкания при заданном \dot{I}_2 ; первичный ток при нагрузке равен сумме первичных токов холостого хода и короткого замыкания.

Иными словами, мы можем рассматривать режим нагрузки, определяемой вторичным напряжением \dot{U}_2 и вторичным током \dot{I}_2 , как результат

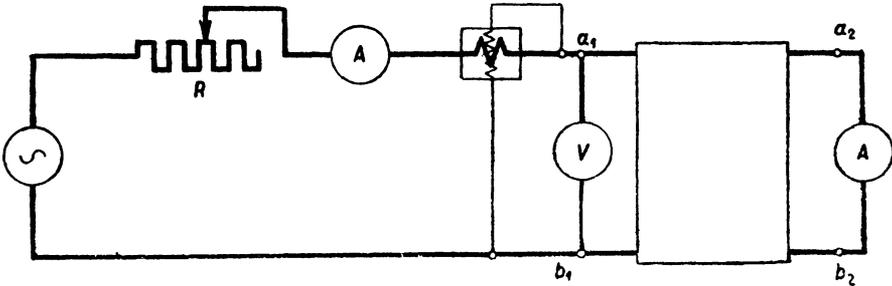


Фиг. 11, 7.

наложения режимов холостого хода (при заданном \dot{U}_2) и короткого замыкания (при заданном \dot{I}_2).

Для экспериментального определения первичных напряжений и токов холостого хода и короткого замыкания цепи, сопротивления которой неизвестны, нужно произвести опыт холостого хода и опыт короткого замыкания.

Схема опыта холостого хода изображена на фиг. 11,7. Первичное напряжение можно в известных пределах изменять при помощи реостата R .



Фиг. 11, 8.

При опыте нужно постепенно повышать первичное напряжение до тех пор, пока напряжение на зажимах $a_2 b_2$ (измеряемое приключенным к ним вольтметром) не достигнет заданного значения U_2 .

Приборы, включенные в первичную цепь, дают при этом интересующие нас значения U_{10} , I_{10} и P_{10} — мощность холостого хода.

Зная эти величины, легко найти и угол φ_{10} между \dot{U}_{10} и \dot{I}_{10} :

$$\cos \varphi_{10} = \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}}.$$

При опыте короткого замыкания зажимы a_2 и b_2 закорачиваются через амперметр (фиг. 11, 8). Первичное напряжение повышается до тех пор, пока ток во вторичной цепи не достигнет заданного значения I_2 .

Приборы, включенные в первичную цепь, дают U_{1k} , I_{1k} и P_{1k} — мощность короткого замыкания. Угол φ_{1k} между векторами \dot{U}_{1k} и \dot{I}_{1k} определяется по формуле

$$\cos \varphi_{1k} = \frac{P_{1k}}{U_{1k}I_{1k}}.$$

11.5. Построение векторов \dot{U}_1 и \dot{I}_1 по данным опытов холостого хода и короткого замыкания при симметричной схеме

T-образная схема, у которой сопротивления Z_1 и Z_2 одинаковы, т. е. $Z_1 = Z_2$, называется симметричной. Симметричную схему замещения имеют линии электропередач, а часто и трансформаторы, асинхронные двигатели и т. д.

В случае симметричной схемы для построения векторов первичных напряжения и тока, соответствующих определенной нагрузке, достаточно данных опыта холостого хода при заданном напряжении U_2 и опыта короткого замыкания при заданном токе I_2 , причем U_2 равно напряжению, а I_2 — току заданной нагрузки четырехполюсника.

Так как

$$\dot{U}_{10} = A\dot{U}_2 = \dot{U}_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right), \text{ а } \dot{I}_{1k} = D\dot{I}_2 = \dot{I}_2 \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right)$$

(см. § 11, 2 и 11, 4), то при $Z_1 = Z_2$ имеем

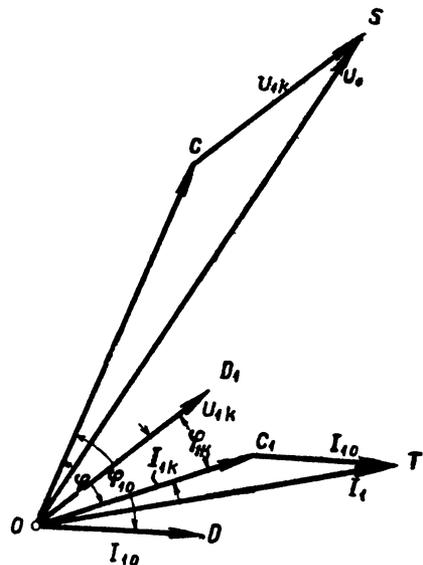
$$A = D = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} \text{ и}$$

$$\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}, \text{ или } \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{1k}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}. \quad (11, 18)$$

Из последнего соотношения следует, что в случае симметричной цепи угол между векторами \dot{U}_{10} и \dot{I}_{1k} равен углу φ между векторами \dot{U}_2 и \dot{I}_2 , определяемому внешним сопротивлением $Z \left(Z = ze^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right)$.

Допустим, что U_{10} , I_{10} , $\cos \varphi_{10}$ и U_{1k} , I_{1k} и $\cos \varphi_{1k}$ известны. Требуется построить векторы \dot{U}_1 и \dot{I}_1 при заданном $\cos \varphi$ нагрузки. Для этого строим векторы \dot{U}_{10} и \dot{I}_{1k} под углом φ друг к другу, так как согласно предыдущему \dot{U}_{10} опережает \dot{I}_{1k} на такой же угол, на какой \dot{U}_2 опережает \dot{I}_2 , т. е. на угол φ .

Под углом φ_{10} к вектору \dot{U}_{10} строим вектор \dot{I}_{10} и под углом φ_{1k} к вектору \dot{I}_{1k} — вектор \dot{U}_{1k} . Складывая геометрически векторы \dot{U}_{1k} и \dot{U}_{10} , получим искомый вектор \dot{U}_1 , а сумма векторов \dot{I}_{1k} и \dot{I}_{10} дает нам вектор \dot{I}_1 ; указанное построение сделано на фиг. 11, 9.



Фиг. 11, 9.

Пример 11, 1. Определить первичное напряжение \dot{U}_1 , первичный ток \dot{I}_1 и первичную мощность P_1 однофазного трансформатора при работе его с нагрузкой $P_2 = 18,5 \text{ kW}$, вторичным напряжением $U_2 = 130 \text{ V}$ и вторичным током

$I_2 = 1790$ А, если при опыте холостого хода, произведенного при $\dot{U}_2 = 130$ В, получено

$$U_{10} = 380 \text{ В}; \quad I_{10} = 25 \text{ А}; \quad P_{10} = 500 \text{ Вт},$$

а при опыте короткого замыкания, произведенном при $I_2 = 1790$ А, получено

$$U_{1k} = 40 \text{ В}; \quad I_{1k} = 550 \text{ А}; \quad P_{1k} = 450 \text{ Вт}.$$

Схема замещения трансформатора предполагается симметричной. Нагрузка — с индуктивным сдвигом фаз.

Для построения векторной диаграммы вычисляем углы φ_{10} , φ_{1k} и φ :

$$\cos \varphi_{10} = \frac{P_{10}}{U_{10} I_{10}} = \frac{500}{25 \cdot 380} = 0,526; \quad \varphi_{10} = 58^\circ 15';$$

$$\cos \varphi_{1k} = \frac{P_{1k}}{U_{1k} I_{1k}} = \frac{450}{40 \cdot 550} = 0,205; \quad \varphi_{1k} = 78^\circ 72';$$

$$\cos \varphi = \frac{P_2}{U_2 I_2} = \frac{18500}{130 \cdot 1790} = 0,8; \quad \varphi = 36^\circ 50';$$

φ_{10} и φ_{1k} — положительны, так как из

предыдущей главы известно, что как при холостом ходе, так и при коротком замыкании напряжение, приложенное к трансформатору, опережает ток. Так как нагрузка трансформатора индуктивная, то φ положительно; \dot{U}_2 опережает \dot{I}_{1k} на угол $\varphi = 36^\circ 50'$.

Из предыдущего следует, что и \dot{U}_{10} опережает I_{1k} на такой же угол.

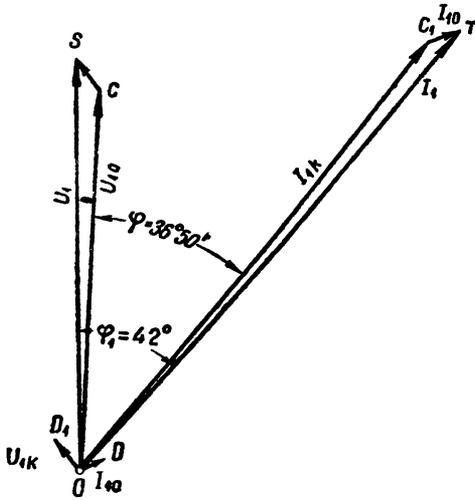
На фиг. 11,10 \dot{U}_{1k} и \dot{I}_{1k} построены в масштабе $m_1 = 5 \text{ В/мм}$ и $m_2 = 5 \text{ А/мм}$. Угол между ними $\varphi_{1k} = 78^\circ 12'$. Под углом $\varphi = 36^\circ 50'$ к вектору \dot{I}_{1k} построен вектор \dot{U}_{10} в соответствующем масштабе (\dot{U}_{10} опережает \dot{I}_{1k}), а под углом $\varphi_{10} = 58^\circ 15'$ к вектору U_{10} построен вектор \dot{I}_{10} (\dot{I}_{10} отстает от \dot{U}_{10}).

Геометрическая сумма векторов \dot{U}_{10} и \dot{U}_{1k} дает по величине и направлению вектор \dot{U}_1 , а сумма \dot{I}_{10} и \dot{I}_{1k} дает \dot{I}_1 . Из диаграммы получаем $\dot{U}_1 = 415 \text{ В}$.

$I_1 = 570$ А. Для определения P_1 проектируем \dot{I}_1 на направление вектора \dot{U}_1 и находим активную составляющую тока $I_{1a} = I_1 \cos \varphi = 424$ А. Мощность P_1 равна $P_1 = U_1 I_{1a} = 17600 \text{ кВт}$.

11,6. Построение векторов \dot{U}_1 и \dot{I}_1 по данным опытов холостого хода и короткого замыкания при несимметричной схеме

Если схема не симметрична, то предыдущее построение не может быть применено, так как неизвестен угол между векторами \dot{U}_{10} и \dot{I}_{1k} . Чтобы ориентировать векторы напряжения и тока холостого хода относительно соответствующих векторов короткого замыкания, найдем отношение $\dot{U}_{10} : \dot{U}_{1k}$.



Фиг. 11, 10.

Так как

$$\dot{U}_{1k} = \dot{B} \dot{I}_2, \text{ а } \dot{U}_{10} = \dot{A} \dot{U}_2,$$

то

$$\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{1k}} = \frac{\dot{A} \dot{U}_2}{\dot{B} \dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \cdot \frac{\dot{B}}{\dot{A}}. \quad (11, 19)$$

Подставляя сюда значения

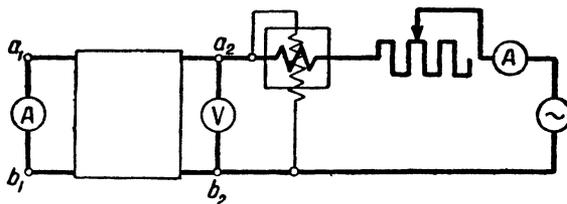
$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = z e^{j\varphi} \text{ и } \frac{\dot{B}}{\dot{A}} = \frac{B e^{j\beta}}{A e^{j\alpha}} = \frac{B}{A} e^{j(\beta-\alpha)}, \quad (11, 20)$$

получим

$$\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{1k}} = z e^{j\varphi} \cdot \frac{B}{A} e^{j(\beta-\alpha)},$$

или

$$\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{1k}} = z \frac{B}{A} e^{j\varphi - (\beta-\alpha)}. \quad (11, 21)$$



Фиг. 11, 11.

Угол δ между векторами \dot{U}_{10} и \dot{U}_{1k} , равный аргументу отношения $\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{1k}}$, согласно (11, 21) равен $\delta = \varphi - (\beta - \alpha)$.

Чтобы найти угол $(\beta - \alpha)$ экспериментальным путем, рассмотрим отношение $\frac{\dot{B}}{\dot{A}}$ (аргументом этого отношения и является $\beta - \alpha$).

Так как

$$\dot{B} = Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} + Z_1 = Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3} \right) + Z_1 = \dot{A} Z_2 + Z_1$$

и

$$\dot{A} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_3 + Z_1}{Z_3},$$

то

$$\frac{\dot{B}}{\dot{A}} = \frac{\dot{A} Z_2 + Z_1}{\dot{A}} = Z_2 + \frac{Z_1}{\dot{A}} = Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = Z_{k2} = Z_{k2} \varphi_{k2}. \quad (11, 22)$$

Как видно из последнего выражения, $\frac{\dot{B}}{\dot{A}} = Z_{k2}$ представляет собой полное сопротивление, которое получится, если, замкнув зажимы $a_1 b_1$ коротко, питать цепь со стороны вторичных зажимов. Обозначим комплекс этого сопротивления Z_{k2} , а его аргумент φ_{k2} , тогда

$$\beta - \alpha = \varphi_{k2}.$$

Следовательно, для построения \dot{U}_1 и \dot{I}_1 по опытам холостого хода и короткого замыкания нужно произвести три опыта:

1. Опыт холостого хода при напряжении U_2 на зажимах $a_2 b_2$. Получаем I_{10} , U_{10} , φ_{10} .
2. Опыт короткого замыкания (обычный) при вторичном токе I_2 . Получаем U_{1k} , I_{1k} , φ_{1k} .
3. Опыт короткого замыкания при питании со стороны вторичных зажимов (фиг. 11, 11).

Получаем ток, напряжение и мощность I_{k2} , U_{k2} и P_{k2} и вычисляем

$$\varphi_{k2} = \arccos \frac{P_{k2}}{U_{k2} I_{k2}} \quad \text{и} \quad \delta = \varphi - \varphi_{k2}$$

Полученных данных достаточно для построения \dot{U}_1 и \dot{I}_1 .

11,7. Круговая диаграмма

В практических условиях ряд цепей, имеющих Т-образную схему замещения, работает при неизменном значении первичного напряжения U_1 и меняющейся нагрузке Z . При изменении нагрузки меняются, конечно, по величине и фазе токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , напряжение U_2 и мощности P_1 и P_2 . Особенно интересен случай, когда $Z = R + jX$, меняясь, сохраняет неизменным отношение $\frac{X}{R}$, и следовательно, угол $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$.

Покажем, что в этом случае, т. е. при $U_1 = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, конец изменяющегося вектора \dot{I}_1 перемещается по дуге некоторой окружности.

Для доказательства выведем еще одно выражение для тока \dot{I}_1 . Имеем (фиг. 11,3)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3. \quad (11,23)$$

Но $\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{Z_3}$, а так как $\dot{U}_3 = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_1$, то

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_1}{Z_3}.$$

Подставив это выражение в (11,23), получим

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_1}{Z_3}, \text{ или } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_1}{Z_3} - \dot{I}_1 \frac{Z_1}{Z_3}.$$

Решим это уравнение относительно \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_1 \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\dot{U}_1}{Z_3} + \dot{I}_2, \text{ откуда } \dot{I}_1 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) = \frac{\dot{U}_1}{Z_3} + \dot{I}_2 \text{ и}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_3} + \frac{\dot{I}_2}{1 + \frac{Z_1}{Z_3}}. \quad (11,24)$$

Легко видеть, что $\frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_3}$ — это ток в первичной цепи при заданном первичном напряжении U_1 и разомкнутых вторичных зажимах, т. е. первичный ток холостого хода.

Обозначим его \dot{I}'_{10} :

$$\dot{I}'_{10} = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_3}^1.$$

Так как мы обозначили $1 + \frac{Z_1}{Z_3} = \dot{A}$ [см. § 11,2, формулу (11,3)], то выражение (11,24) можно написать в следующем виде:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_{10} + \frac{\dot{I}_2}{\dot{A}}. \quad (11,25)$$

¹ Не следует смешивать ток \dot{I}'_{10} с встречавшимся ранее током \dot{I}_{10} . Ток \dot{I}_{10} — это первичный ток холостого хода при первичном напряжении, устанавливаемом так, чтобы вторичное напряжение было равно номинальному напряжению при рабочем режиме, тогда как \dot{I}'_{10} — это первичный ток холостого хода при номинальном первичном напряжении; вторичное напряжение при этом, вообще говоря, не равно номинальному.

Мы представили вектор I_1 в виде суммы двух векторов, из которых первый I' не зависит от сопротивления нагрузки Z , тогда как второй i_2 меняется с изменением Z .

Чтобы получить представление о характере изменения вектора $\frac{i_2}{A}$ при $U_1 = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, воспользуемся выведенным в § 2 соотношением $\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + BI_2$, где

$$A = Ae^{j\alpha} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3},$$

$$B = Be^{j\beta} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} = AZ_3 + Z_1.$$

Разделим обе части этого равенства на произведение $A\dot{B}$; получим

$$\frac{\dot{U}_1}{A\dot{B}} = \frac{i_2}{A} + \frac{\dot{U}_2}{B}. \quad (11, 26)$$

При изменении Z векторы $\frac{i_2}{A}$ и $\frac{\dot{U}_2}{B}$ меняются. Однако сумма их при всех значениях Z остается постоянной. Кроме того, легко показать, что если только $\varphi = \text{const}$, то остается неизменным и угол между векторами $\frac{\dot{U}_2}{B}$ и $\frac{i_2}{A}$.

Действительно, если положить

$$i_2 = I_2 e^{j\psi},$$

то, так как

$$A = Ae^{j\alpha}; \quad B = Be^{j\beta}$$

и

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z = I_2 e^{j\psi} z e^{j\varphi},$$

имеем

$$\frac{\dot{U}_2}{B} = \frac{I_2 z e^{j(\psi+\varphi)}}{B e^{j\beta}} = \frac{I_2 z}{B} e^{j(\psi+\varphi-\beta)}$$

и

$$\frac{i_2}{A} = \frac{I_2 e^{j\psi}}{A e^{j\alpha}} = \frac{I_2}{A} e^{j(\psi-\alpha)}.$$

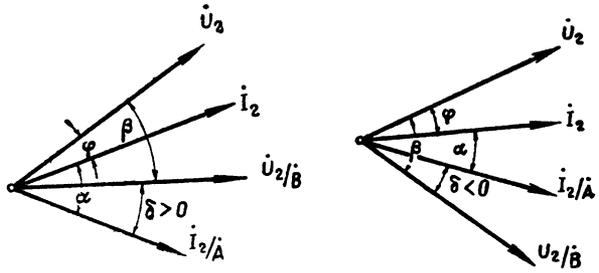
Угол δ , на который вектор $\frac{\dot{U}_2}{B}$ опережает вектор $\frac{i_2}{A}$, мы получим как разность аргументов этих векторов, т. е. $\delta = (\psi + \varphi - \beta) - (\psi - \alpha)$, откуда

$$\delta = \varphi + \alpha - \beta. \quad (11, 27)$$

Если $\delta > 0$, то вектор $\frac{\dot{U}_2}{B}$ опережает вектор $\frac{i_2}{A}$; если $\delta < 0$, он отстает.

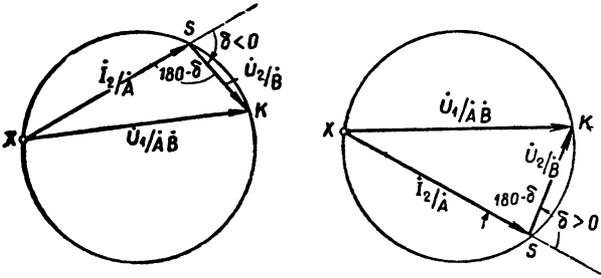
Из полученного выражения видно, что при $\varphi = \text{const}$ угол δ постоянен.

Расположение векторов i_2 , \dot{U}_2 , $\frac{i_2}{A}$ и $\frac{\dot{U}_2}{B}$ при $\delta < 0$ и $\delta > 0$ показано на фиг. 11, 12.



Фиг. 11, 12.

Вектор \dot{I}_2 отстает от \dot{U}_2 на угол φ ; $\frac{\dot{U}_2}{B}$ отстает от \dot{U}_2 на угол β ; $\frac{\dot{I}_2}{A}$ отстает от \dot{I}_2 на угол α (на чертеже углы α , β и φ взяты положительными). Полученное выше выражение $\delta = \varphi + \alpha - \beta$ легко получить непосредственно из чертежа.

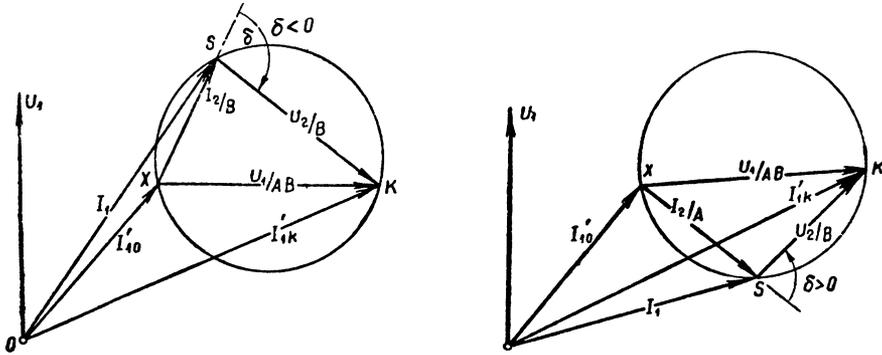


Фиг. 11, 13.

Покажем теперь, что с изменением Z (при $\varphi = \text{const}$) конец вектора $\frac{\dot{I}_2}{A}$ перемещается по дуге некоторой окружности.

Построим (фиг. 11, 13) вектор $\frac{\dot{I}_2}{A} = \overline{XS}$ и геометрически прибавим к нему вектор $\frac{\dot{U}_2}{B} = \overline{SK}$; согласно предыдущему угол δ между ними и их

геометрическая сумма $\frac{\dot{U}_1}{AB}$ при всех значениях Z имеют одно и то же значение. Следовательно, векторы $\frac{\dot{I}_2}{A}$ и $\frac{\dot{U}_2}{B}$ являются сторонами постоянного угла ($\angle XSK = 180 - \delta$), опирающегося на постоянный отрезок $XK = \frac{\dot{U}_1}{AB}$. Из геометрии известно, что вершина такого угла (точка S) должна лежать на окружности, для которой отрезок XK является хордой. На фиг. 11, 13 эти окружности построены для случаев $\delta > 0$ и $\delta < 0$.



Фиг. 11, 14.

Когда вторичные зажимы всеобщей цепи разомкнуты, т. е. $Z = \infty$ (холостой ход), то $I_2 = 0$, и следовательно, конец вектора $\frac{\dot{I}_2}{A}$ — точка S — совпадает с точкой X ; когда вторичные зажимы замкнуты накоротко т. е. $Z = 0$, то $U_2 = 0$, и точка S совпадает с точкой K ; при изменении Z от 0 до ∞ точка S перемещается по дуге окружности от точки K (точка короткого замыкания) до точки X (точка холостого хода).

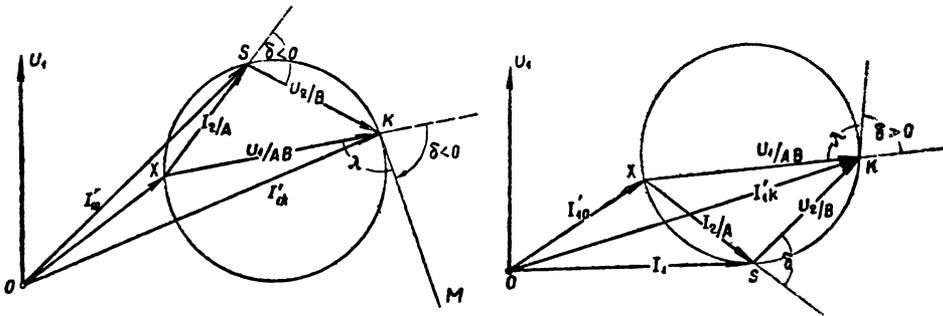
Теперь, пользуясь выражением (11,25), покажем, что при изменении Z конец вектора \dot{I}_1 перемещается тоже, по дуге окружности. Для этого

построим постоянный вектор $\dot{I}_{10}' = \overline{OX}$ так, чтобы конец его совпадал с началом переменного вектора $\frac{\dot{I}_2}{A} = \overline{XS}$ (фиг. 11,14). Так как вектор \overline{OS} является геометрической суммой векторов \dot{I}_{10}' и $\frac{\dot{I}_2}{A}$, то согласно (11,25), он равен вектору \dot{I}_1 .

При изменении Z от нуля до бесконечности вектор $\dot{I}_1 = \overline{OS}$ изменится от значения $\dot{I}_{1k}' = \overline{OK}$ (при коротком замыкании цепи) до значения $\dot{I}_{10}' = \overline{OX}$ (при холостом ходе); конец его при всех значениях Z находится на дуге окружности, проходящей через точки X и K .

11.8. Построение круговой диаграммы

Если заданы все сопротивления Т-образной схемы Z_1, Z_2 и Z_3 и первичное напряжение U_1 , то легко найти две точки круговой диаграммы — точки X и K . Действительно, первая является концом вектора первичного тока при холостом ходе \dot{I}_{10}' , вторая концом вектора \dot{I}_{1k}' — первичного тока при коротком замыкании.¹



Фиг. 11, 15.

Комплексные выражения обоих токов можно вычислить по формулам

$$\dot{I}_{10}' = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_3} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1k}' = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} \quad (11, 26)$$

Выбрав затем координатные оси и масштабы m_0 в В/см для напряжения и m в А/см для тока и построив векторы \dot{U}_1, \dot{I}_{10}' и \dot{I}_{1k}' , найдем точки X и K и, следовательно, вектор $\frac{\dot{U}_1}{AB} = \overline{KX}$. (Величина отрезка \overline{KX} , измеренная в основном масштабе m , дает величину $\frac{U_1}{AB}$ в амперах.)

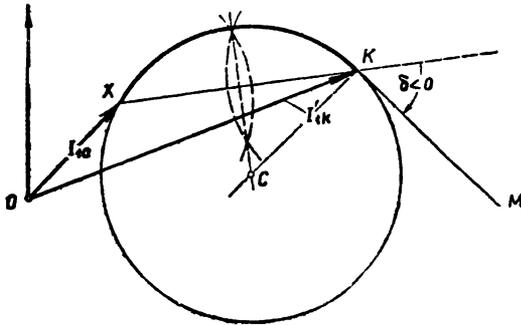
Однако две точки еще не определяют окружность. Чтобы вывести способ определения центра окружности, предположим, что круговая диаграмма у нас уже построена (фиг. 11,15) и проведем на ней полупрямую KM , касательную к окружности в точке K , направив ее в сторону, противоположную той части окружности, на которой лежат точки S — рабочие

¹ Не следует смешивать ток \dot{I}_{1k}' с встречавшимся ранее током \dot{I}_{1k} . Ток \dot{I}_{1k} — это первичный ток короткого замыкания при первичном напряжении, устанавливаемом так, чтобы вторичный ток был равен номинальному току \dot{I}_2 при рабочем режиме, тогда как \dot{I}_{1k}' — это первичный ток короткого замыкания при нормальном первичном напряжении.

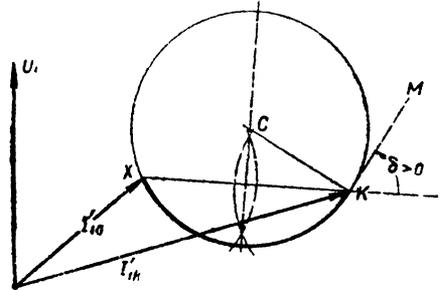
точки диаграммы. Угол λ , который образует проведенная полупрямая с хордой \overline{XK} , измеряется той же дугой, который измеряется $\angle XSK$. А так как последний равен $180 - \delta$, то и $\angle XKM = 180 - \delta$. Отсюда следует, что угол, составляемый полупрямой \overline{KM} , касательной к окружности, с продолжением хорды \overline{XK} , равен δ .

Из предыдущего ясно также, что если $\delta > 0$, то полупрямая, являющаяся касательной к окружности, опережает вектор $\frac{\dot{U}_1}{AB}$, а при $\delta < 0$ отстает.

Теперь нетрудно найти центр окружности при заданных Z_1, Z_2, Z_3, U_1 и φ . Выбрав масштаб для тока m (в А/см) и построив, как указано



Фиг. 11, 16.



Фиг. 11, 17.

выше, векторы \dot{I}'_{10} и \dot{I}'_{1k} , получим точки X и K (фиг. 11,16 и 11,17). Через эти точки проведем прямую. Вычислив аналитически угол $\delta = \varphi + \alpha - \beta$, проведем через точку K полупрямую \overline{KM} под углом δ к продолжению отрезка \overline{XK} . Угол δ откладывается против часовой стрелки, если он положителен, и по часовой стрелке, если он отрицателен. Отрезок \overline{XK} является хордой, а построенная полупрямая — касательной к искомой окружности. Построив перпендикуляр к отрезку \overline{XK} из его середины и перпендикуляр к полупрямой \overline{KM} в точке K , обозначим точку пересечения обоих перпендикуляров буквой C . Точка C и является центром искомой окружности.

Когда окружность построена, нужно еще выяснить, какая часть окружности является рабочей частью диаграммы. Если касательная \overline{KM} находится над прямой \overline{XK} ($\delta > 0$), то рабочей частью является дуга, лежащая под прямой \overline{XK} . Если же касательная \overline{KM} лежит ниже прямой \overline{XK} ($\delta < 0$), то рабочей дугой является верхняя часть окружности.

11,9. Вторичный ток и вторичное напряжение

Допустим, что при некотором значении Z первичный ток изображается в масштабе m отрезком \overline{OS} (фиг. 11,15) ($\overline{OS} = \dot{I}_1$). Мы видели, что отрезок \overline{XS} , являющийся геометрической разностью $\dot{I}_1 - \dot{I}'_{10}$, изображает в том же масштабе вектор $\frac{\dot{I}_2}{A}$. Величина этого отрезка \overline{XS} в см, умноженная на масштаб нашей диаграммы m (в А/см), дает величину $\frac{\dot{I}_2}{A}$ в амперах, т. е.

$$\overline{XS} m = \frac{I_2}{A}, \text{ откуда } I_2 = \overline{XS} \cdot mA.$$

равным 10 см). Точку пересечения этой окружности с направлением вектора \dot{I}_1 обозначим N . Основание перпендикуляра, опущенного из точки N на направление вектора \dot{U}_1 , обозначим N' . Из чертежа ясно (фиг. 11,18), что $\cos \varphi_1 = \frac{ON'}{ON}$. Если длина радиуса ON равна 10 см, то $\cos \varphi_1 = \frac{ON'}{10 \text{ см}}$; $\cos \varphi$ измеряется отрезком $\overline{ON'}$ в масштабе $m = 0,1 \text{ см}^{-1}$.

11,11. Вторичная мощность

Проведем через точку X (X — точка холостого хода) (фиг. 11,18) прямую \overline{XF} , касательную к окружности. Из точки S (конец вектора \dot{I}_1) проведем прямую, параллельную \overline{XF} . Точку пересечения этой прямой с отрезком \overline{XK} обозначим через L . Покажем, что длина отрезка \overline{SL} пропорциональна вторичной мощности

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi.$$

Для доказательства рассмотрим треугольники XSL и XSK . Угол FXS измеряется так же, как и угол SKX половиной дуги XS ; поэтому $\angle SKX = \angle FXS$ и, следовательно, $\angle LSX = \angle SKX$. Так как рассматриваемые треугольники имеют еще общий угол SXK , то они подобны. В силу этого можем написать

$$\frac{\overline{SL}}{\overline{XS}} = \frac{\overline{SK}}{\overline{XK}},$$

или, умножая все члены на масштаб m ,

$$\frac{\overline{SL}m}{\overline{XS}m} = \frac{\overline{SK}m}{\overline{XK}m}. \quad (11,27)$$

Но выше мы видели, что

$$\overline{XS} \cdot m = \frac{I_2}{A}; \quad \overline{SK} \cdot m = \frac{U_2}{B}$$

и

$$\overline{XK} \cdot m = \frac{U_1}{AB}. \quad (11,28)$$

Подставляя эти значения в (11,27), получим

$$\frac{\overline{SL} \cdot m}{\frac{I_2}{A}} = \frac{\frac{U_2}{B}}{\frac{U_1}{AB}},$$

откуда

$$U_2 I_2 = \overline{SL} \cdot m U_1. \quad (11,29)$$

Из полученного равенства видно, что отрезок \overline{SL} , умноженный на масштаб (в VA/см) $m_3 = m U_1$, дает величину кажущейся вторичной мощности; тот же отрезок, умноженный на масштаб (в W/см)

$$m_5 = m U_1 \cos \varphi,$$

дает величину активной мощности $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi$. Действительно, умножая обе части равенства (11,29) на $\cos \varphi$, получим $U_2 I_2 \cos \varphi = \overline{SL} \cdot m U_1 \cos \varphi$. Если бы отрезок \overline{SL} не был параллелен линии \overline{FX} , он мог бы также слу-

жить для измерения вторичной мощности — изменился бы только масштаб. В самом деле, отрезок любой прямой, проведенной из точки S над произвольным углом μ к прямой SL отрезок, лежащий между точкой S и линией \overline{XK} , пропорционален отрезку \overline{SL} . На фиг. 11, 18 проведен отрезок \overline{SG} , перпендикулярный \overline{XK} . Этот отрезок измеряет вторичную мощность в масштабе

$$m_6 = m_5 / \cos \mu,$$

где $\mu = \angle LSG$, так как $\overline{SG} = \overline{SL} \cos \mu$.

11,12. Кажущееся сопротивление нагрузки

Чтобы найти кажущееся сопротивление нагрузки, соответствующее данной рабочей точке диаграммы, или чтобы, наоборот, найти рабочую точку диаграммы для данного сопротивления нагрузки Z , проведем через точку K прямую KE , параллельную линии \overline{XF} , касательной к окружности в точке X (фиг. 11, 18). Отрезок \overline{XS} продолжим до пересечения с прямой KE . Точку пересечения обозначим буквой T . Покажем, что длина отрезка KT пропорциональна Z .

Треугольники XTK и XSK подобны, так как $\angle STK = \angle SKX$ (каждый из них равен $\angle FXS$), а угол SXK — у них общий. Поэтому стороны этих треугольников пропорциональны и, следовательно,

$$\frac{\overline{KT}}{\overline{XK}} = \frac{\overline{SK}}{\overline{XS}},$$

или

$$\frac{\overline{KT} \cdot m}{\overline{XK} \cdot m} = \frac{\overline{SK} \cdot m}{\overline{XS} \cdot m}.$$

Подставляя значения из (11, 28), получим

$$\frac{\overline{KT} \cdot m}{\frac{U_1}{AB}} = \frac{\frac{U_2}{B}}{\frac{I_2}{A}},$$

откуда

$$\frac{U_2}{I_2} = z = \overline{KT} \cdot m \frac{B^2}{U_1}.$$

Полное сопротивление нагрузки измеряется отрезком \overline{KT} , умноженным на масштаб

$$w_u = m \frac{B^2}{U_1} \text{ (в } \Omega/\text{cm)}.$$

11,13. Построение круговой диаграммы по опытам холостого хода и короткого замыкания

Если не известны значения Z_1, Z_2, Z_3 , но выполнены опыты холостого хода, короткого замыкания и, кроме того, короткого замыкания при питании со стороны вторичных зажимов, то результаты измерений напряжения, тока и мощности при этих опытах достаточны для построения круговой диаграммы при любом заданном коэффициенте мощности нагрузки ($\cos \varphi = \text{const}$).

В самом деле, имея величину I_{10} и φ_{10} при некотором значении U_{10} , мы можем найти I_{10}' , соответствующее заданному напряжению U_1 , так как

токи в цепи пропорциональны приложенному напряжению:

$$\frac{I_{10}'}{I_{10}} = \frac{U_1}{U_{10}}.$$

Угол φ_{10} между током и напряжением одинаков при всех значениях первичного напряжения. Аналогично опыт короткого замыкания дает нам значения φ_{1k} и I_{1k} (если опыт короткого замыкания велся при напряжении, отличном от заданного, то его можно пересчитать). Для определения центра окружности нужно знать еще угол $\delta = \varphi - (\beta - \alpha)$. Мы видели (§ 6), что $\delta = \varphi - \varphi_{k2}$, где $\varphi_{k2} = \beta - \alpha$ есть аргумент комплекса полного сопротивления цепи при закороченных первичных зажимах и питании схемы со стороны вторичных зажимов. Если мы располагаем результатами опыта короткого замыкания при питании со стороны вторичных зажимов, то, как мы видели в § 11,6, угол φ_{k2} можно подсчитать по формуле $\varphi_{k2} = \arccos \frac{P_{k2}}{U_{k2} I_{k2}}$ и, следовательно, найти угол δ (мы считаем, что угол φ имеет определенное значение согласно условиям нагрузки четырехполюсника). Из опытов холостого хода и короткого замыкания определяются также значения A и B :

$$A = \frac{U_{10}}{U_2} \text{ (при холостом ходе);}$$

$$B = \frac{U_{1k}}{I_2} \text{ (при коротком замыкании).}$$

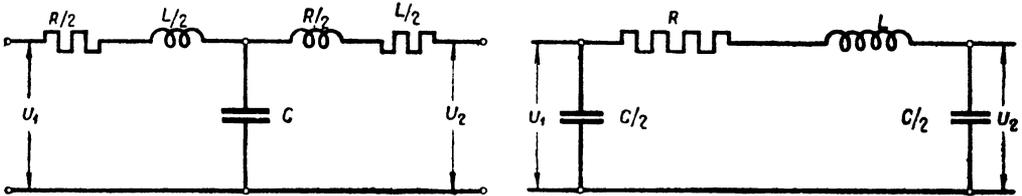
Зная A и B , можно найти все масштабы диаграммы.

ГЛАВА 12

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

12,1. Основные уравнения

До сих пор мы имели дело с цепями, постоянные которых: сопротивление, индуктивность и емкость, были сосредоточены на определенных конечных участках. В числе таких цепей мы рассматривали и линию передачи электрической энергии, сопротивление и индуктивность которой последовательно соединены с приемником, включенным на конце линии. При таком рассмотрении емкость линии вовсе не учитывается, если емкостный ток весьма мал по сравнению с током нагрузки; в противном случае емкость линии может быть сосредоточена в ее середине или распределена поровну между концами, как это показано схематически на фиг. 12,1. Однако такое изображение линии является лишь приближенным и при большой длине линии может повести к ошибкам в расчете.



Фиг. 12, 1.

В действительности, каждый бесконечно малый участок линии обладает как сопротивлением и индуктивностью, так и емкостью. Цепи, при изучении которых необходимо с этим считаться, называются цепями с распределенными постоянными. Желая по возможности точно учесть все факторы, играющие роль в процессе работы линии, мы должны к указанным трем равномерно распределенным постоянным R , L и C прибавить четвертую — активную проводимость (g) изоляции, вызывающую появление активного тока между проводниками по всей длине линии. На фиг. 12,2 представлена схема нескольких смежных бесконечно малых участков линии длиной dx , каждый из которых обладает активным сопротивлением $dR = R_0 dx$, индуктивным сопротивлением $dX = \omega L_0 dx$, емкостной проводимостью $db = \omega C_0 dx$ и активной проводимостью $dg = g_0 dx$, где R_0 — активное сопротивление;

L_0 — индуктивность;

C_0 — емкость и

g_0 — активная проводимость единицы длины двухпроводной линии 1 км, (если dx выражено в км). Ввиду того что на каждом участке ток в обоих

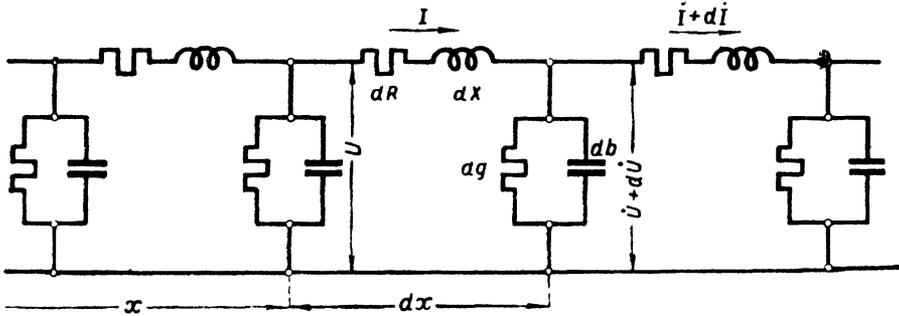
проводах линии одинаков, dR и dX , представляющие собой удвоенные сопротивления каждого из проводов на длине dx , сосредоточены в одном проводе.

Обозначим x — расстояние произвольной точки линии от ее начала и будем рассматривать dx как приращение этого расстояния. Включенные последовательно между собой dR и dX образуют кажущееся сопротивление

$$dZ = dR + jdX = (R_0 + j\omega L_0) dx = Z_0 dx,$$

а включенные между собой параллельно dg и db образуют кажущуюся проводимость

$$dY = dg + jdb = (g_0 + j\omega C_0) dx = Y_0 dx.$$



Фиг. 12, 2.

На участке dx по направлению увеличения x имеет место падение напряжения $\dot{I} dZ = \dot{I} Z_0 dx$, т. е. приращение напряжения на этом участке отрицательно и выражается уравнением

$$d\dot{U} = -\dot{I} Z_0 dx. \quad (12, 1)$$

Вместе с тем в ответвление dY направляется ток, которому, пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка, можно дать выражение $\dot{U} dY = \dot{U} Y_0 dx$. Поэтому при переходе к следующему участку мы будем иметь отрицательное приращение тока

$$d\dot{I} = -\dot{U} Y_0 dx. \quad (12, 2)$$

Этими двумя дифференциальными уравнениями выражается весь процесс работы линии с распределенными постоянными.

Будем теперь их интегрировать. Разделив обе части обоих уравнений на dx , приведем их предварительно к виду

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = -\dot{I} Z_0; \quad (12, 3)$$

$$\frac{d\dot{I}}{dx} = -\dot{U} Y_0. \quad (12, 4)$$

Повторно дифференцируя первое из них

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = -\frac{d\dot{I}}{dx} Z_0$$

и подставляя сюда $\frac{d\dot{I}}{dx}$ из второго, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \dot{U} Z_0 Y_0, \quad (12, 5)$$

интеграл которого, как известно, имеет вид

$$\dot{U} = \dot{A}e^{\gamma x} + \dot{B}e^{-\gamma x}, \quad (12,6)$$

где \dot{A} и \dot{B} — постоянные интегрирования, а $\pm \gamma$ определяется из характеристического уравнения

$$\gamma^2 = Z_0 Y_0,$$

которое дает

$$\pm \gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}. \quad (12,7)$$

Поскольку Z_0 и Y_0 — комплексные числа, постольку и γ является комплексным числом.

Для тока имеем из (12,3)

$$i = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx}. \quad (12,8)$$

Но согласно (12,6)

$$\frac{d\dot{U}}{dx} = \dot{A}\gamma e^{\gamma x} - \dot{B}\gamma e^{-\gamma x}.$$

Поэтому

$$i = \frac{\dot{B}}{Z_0} \gamma e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}}{Z_0} \gamma e^{\gamma x}$$

или, подставляя γ из (12,7),

$$i = \frac{\dot{B}}{Z_0} \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}}{Z_0} \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} e^{\gamma x} = \frac{\dot{B}}{\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}}{\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}} e^{\gamma x}.$$

Величина $\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$ имеет размерность сопротивления и называется волновым сопротивлением линии¹ или ее характеристикой. Обозначая эту величину Z_λ , получим следующее выражение тока в произвольной точке линии:

$$i = \frac{\dot{B}}{Z_\lambda} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}}{Z_\lambda} e^{\gamma x}. \quad (12,9)$$

Для определения постоянных интегрирования \dot{A} и \dot{B} должны быть заданы напряжение и ток в какой-либо определенной точке линии. Если, например, известно напряжение \dot{U}_1 и ток \dot{I}_1 в начале линии, где $x=0$, то согласно (12,6) и (12,9), в которых в этом случае $e^{\pm \gamma x} = e^0 = 1$, находим

$$\dot{A} + \dot{B} = \dot{U}_1$$

и

$$\dot{A} - \dot{B} = -\dot{I}_1 Z_\lambda.$$

Беря полусумму и полуразность этих выражений, получим

$$A = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_\lambda}{2} \text{ и } B = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_\lambda}{2}. \quad (12,10)$$

Подставляя \dot{A} и \dot{B} в (12,6) и (12,9), найдем

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_\lambda}{2} e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_\lambda}{2} e^{-\gamma x}$$

¹ Смысл этого термина станет ясным после ознакомления с § 12,4.

и

$$j = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_\lambda}{2Z_\lambda} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_\lambda}{2Z_\lambda} e^{\gamma x},$$

или

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \dot{I}_1 Z_\lambda \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$$

и

$$I = I_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \frac{\dot{U}_1}{Z_\lambda} \cdot \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2},$$

а так как

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \operatorname{ch} \gamma x,$$

$$\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \operatorname{sh} \gamma x,$$

то

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma x \quad (12, 11)$$

и

$$\dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_\lambda} \operatorname{sh} \gamma x. \quad (12, 12)$$

С помощью этих двух основных уравнений можно вычислить напряжение и ток в любой точке линии по заданным комплексным выражениям напряжения и тока в начале линии и по значениям γ и Z_λ , вполне определяемым постоянными линии. Для конца линии, где x равен всей длине линии l , эти уравнения дают

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma l - \dot{I}_1 Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l \\ I_2 &= \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z_\lambda} \operatorname{sh} \gamma l. \end{aligned} \right\} \quad (12, 13)$$

При расчете линий большей частью задаются напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 на конце линии (у приемника), а \dot{U}_1 и \dot{I}_1 в начале линии подлежат определению. Чтобы решить уравнения (12,13) относительно этих новых неизвестных, умножим первое уравнение на $\operatorname{ch} \gamma l$, а второе — на $Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l$ и после этого сложим оба уравнения. При этом в правой части окажутся два равных, но противоположных по знаку члена $\pm \dot{I}_1 Z_\lambda \cdot \operatorname{sh} \gamma l \cdot \operatorname{ch} \gamma l$, и после их приведения мы получим

$$\dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l = \dot{U}_1 \operatorname{ch}^2 \gamma l - \dot{U}_1 \operatorname{sh}^2 \gamma l,$$

а так как

$$\operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1,$$

то

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l. \quad (12, 14)$$

Если теперь первое из уравнений (12,13) помножить на $\frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z_\lambda}$, а второе — на $\operatorname{ch} \gamma l$, то после приведения подобных членов $\pm \frac{\dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma l \cdot \operatorname{sh} \gamma l}{Z_\lambda}$ получим

$$\dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_\lambda} \operatorname{sh} \gamma l = \dot{I}_1 \operatorname{ch}^2 \gamma l - \dot{I}_1 \operatorname{sh}^2 \gamma l,$$

откуда

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_\lambda} \operatorname{sh} \gamma l. \quad (12, 15)$$

Уравнениями (12,14) и (12,15) вполне разрешается задача об определении напряжения и тока в начале линии по заданному режиму в конце линии.

12.2. Холостой ход и короткое замыкание

При заданных значениях \dot{U}_2 и \dot{I}_2 в конце линии напряжение и ток в ее начале могут быть получены путем наложения режима короткого замыкания с нормальным током \dot{I}_2 в конце линии на режим холостого хода с нормальным напряжением \dot{U}_2 в конце линии. Действительно, при холостом ходе, т. е. при $\dot{I}_2 = 0$, уравнения (12,14) и (12,15) дают

$$\dot{U}_{1 \text{ хол}} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l \quad (12, 16)$$

и

$$\dot{I}_{1 \text{ хол}} = \frac{\dot{U}_2}{Z_\lambda} \operatorname{sh} \gamma l, \quad (12, 17)$$

а при коротком замыкании, когда $\dot{U}_2 = 0$,

$$\dot{U}_{1 \text{ кор}} = \dot{I}_2 Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l \quad (12, 18)$$

и

$$\dot{I}_{1 \text{ кор}} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l, \quad (12, 19)$$

а поэтому

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1 \text{ хол}} + \dot{U}_{1 \text{ кор}} \quad (12, 20)$$

и

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1 \text{ хол}} + \dot{I}_{1 \text{ кор}}. \quad (12, 21)$$

Рассмотрим теперь более подробно, как по данным \dot{U}_2 и \dot{I}_2 определить напряжение и ток в начале линии для указанных двух случаев: холостого хода и короткого замыкания.

Так как $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}$ представляет собой комплексное число, то, обозначая β его действительную часть и α — мнимую, получим

$$\gamma = \beta + j\alpha.$$

Подставляя это выражение в формулы

$$\operatorname{ch} \gamma l = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2},$$

получим

$$\operatorname{ch} \gamma l = \frac{e^{\beta l} e^{j\alpha l} + e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \gamma l = \frac{e^{\beta l} e^{j\alpha l} - e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}}{2},$$

откуда

$$\dot{U}_{1 \text{ хол}} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l = \frac{\dot{U}_2}{2} e^{\beta l} e^{j\alpha l} + \frac{\dot{U}_2}{2} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}; \quad (12, 22)$$

$$\dot{I}_{1 \text{ хол}} = \frac{\dot{U}_2}{Z_\lambda} \operatorname{sh} \gamma l = \frac{1}{Z_c} \left[\frac{\dot{U}_2}{2} e^{\beta l} e^{j\alpha l} - \frac{\dot{U}_2}{2} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l} \right] \quad (12, 23)$$

и аналогично

$$\dot{U}_{1 \text{ кор}} = \dot{I}_2 Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l = Z_c \left[\frac{\dot{I}_2}{2} e^{\beta l} e^{j\alpha l} - \frac{\dot{I}_2}{2} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l} \right]; \quad (12, 24)$$

$$\dot{I}_{1 \text{ кор}} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l = \frac{\dot{I}_2}{2} e^{\beta l} e^{j\alpha l} + \frac{\dot{I}_2}{2} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}. \quad (12, 25)$$

Графические построения для определения тока и напряжения холостого хода сделаны на фиг. 12,3.

Вектор $\overline{OA} = \frac{\dot{U}_2}{2} e^{\beta l} e^{j\alpha l}$ по абсолютной величине в $e^{\beta l}$ раз больше $\frac{\dot{U}_2}{2}$ и на угол αl опережает вектор \dot{U}_2 , направленный по действительной оси, тогда как вектор

$$\overline{OB} = \frac{\dot{U}_2}{2} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}$$

по абсолютной величине в $e^{\beta l}$ раз меньше $\frac{\dot{U}_2}{2}$ и на такой же угол αl от-

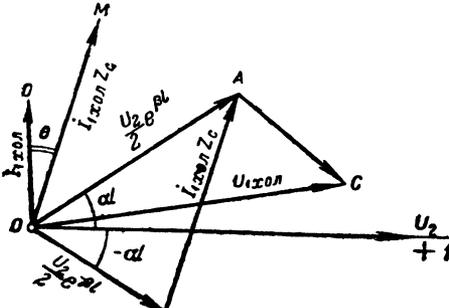
стает от \dot{U}_2 . Геометрическая сумма \overline{OC} этих двух векторов дает искомый вектор $\dot{U}_{1\text{хол}}$, а геометрическая разность \overline{BA} согласно (12,23) — произведение $\dot{I}_{1\text{хол}} Z_\lambda$. Отсюда следует, что

$$I_{1\text{хол}} = \frac{\overline{BA}}{Z_\lambda}.$$

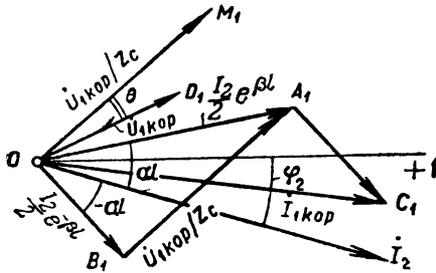
Но пренебрегая весьма малой активной проводимостью изоляции и считая поэтому $Y_0 = g_0 + jb_0 = jb_0 e^{j90^\circ} = y_0 e^{j90^\circ}$, можно следующим образом выразить сопротивление Z_λ :

$$Z_\lambda = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{z_0 e^{j\varphi_0}}{y_0 e^{j90^\circ}}} = \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} e^{-j \frac{90^\circ - \varphi_0}{2}} = z_\lambda e^{-j\theta},$$

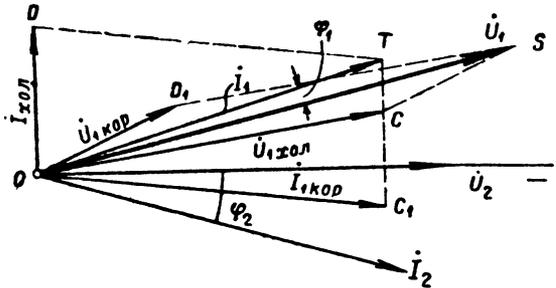
где $\varphi_0 = \arctg \frac{\omega L_0}{R_0}$ всегда меньше 90° , а потому $\theta = \frac{90^\circ - \varphi_0}{2}$ всегда положительно и не превышает 45° (при минимальном $\varphi = 0$). Таким образом



Фиг. 12, 3.



Фиг. 12, 4.



Фиг. 12, 5.

вектор тока холостого хода $\dot{I}_{1\text{хол}} = \frac{\overline{BA}}{Z_\lambda} e^{j\theta}$, равный по величине $\frac{|\overline{BA}|}{z_\lambda}$, по фазе опережает вектор \overline{BA} на угол θ .

Аналогичные построения для режима короткого замыкания сделаны на фиг. 12, 4. Вектор $\overline{AO}_1 = \frac{\dot{I}_2}{2} e^{\beta l} e^{j\alpha l}$ по абсолютной величине в $e^{\beta l}$ раз больше $\frac{\dot{I}_2}{2}$ и на угол αl опережает вектор \dot{I}_2 , расположенный под заданным углом φ_2 по отношению к действительной оси, тогда как вектор

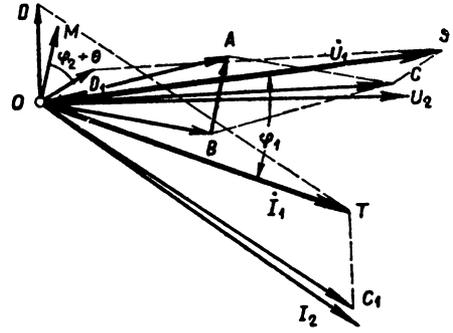
$$\overline{OB}_1 = \frac{\dot{I}_2}{2} e^{-\beta l} e^{-j\alpha l}$$

по абсолютной величине в $e^{\beta l}$ раз меньше $\frac{I_2}{2}$ и на такой же угол αl отстает от \dot{I}_2 . Геометрическая сумма \overline{OC}_1 этих двух векторов дает искомый вектор $\dot{I}_{1\text{кор}}$, а геометрическая разность $\overline{B_1A_1}$ согласно (12, 24) — отношение $\frac{\dot{U}_{1\text{кор}}}{Z_\lambda}$. Отсюда следует, что вектор напряжения короткого замыкания

$$\dot{U}_{1\text{кор}} = \overline{B_1A_1} Z_\lambda = \overline{B_1A_1} z_\lambda e^{-\beta l},$$

равный по величине $|\overline{B_1A_1}| z_\lambda$, по фазе отстает от вектора $\overline{B_1A_1}$ на угол θ .

Для получения векторов \dot{U}_1 и \dot{I}_1 при заданных \dot{U}_2 и \dot{I}_2 остается теперь согласно (12, 20) и (12, 21) сложить результаты, полученные для холостого хода и короткого замыкания, что и выполнено на фиг. (12, 5). Полученные векторы \overline{OS} и \overline{OT} изображают искомые \dot{U}_1 и \dot{I}_1 .



Фиг. 12, 6.

Пример 12.1. Линия длиной 200 км имеет активное сопротивление $R=0,185 \Omega/\text{km}$, индуктивное сопротивление $X_0=0,4 \Omega/\text{km}$ и емкостную проводимость $y_0=2,8 \cdot 10^{-6} \text{ S}/\text{km}^1$. Напряжение в конце линии $U_2=60 \text{ kV}$, а ток в конце $I_2=125 \text{ A}$ при $\cos \varphi_2=0,8$. Определить U_1 , I_1 и $\cos \varphi_1$.

Вычисляем прежде всего постоянные линии:

$$z_0 = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = \sqrt{0,185^2 + 0,4^2} = 0,44 \Omega/\text{km};$$

$$z_\lambda = \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} = \sqrt{\frac{0,44}{2,8 \cdot 10^{-6}}} = 10^3 \cdot 0,396 \Omega;$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{X_0}{R_0} = \arctg \frac{0,4}{0,185} = \arctg 2,16 = 65^\circ 10';$$

$$\theta = \frac{90^\circ - \varphi_0}{2} = \frac{24^\circ 50'}{2} = 12^\circ 25';$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{0,44 e^{j65^\circ 10'} \cdot 2,8 \cdot 10^{-6} e^{j90}} = 10^{-3} \sqrt{1,23} e^{j \frac{65^\circ 10' + 90^\circ}{2}} = \\ &= 1,11 \cdot 10^{-3} e^{j77^\circ 35'} = 1,11 \cdot 10^{-3} (0,215 + j0,976) = 0,239 \cdot 10^{-3} + j1,083 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \beta l &= 0,239 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 0,0478; \\ e^{\beta l} &= e^{0,0478} = 1,05 \end{aligned}$$

и

$$\alpha l = 1,083 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 0,2166 \text{ радиана} = 0,2166 \frac{180}{\pi} = 12,4^\circ = 12^\circ 24'.$$

Далее находим

$$\frac{U_2}{2} e^{\beta l} = \frac{60}{2} \cdot 1,05 = 31,5 \text{ kV}$$

и

$$\frac{U_2}{2e^{\beta l}} = \frac{60}{2 \cdot 1,05} = 28,5 \text{ kV}.$$

Откладывая их под углами $\pm 12^\circ 24'$ к \dot{U}_2 (фиг. 12, 6), находим

$$U_{1\text{хол}} = |\overline{OC}| = 59 \text{ kV}$$

¹ Данные соответствуют одной фазе трехфазной линии сечением 95 мм² (медь).

и

$$I_{1\text{хол}} z_\lambda = |\overline{BA}| = 13,2 \text{ kV} = 13\,200 \text{ V},$$

откуда

$$I_{1\text{хол}} = \frac{13\,200}{396} = 33,4 \text{ A}.$$

Соответствующий вектор \overline{OD} откладываем в масштабе под углом $\theta = 12^\circ 25'$ к $\overline{OM} = \dot{I}_{1\text{хол}} z_\lambda$.

Далее, вместо того чтобы производить аналогичное построение для случая короткого замыкания, воспользуемся подобием треугольников: OAC (фиг. 12, 3) и OA_1C_1 (фиг. 12, 4), во-первых, и OAB и OA_1B_1 (см. те же фиг. 12,3 и 12,4), во-вторых. Из первой пары треугольников находим

$$\frac{I_{1\text{кор}}}{U_{1\text{хол}}} = \frac{|\overline{OC}_1|}{|\overline{OC}|} = \frac{|\overline{OA}_1|}{|\overline{OA}|} = \frac{I_2}{U_2},$$

откуда

$$I_{1\text{кор}} = I_2 \frac{U_{1\text{хол}}}{U_2} = 125 \frac{59}{60} = 123 \text{ A},$$

а так как $\triangle OA_1C_1$ ориентирован относительно вектора \dot{I}_2 совершенно так же, как $\triangle OAC$ относительно вектора \dot{U}_2 , то $\dot{I}_{1\text{кор}} = \overline{OC}_1$ отстает от $\dot{U}_{1\text{хол}} = \overline{OC}$ на угол φ_2 . Из второй пары подобных треугольников находим

$$\frac{|\overline{B}_1A_1|}{|\overline{BA}|} = \frac{|\overline{O}_1A_1|}{|\overline{OA}|} = \frac{I_2}{U_2},$$

откуда

$$|\overline{B}_1A_1| = \frac{U_{1\text{кор}}}{Z_\lambda} = |\overline{BA}| \frac{I_2}{U_2} = I_{1\text{хол}} z_\lambda \frac{I_2}{U_2} = 13\,200 \frac{125}{60\,000} = 27,5 \text{ A}$$

и

$$U_{1\text{кор}} = 27,5 \cdot 396 = 10\,900 \text{ V}.$$

По фазе $U_{1\text{кор}}$ на угол θ отстает от вектора $\overline{OM}_1 = \overline{B}_1A_1$, который в свою очередь отстает от $\overline{OM} = \overline{BA}$ на угол φ_2 . По этим данным строим вектор $\overline{OD}_1 = \dot{U}_{1\text{кор}}$, отстающий от \overline{OM} на угол $\varphi_2 + \theta$. Складывая $\dot{U}_{1\text{хол}}$ с $\dot{U}_{1\text{кор}}$, а $\dot{I}_{1\text{хол}}$ с $\dot{I}_{1\text{кор}}$, получаем из диаграммы

$$U_1 = |\overline{OS}| = 67,5 \text{ kV};$$

$$I_1 = |\overline{OT}| = 107 \text{ A};$$

$$\cos \varphi_1 = \cos 27^\circ = 0,891.$$

12.3. Индуктивность и емкость трехфазной линии

Индуктивность и емкость 1 km двухпроводной линии, необходимые для подсчета Z_0 и Y_0 , легко могут быть определены по формулам (3, 128) и (2, 70):

$$L_0 = \left(4 \ln \frac{a}{r} + \mu_r \right) \cdot 10^{-4} \text{ H/km}$$

и

$$C_0 = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{a}{r}}.$$

Так как для воздушной линии можно принять $\epsilon = \epsilon_0 = 0,886 \cdot 10^{-8} \text{ F/km}$, а для медных или алюминиевых проводов $\mu_r = 1$, то, подставляя эти зна-

чения и имея в виду, что

$$\ln \frac{a}{r} = 2,3 \lg \frac{a}{r};$$

$$4 \ln \frac{a}{r} = 4 \cdot 2,3 \lg \frac{a}{r} = 9,2 \lg \frac{a}{r}$$

и

$$\frac{\pi \cdot 0,886 \cdot 10^{-8}}{2,3} = 1,21 \cdot 10^{-8} = 0,0121 \cdot 10^{-6},$$

получим

$$L_0 = (9,2 \lg \frac{a}{r} + 1) \cdot 10^4 \text{ Н/км} \quad (12, 26)$$

и

$$C_0 = \frac{1,21 \cdot 10^{-8}}{\lg \frac{a}{r}} \text{ Ф/км.} \quad (12, 27)$$

В случае трехфазной линии, нагрузка которой равномерно распределена между фазами, можно весь расчет вести для одной фазы, вводя в формулы фазные напряжения звезды в начале и в конце линии и Z_0 и Y_0 на одну фазу. С этой целью необходимо определить индуктивность и емкость каждого из проводов трехфазной линии.

Индуктивность. Рассмотрим трехфазную линию (фиг. 12,7), провода которой 1, 2 и 3 расположены на произвольных расстояниях a_{12} , a_{23} и a_{31} друг от друга, и попытаемся определить индуктивность этого провода к проходящему по нему току i_1 . Потокосцепление в этом случае равно охватываемому провод потоку Φ_1 , так как $w = 1$. Этот поток складывается из трех потоков: Φ_{11} — создаваемого током i_1 , Φ_{12} — создаваемого током i_2 и Φ_{13} — создаваемого током i_3 . Определим каждый из этих потоков в отдельности.

Не учитывая пока внутренний поток провода 1, создаваемый его собственным током, и имея в виду, что провод 1 охватывается всеми создаваемыми им внешними силовыми линиями, от непосредственно примыкающей к проводу до бесконечно удаленной от него, найдем что поток

$$\Phi_{11} = \int_r^{\infty} B_1 l dx,$$

где r — радиус сечения провода в см;

l — длина линии в см;

B_1 — магнитная индукция поля, создаваемого в произвольной внешней точке током i_1 ;

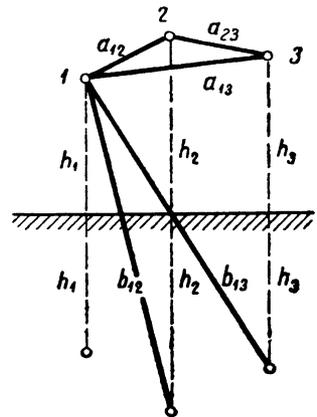
x — расстояние этой точки от оси провода 1.

Подинтегральное выражение представляет собой элементарный магнитный поток, проходящий сквозь площадку длиной l и шириной dx . Магнитная индукция на произвольном расстоянии x от провода в немагнитной среде

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \frac{i_1}{2\pi x} = \frac{1,25 \cdot 10^{-8}}{2\pi} \frac{i_1}{x} = 0,2 \cdot 10^{-8} \frac{i_1}{x},$$

и следовательно,

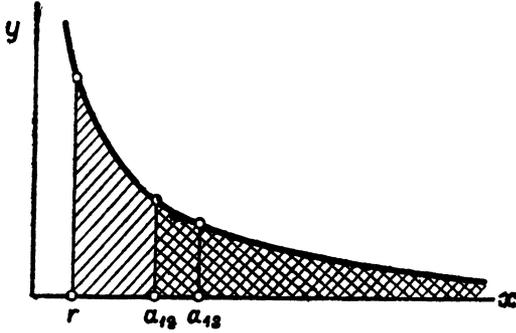
$$\Phi_{11} = \int_r^{\infty} 0,2 \cdot 10^{-8} \frac{i_1}{x} l dx = 0,2 \cdot 10^{-8} \cdot l \cdot i_1 \int_r^{\infty} \frac{dx}{x}. \quad (12, 28)$$



Фиг. 12,7.

Из всего потока, создаваемого вторым проводом, провод 1 охватывают только те силовые линии, радиус x которых больше расстояния a_{12} . Поэтому аналогично (12, 28)

$$\Phi_{12} = \int_{a_{12}}^{\infty} 0,2 \cdot 10^{-8} \frac{i_2}{x} l dx = 0,2 \cdot 10^{-8} l \cdot i_2 \int_{a_{12}}^{\infty} \frac{dx}{x}. \quad (12, 29)$$



Фиг. 12, 8.

Одинаковое обозначение x для различных расстояний произвольной точки от проводов 1 и 2 не может здесь привести к ошибке, так как числовое значение определенного интеграла зависит от вида подинтегральной функции и от пределов интегрирования, но не от обозначения независимого переменного.

Подобным же образом найдем

$$\Phi_{13} = 0,2 \cdot 10^{-8} l \cdot i_3 \int_{a_{13}}^{\infty} \frac{dx}{x}. \quad (12, 30)$$

Таким образом полный поток, охватывающий первый провод (за исключением внутреннего потока этого провода),

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{13} = \\ &= 0,2 \cdot 10^{-8} l \left[i_1 \int_r^{\infty} \frac{dx}{x} + i_2 \int_{a_{12}}^{\infty} \frac{dx}{x} + i_3 \int_{a_{13}}^{\infty} \frac{dx}{x} \right], \end{aligned}$$

а так как

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

или

$$i_1 = -(i_2 + i_3),$$

то

$$\Phi_1 = -0,2 \cdot 10^{-8} \cdot l \left[i_2 \left(\int_r^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{a_{12}}^{\infty} \frac{dx}{x} \right) + i_3 \left(\int_r^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{a_{13}}^{\infty} \frac{dx}{x} \right) \right]. \quad (12, 31)$$

Каждый из четырех интегралов, входящих в это выражение, представляет собой площадь, заключенную между кривой

$$y = \frac{1}{x},$$

осью абсцисс и ординатой, соответствующей нижнему пределу интеграла (фиг. 12, 8), и является бесконечно большой величиной. Но две разности этих интегралов, первая из которых изображена на фиг. 12, 8 однократно заштрихованной площадью, являются уже величинами конечными, а именно:

$$\int_r^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{a_{12}}^{\infty} \frac{dx}{x} = \int_r^{a_{12}} \frac{dx}{x} = \left| \ln x \right|_r^{a_{12}} = \ln \frac{a_{12}}{r}$$

и аналогично

$$\int_r^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{a_{13}}^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln \frac{a_{13}}{r},$$

Поэтому

$$\Phi_1 = -0,2 \cdot 10^{-8} l \left[i_2 \ln \frac{a_{12}}{r} + i_3 \ln \frac{a_{13}}{r} \right]. \quad (12, 32)$$

Если провода расположены по вершинам равностороннего треугольника со стороной a , т. е. если

$$a_{12} = a_{23} = a_{31} = a,$$

то

$$\Phi_1 = -0,2 \cdot 10^{-8} l (i_2 + i_3) \ln \frac{a}{r} = 0,2 \cdot 10^{-8} l \cdot i_1 \cdot \ln \frac{a}{r},$$

откуда внешняя индуктивность

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{i_1} = 0,2 \cdot 10^{-8} l \cdot \ln \frac{a}{r},$$

что дает при $l = 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$

$$L_0 = 2 \ln \frac{a}{r} \cdot 10^{-4} \text{ H/km}.$$

Сюда надо еще добавить внутреннюю индуктивность (см. § 3,21) провода, которая, очевидно, равна половине внутренней индуктивности двухпроводной линии. Таким образом

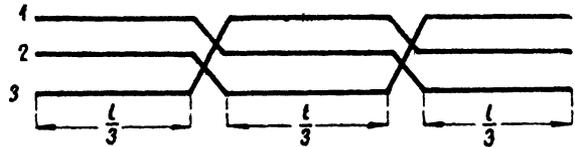
$$L_0 = \left(2 \ln \frac{a}{r} + \frac{\mu_r}{2} \right) \cdot 10^{-4} \text{ H/km},$$

или, подставляя $\mu_r = 1$ и заменяя натуральный логарифм десятичным,

$$L_0 = (4,6 \lg \frac{a}{r} + 0,5) \cdot 10^{-4} \text{ H/km}. \quad (12, 33)$$

Индуктивность каждого провода трехфазной линии при расположении проводов по вершинам равностороннего треугольника равна половине индуктивности двухпроводной линии при таком же расстоянии между проводами.

При несимметричном расположении проводов симметрия линии в целом может быть достигнута транспозицией проводов, т. е. переменой положения проводов отдельных фаз в круговом порядке, как показано на фиг. 12, 9.



Фиг. 12, 9.

Сохраняя в этом случае прежнюю нумерацию расстояний для первой трети линии, легко видеть, что расстояние между проводами 2 и 1 на второй трети линии будет равно a_{23} и на последней трети a_{31} , а расстояние между проводами 3 и 1 на второй трети a_{12} и на последней трети a_{23} . Охватывающий первый провод магнитный поток Φ_1 представится теперь в виде суммы трех потоков, каждый из которых будет выражен подобно (12, 32):

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & -0,2 \cdot 10^{-8} \frac{l}{3} \left[i_2 \ln \frac{a_{12}}{r} + i_3 \ln \frac{a_{13}}{r} + i_2 \ln \frac{a_{23}}{r} + i_3 \ln \frac{a_{12}}{r} + i_2 \ln \frac{a_{13}}{r} + \right. \\ & \left. + i_3 \ln \frac{a_{23}}{r} \right] = -0,2 \cdot 10^{-8} \frac{l}{3} \left[i_2 \left(\ln \frac{a_{12}}{r} + \ln \frac{a_{23}}{r} + \ln \frac{a_{13}}{r} \right) + \right. \\ & \left. + i_3 \left(\ln \frac{a_{12}}{r} + \ln \frac{a_{23}}{r} + \ln \frac{a_{13}}{r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Так как сумма логарифмов равна логарифму произведения, то множитель при i_2 и при i_3

$$\ln \frac{a_{12}}{r} + \ln \frac{a_{23}}{r} + \ln \frac{a_{31}}{r} = \ln \frac{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}{r^3} = 3 \ln \sqrt[3]{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}} = 3 \ln \frac{a}{r},$$

где

$$a = \sqrt[3]{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}$$

— среднее геометрическое расстояние между проводами. Таким образом

$$\Phi_1 = -0,2 \cdot 10^{-8} \frac{l}{3} 3 \ln \frac{a}{r} (i_2 + i_3) = 0,2 \cdot 10^{-8} \cdot l \cdot \ln \left(\frac{a}{r} \right) \cdot i_1$$

выражается при транспозиции совершенно так же, как и при одинаковых расстояниях между проводами. Поэтому и для индуктивности одного провода получим такое же окончательное выражение

$$L_0 = (4,6 \lg \frac{a}{r} + 0,5) \cdot 10^{-4} \text{ Н/км.}$$

Разумеется и в этом случае индуктивность всех трех проводов будет одинакова.

Пример 12, 2. Определить индуктивность транспонированной линии, провода которой имеют диаметр 12,6 мм и расположены в одной плоскости на расстояниях 3 м друг от друга.

В этом случае $a_{12} = a_{23}$ и $a_{13} = 2a_{12}$, следовательно,

$$a = \sqrt[3]{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}} = \sqrt[3]{a_{12} \cdot a_{12} \cdot 2a_{12}} = a_{12} \sqrt[3]{2} = 300 \cdot 1,26 = 378 \text{ см.}$$

Так как

$$r = \frac{12,6}{2} = 6,3 \text{ мм,}$$

то

$$\lg \frac{a}{r} = \lg \frac{3780}{6,3} = \lg 600 = 2,778$$

и

$$L_0 = (4,6 \cdot 2,778 + 0,5) \cdot 10^{-4} = (12,8 + 0,5) \cdot 10^{-4} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ Н/км.}$$

Соответствующее индуктивное сопротивление

$$X_0 = \omega L_0 = 314 \cdot 1,33 \cdot 10^{-3} = 0,418 \text{ }\Omega/\text{км.}$$

Емкость. Вопрос о емкости трехпроводной линии был подробно рассмотрен в § 2, 16.

Пользуясь емкостными коэффициентами, мы можем установить связь между зарядами одного фазового провода и его напряжением. В самом деле, для провода, например, первой фазы

$$\dot{Q}_{10} = \beta_{11} \dot{U}_1 + \beta_{12} \dot{U}_2 + \beta_{13} \dot{U}_3, \quad (12, 34)$$

где \dot{U}_1 , \dot{U}_2 , и \dot{U}_3 — фазовые напряжения относительно земли. Если провода расположены симметрично, то $\beta_{12} = \beta_{13}$. Если симметричны фазовые напряжения относительно земли, то $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$. При этом из (12, 34) получаем

$$\dot{Q}_{10} = \beta_{11} \dot{U}_1 + \beta_{12} (\dot{U}_2 + \dot{U}_3) = (\beta_{11} - \beta_{12}) \dot{U}_1.$$

Аналогичные выражения могут быть написаны и для двух других фаз. Рабочая емкость одной фазы (на единицу длины линии) в случае симметричной системы может быть определена как отношение

$$C_0 = \frac{\dot{Q}_{10}}{\dot{U}_1} = \beta_{11} - \beta_{12}. \quad (12, 35)$$

Пользуясь уравнением с частичными емкостями, мы можем написать для первой фазы

$$\dot{Q}_{10} = C_{11} \dot{U}_1 + C_{12} (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + C_{13} (\dot{U}_1 - \dot{U}_3). \quad (12, 36)$$

Если провода расположены симметрично, то $C_{12} = C_{13}$. При симметрии фазовых напряжений относительно земли

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0.$$

Тогда из (12, 36) получаем, что

$$Q_{10} = C_{11}\dot{U}_1 + C_{12}(\dot{U}_1 + \dot{U}_1 - \dot{U}_2 - \dot{U}_3) = (C_{11} + 3C_{12})\dot{U}_1,$$

и рабочая емкость одной фазы (на единицу длины линии)

$$C_0 = \frac{\dot{Q}_{10}}{\dot{U}_1} = C_{11} + 3C_{12}. \tag{12, 37}$$

Как нетрудно видеть, емкость на фазу равна емкости одной стороны эквивалентной симметричной звезды, которой могут быть заменены симметричные треугольник и звезда частичных емкостей (фиг. 12, 10).

Посредством транспозиции проводов, расположенных несимметрично друг относительно друга или относительно земли, вся линия в целом может быть сделана симметричной. При этом точно так же можно говорить о емкости на фазу (если попрежнему $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$). Однако вместо выражений (12, 35) и (12, 37) будем иметь

$$C_0 = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}}{3} - \frac{\beta_{12} + \beta_{23} + \beta_{31}}{3}, \tag{12, 38}$$

или

$$C_0 = \frac{C_{11} + C_{22} + C_{33}}{3} + C_{12} + C_{23} + C_{31}. \tag{12, 39}^1$$

Значения емкостных коэффициентов (β) и частичных емкостей ($C_{12}, C_{23}, \dots, C_{11}, \dots$) могут быть найдены при известном расположении проводов по формулам, выведенным в гл. 2 (§ 15, 16, 17), или же определены экспериментально.

Более просто рабочая емкость на фазу может быть подсчитана по формуле, выводимой из уравнений с потенциальными коэффициентами α . Для первой фазы

$$\dot{U}_1 = \alpha_{11}\dot{Q}_{10} + \alpha_{12}\dot{Q}_{20} + \alpha_{13}\dot{Q}_{30}. \tag{12, 40}$$

Если геометрическое расположение проводов можно считать симметричным, то $\alpha_{12} = \alpha_{13}$. Кроме того, при изолированности системы (нейтраль не заземлена), а также в случае геометрической симметрии и выполнения

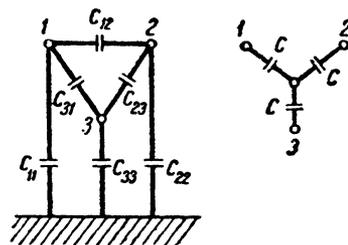
¹ Заряд на единицу длины провода первой фазы на трех участках различного расположения проводов будет

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{10}' &= C_{11}\dot{U}_1 + C_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + C_{13}(\dot{U}_1 - \dot{U}_3); \\ \dot{Q}_{10}'' &= C_{22}\dot{U}_1 + C_{23}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + C_{21}(\dot{U}_1 - \dot{U}_3); \\ \dot{Q}_{10}''' &= C_{33}\dot{U}_1 + C_{31}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + C_{32}(\dot{U}_1 - \dot{U}_3). \end{aligned}$$

Среднее значение заряда первой фазы на единицу длины (при условии $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$) будет, следовательно,

$$\dot{Q}_{10} = \frac{\dot{Q}_{10}' + \dot{Q}_{10}'' + \dot{Q}_{10}'''}{3} = \left(\frac{C_{11} + C_{22} + C_{33}}{3} + C_{12} + C_{23} + C_{31} \right) \dot{U}_1,$$

откуда и вытекает уравнение (12, 39). На таком же рассуждении основан и вывод уравнения (12, 39).



Фиг. 12, 10.

условия $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$ мы будем иметь, что

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 = 0.$$

Но в таком случае мы можем из (12,40) получить

$$\dot{U}_1 = \alpha_{11} \dot{Q}_{10} + \alpha_{12} (\dot{Q}_{20} + \dot{Q}_{30}) = (\alpha_{11} - \alpha_{12}) \dot{Q}_{10}, \quad (12, 41)$$

откуда рабочая емкость одной фазы

$$C_0 = \frac{\dot{Q}_{10}}{\dot{U}_1} = \frac{1}{\alpha_{11} - \alpha_{12}}. \quad (12, 42)$$

Когда при несимметричном расположении проводов линии произведена транспозиция и попеременно $\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 = 0$, мы можем для определения емкости на фазу пользоваться той же формулой (12, 42), подразумевая под α_{11} и α_{12} среднее значение этих величин за полный цикл транспозиции.

Рассмотрим, какой окончательный вид можно придать формуле (12, 42) в применении к воздушным линиям передач. Обозначим, как и раньше, расстояние между соседними проводами через a_{12} , a_{23} , a_{31} , высоту проводов над землей через h_1 , h_2 , h_3 , расстояние между проводами и их зеркальными отражениями через b_{12} , b_{23} и b_{13} (фиг. 12,7), буквой r будем обозначать радиус проводов, тогда $\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{r}$; $\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{r}$; $\alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_3}{r}$; $\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}}$; $\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{23}}{a_{23}}$; $\alpha_{31} = \alpha_{13} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{13}}{a_{13}}$.

В случае воздушной линии без транспозиции, но при $a_{12} = a_{31} = a_{23} = a$ и $h \gg a$ мы можем считать, что $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}$ и $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$, так как при $h \gg a$ всегда можно считать, что $b_{12} = b_{23} = b_{13} = 2h_1 = 2h_2 = 2h_3 = 2h$; тогда

$$C = \frac{1}{\alpha_{11} - \alpha_{12}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r} - \ln \frac{2h}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{a}{r}}. \quad (12, 43)$$

Подставляя значение $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-9}$ F/km, получаем, что

$$C = \frac{5,56 \cdot 10^{-8}}{\ln \frac{a}{r}} \text{ F/km} = \frac{2,42 \cdot 10^{-8}}{\lg \frac{a}{r}} \text{ F/km}. \quad (12, 44)$$

Для несимметричной линии, в которой произведена транспозиция,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ln \frac{2h_1}{r} + \ln \frac{2h_2}{r} + \ln \frac{2h_3}{r}}{3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{3} \ln \frac{2^3 h_1 h_2 h_3}{r^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt[3]{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}}{r} = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r}, \end{aligned}$$

где $h = \sqrt[3]{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}$ — среднее геометрическое значение высоты.

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{23} = \alpha_{32} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ln \frac{b_{12}}{a_{12}} + \ln \frac{b_{23}}{a_{23}} + \ln \frac{b_{31}}{a_{31}}}{3} = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{3} \ln \frac{b_{12} b_{23} b_{31}}{a_{12} a_{23} a_{31}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt[3]{b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31}}}{\sqrt[3]{a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

где b и a — средние геометрические значения соответствующих расстояний.

Найденные выражения α_{12} и α_{11} для транспонированной линии подставляем в формулу (12, 42) и получаем, что

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r} - \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2ha}{rb}}, \quad (12, 45)$$

или

$$C_0 = \frac{5,56 \cdot 10^{-8}}{\ln \frac{2ha}{rb}} \text{ F/km} = \frac{2,42 \cdot 10^{-8}}{\lg \frac{2ha}{rb}} \frac{\text{F}}{\text{km}}. \quad (12, 46)$$

При большой высоте подвеса (при $h \gg a$) можно принять $b = 2h$. Тогда формула (12, 46) переходит в (12, 44).

Пример 12,3. Найти емкость каждого провода линии по данным предыдущего примера.

Так как

$$\lg \frac{a}{r} = 2,778,$$

то

$$C_0 = \frac{2,41 \cdot 10^{-8}}{2,778} \text{ F/km} = 0,00867 \cdot 10^{-6} \text{ F/km} = 0,00867 \text{ } \mu\text{F/km}.$$

12.4. Прямая и отраженная волна

Решение основных дифференциальных уравнений (12, 1) и (12, 2) привело нас к соотношению (12, 6)

$$\dot{U} = \dot{A}e^{\gamma x} + \dot{B}e^{-\gamma x},$$

выражающему напряжению в произвольной точке линии, находящейся на расстоянии x от ее начала, и к соотношению (12, 9)

$$\dot{I} = \frac{\dot{B}}{Z_\lambda} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}}{Z_\lambda} e^{\gamma x},$$

выражающему ток в той же самой точке. Разберем более подробно, что представляет собой каждый член этих двух соотношений. Обозначим

$$\begin{array}{l} \dot{U}' = \dot{B}e^{-\gamma x} \\ \dot{U}'' = \dot{A}e^{\gamma x} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \dot{I}' = \frac{\dot{B}}{Z_\lambda} e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}'}{Z_\lambda} \\ \dot{I}'' = \frac{\dot{A}}{Z_\lambda} e^{\gamma x} = \frac{\dot{U}''}{Z_\lambda} \end{array} \right.$$

Так как

$$\gamma = \beta + j\alpha,$$

то

$$\dot{U}' = \dot{B}e^{-\beta x}e^{-j\alpha x} = \dot{B}e^{j\psi_1}e^{-\beta x}e^{-j\alpha x} = \dot{B}e^{-\beta x}e^{-j\alpha x + j\psi_1}.$$

Переходя к мгновенным значениям, получим

$$u' = B \sqrt{2} e^{-\beta x} \sin(\omega t - \alpha x + \psi_1). \quad (12, 47)$$

Выражение $B \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha x + \psi_1)$ изображает бегущую волну. В самом деле, при $x = \text{const}$, т. е. для какой-нибудь определенной точки, оно дает синусоидальное изменение напряжения во времени, а при $t = \text{const}$, т. е. для определенного момента времени,—синусоидальное распределение напряжения вдоль линии. Длина волны λ определяется из условия, что в двух точках, находящихся на расстоянии λ , волна имеет в любой момент оди-

наковую фазу, т. е. что

$$\sin [\omega t + \psi_1 - \alpha x] = \sin [\omega t + \psi_1 - \alpha (x + \lambda)].$$

Это соотношение будет выполнено, если положить

$$\alpha \lambda = 2\pi,$$

откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (12, 48)$$

Направление и скорость (v) движения волны можно определить, исходя из положения, что то значение, которое в момент t волна имела в точке x , в момент $t + dt$ она будет иметь в точке $x + v dt$. Это дает

$$\omega t + \psi_1 - \alpha x = \omega (t + dt) + \psi_1 - \alpha (x + v dt),$$

откуда

$$\omega dt - \alpha v dt = 0,$$

или

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\pi f}{\alpha} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}. \quad (12, 49)$$

Мы получили то соотношение между скоростью распространения, длиной волны и периодом, которое характерно для всякой бегущей волны. Положительное значение скорости указывает при этом на то, что волна распространяется в сторону увеличения x , т. е. по направлению к концу линии, так как при $v > 0$ $x + v dt > x$. Множитель $e^{-\beta x}$, входящий в состав выражения напряжения, указывает на то, что по мере удаления от начала линии амплитуда волны уменьшается, так как $e^{-\beta x} < 1$. Это явление носит название затухания волны, а величина β — коэффициент затухания. Величина α называется коэффициентом сдвига фазы, а весь комплекс $\gamma = \beta + j\alpha$ — постоянной распространения волны вдоль линии.

Рассмотренная волна напряжения называется прямой волной. Ей соответствует прямая волна тока

$$i' = \frac{U'}{Z_C} = \frac{U'}{z_C e^{-j\theta}} = \frac{U'}{z_C} e^{j\theta},$$

опережающая волну напряжения на угол θ (см. § 12,2). Мгновенное значение тока i' выражается поэтому уравнением

$$i' = \frac{B \sqrt{2}}{z_C} e^{-\beta x} \sin (\omega t - \alpha x + \psi_1 + \theta). \quad (12, 50)$$

Второй член уравнения напряжения

$$U'' = \dot{A} e^{\gamma x} = A e^{j\psi_2} e^{\beta x} e^{j\alpha x} = A e^{\beta x} e^{j\alpha x + j\psi_2}$$

имеет мгновенное значение

$$u'' = A \sqrt{2} e^{\beta x} \sin (\omega t + \alpha x + \psi_2) \quad (12, 51)$$

и также представляет собой бегущую волну с такой же длиной λ . Однако направление движения этой волны обратное: от конца линии к началу. Действительно, аналогично предыдущему имеем

$$\omega t + \psi_2 + \alpha x = \omega (t + dt) + \psi_2 + \alpha (x + v dt),$$

откуда

$$\omega dt + \alpha v dt = 0,$$

и следовательно,

$$v = -\frac{\omega}{\alpha} = -\frac{\lambda}{T}.$$

Отрицательное значение скорости и указывает на ее обратное направление. Вместе с этим по мере приближения к началу линии, т. е. по мере уменьшения x , уменьшается и множитель $e^{\beta x}$, а с ним и амплитуда напряжения. Иначе говоря, и эта волна затухает по мере своего продвижения, имея такой же коэффициент затухания, как и прямая волна. Распространение второй волны от конца линии к ее началу дало повод назвать ее отраженной волной. Отраженная волна напряжения вызывает отраженную волну тока

$$i'' = \frac{U''}{Z_\lambda} = \frac{U''}{z_\lambda} e^{j\theta},$$

мгновенное значение которой выражается уравнением

$$i'' = \frac{A \sqrt{2}}{Z_\lambda} e^{\beta x} \sin(\omega t + \alpha x + \psi_2 + \theta). \quad (12, 52)$$

Таким образом процесс работы линии с распределенными постоянными можно рассматривать как результат наложения отраженных волн напряжения и тока на прямые.

Исследуем влияние активного сопротивления линии на длину волны λ и скорость ее распространения v . Коэффициент сдвига фазы α представляет собой мнимую часть постоянной распространения волны

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{z_0 e^{j\varphi_0} y_0 e^{j90^\circ}} = \sqrt{z_0 y_0} e^{j \frac{\varphi_0 + 90^\circ}{2}},$$

откуда

$$\alpha = \sqrt{z_0 y_0} \sin \frac{\varphi_0 + 90^\circ}{2},$$

а так как для произвольного угла δ

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{2}}$$

и, следовательно,

$$\sin \frac{\varphi_0 + 90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\varphi_0 + 90^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi_0}{2}},$$

то

$$\alpha = \sqrt{z_0 y_0} \frac{1 + \sin \varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{z_0 y_0 + z_0 \sin \varphi_0 y_0}{2}} = \sqrt{\frac{z_0 y_0 + x_0 y_0}{2}}. \quad (12, 53)$$

Если активное сопротивление линии R_0 настолько меньше индуктивного, что можно принять $z_0 = x_0$, то

$$\alpha = \sqrt{x_0 y_0} = \sqrt{\omega L_0 \cdot \omega C_0} = \omega \sqrt{L_0 C_0},$$

и тогда

$$v_0 = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (12, 54)$$

Если пренебречь внутренней индуктивностью проводов и подставить сюда вместо L_0 и C_0 их выражения (12,33) и (12,44), то

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{4,6 \lg \frac{a}{r} \cdot 10^{-4} \frac{2,42 \cdot 10^{-8}}{\lg \frac{a}{r}}}} = \frac{10^5}{\sqrt{4,6 \cdot 0,0241}} = 3 \cdot 10^5 \text{ km/sec},$$

т. е. при отсутствии потерь в линии электромагнитная волна распространяется вдоль нее со скоростью света. Соответствующая длина волны при $f = 50 \text{ Hz}$, т. е.

$$T = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ сек.},$$

$$\lambda_0 = v_0 T = 3 \cdot 10^5 \cdot 0,02 = 0,06 \cdot 10^5 = 6000 \text{ km}.$$

Длина соответствующих линий передачи энергии не достигает таким образом и $1/10$ длины волны.

С увеличением сопротивления, как видно из (12,53), α увеличивается, а ϑ и λ уменьшаются.

12.5. Бесконечно длинная линия

Чем длиннее линия, тем больший промежуток времени нужен для того, чтобы прямая волна дошла до конца линии и, отразившись от него, дала отраженную волну. Если представить себе бесконечно длинную линию, то в ней, очевидно, совсем не будет отраженной волны. Близкий к этому случай мы будем иметь, когда благодаря большой длине линии затухание практически сведет на-нет отраженную волну.

Таким образом для бесконечно длинной линии $A=0$, а так как в начале линии ($x=0$) напряжение U_1 задано, то согласно (12,6)

$$\dot{U}_1 = \dot{B}e^0,$$

или

$$\dot{B} = \dot{U}_1,$$

а следовательно,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 e^{-\gamma x} \quad (12, 55)$$

и

$$I = \frac{\dot{U}_1}{Z_\lambda} e^{-\gamma x} = \dot{I}_1 e^{-\gamma x}. \quad (12, 56)$$

Таким образом напряжение и ток распределяются вдоль бесконечно длинной линии по затухающим синусоидам, перемещающимся от начала линии к ее концу, причем синусоида тока опережает синусоиду напряжения на угол θ .

При определенных условиях и конечная линия может обладать свойством бесконечно длинной—не давать отраженной волны. Это будет в том случае, если сопротивление приемника, включенного на конце линии, равно Z_λ , т. е. если

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_\lambda.$$

В самом деле, применяя уравнения (12,6) и (12,9) к концу линии ($x=l$), получим

$$\dot{U}_2 = \dot{B}e^{-\gamma l} + \dot{A}e^{\gamma l}$$

и

$$\dot{I}_2 Z_\lambda = \dot{B}e^{-\gamma l} - \dot{A}e^{\gamma l}.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_\lambda = 2\dot{A}e^{\gamma l},$$

откуда

$$\dot{A} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_\lambda}{2e^{\gamma l}},$$

и если $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_\lambda$, то $A=0$, что и выражает отсутствие отраженной волны. Такая нагрузка линии носит название нагрузки без отражения.

12.6. Линия без искажения

Если напряжение в начале линии несинусоидально, его можно разложить по Фурье на ряд гармоник. Однако скорость распространения

различных гармоник и их затухание не будут одинаковы, так как α и β зависят от частоты. Благодаря этому формы кривых напряжения и тока не только будут отличаться друг от друга вследствие различного волнового сопротивления линии для разных гармоник, но и будут изменяться по мере продвижения волны вдоль линии. Это называется **искажением волн**. Впрочем, в двух случаях искажения волн не происходит. Первый из них имеет место при отсутствии потерь в линии, когда

$$Z_\lambda = \sqrt{\frac{0 + j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

и

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

не зависят от частоты, а

$$\beta_0 = \sqrt{z_0 y_0} \cos \frac{90^\circ + 90^\circ}{2} = \omega \sqrt{L_0 C_0} \cos 90^\circ = 0,$$

т. е. затухания совсем не происходит.

Второй случай мы можем иметь в линии, обладающей сопротивлением и не вполне совершенной изоляцией, если постоянные линии удовлетворяют соотношению

$$\frac{g_0}{R_0} = \frac{C_0}{L_0}. \quad (12, 57)$$

В этом случае волновое сопротивление линии

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{R_0 \frac{C_0}{L_0} + j\omega C_0 \frac{L_0}{L_0}}} = \\ &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{\frac{C_0}{L_0} (R_0 + j\omega L_0)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \end{aligned} \quad (12, 58)$$

таково же, как и при отсутствии потерь. Постоянная распространения волны

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) (g_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0) \frac{C_0}{L_0} (R_0 + j\omega L_0)} = (R_0 + j\omega L_0) \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = \\ &= R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}, \end{aligned}$$

откуда

$$\beta = R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \quad (12, 59)$$

и

$$\alpha = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad (12, 60)$$

а следовательно,

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (12, 61)$$

Таким образом как скорость распространения волны, так и ее затухание не зависят от частоты и поэтому одинаковы для всех гармоник. Линия, постоянные которой удовлетворяют соотношению (12, 57), называется **линией без искажения**.

12.7. Приближенные уравнения

Полученные в § 12,1 уравнения (12, 13), а также (12, 14) и (12,15) с гиперболическими функциями комплексного аргумента могут быть приближенно представлены в более простом виде. С этой целью Штейнметц воспользовался разложением гиперболических функций в бесконечный сходящийся ряд и взял первые два члена этого ряда

$$\operatorname{ch} \gamma l = 1 + \frac{(\gamma l)^2}{2} + \dots = 1 + \frac{Z_0 Y_0 l^2}{2} = 1 + \frac{ZY}{2}$$

и

$$\operatorname{sh} \gamma l = \gamma l + \frac{(\gamma l)^3}{6} + \dots = \gamma l \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{6} \right] = \sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right),$$

где Z и Y относятся ко всей длине линии.

Подставляя эти выражения в уравнение (12, 13) и имея в виду, что

$$Z_\lambda = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}},$$

найдем

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) - i_1 \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right)$$

и

$$I_2 = i_1 \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) - \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}} \sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right)$$

или

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) - i_1 Z \left(1 + \frac{ZY}{6} \right) \quad (12, 62)$$

и

$$I_2 = I_1 \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) - \dot{U}_1 Y \left(1 + \frac{ZY}{6} \right). \quad (12, 63)$$

Таким же путем преобразование (12, 14) и (12, 15) приводит к уравнениям

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) + i_2 Z \left(1 + \frac{ZY}{6} \right); \quad (12, 64)$$

$$i_1 = i \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) + \dot{U}_2 Y \left(1 + \frac{ZY}{6} \right). \quad (12, 65)$$

Эти приближенные уравнения при частоте 50 Hz оказываются достаточно точными для линий, длина которых не превышает 250—300 km. Для линий большей длины (или при большей частоте) следует брать большее число членов при разложении $\operatorname{ch} \gamma l$ и $\operatorname{sh} \gamma l$ в ряды.

Пример 12, 4. В качестве примера рассчитаем линию, данные которой были приведены в примере 12,1. Ее можно рассматривать как трехфазную с линейным напряжением в конце $U_{2u} = 60\sqrt{3} = 104$ kV.

В уравнения (12,64) и (12,65) входят, однако, фазные напряжения и притом обязательно в вольтах, так как произведение $i_2 Z$ получается в вольтах если i_2 выражено в амперах, а Z — в омах, а произведение $\dot{U}_2 Y$ получится в амперах лишь в том случае, если \dot{U}_2 выражено в вольтах, а Y — в сименсах.

Согласно данным примера 12,1

$$Z_0 = 0,185 + j0,4 = 0,44 e^{j65^\circ 10'} \Omega/\text{km}, \text{ а } Y_0 = j2,8 \cdot 10^{-6} \text{ S/km.}$$

откуда при $l = 200$ km

$$Z = (0,185 + j0,4) 200 = 37 + j80 = 88 e^{j65^\circ 10'} \Omega$$

и

$$Y = j2,8 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = j560 \cdot 10^{-6} = 560 \cdot 10^{-6} e^{j90^\circ} \text{ S,}$$

а следовательно,

$$1 + \frac{ZY}{2} = 1 + \frac{(37 + j80) j560 \cdot 10^{-6}}{2} = 1 + j10,35 \cdot 10^{-3} - 22,4 \cdot 10^{-3} = \\ = (977,6 + j10,35) \cdot 10^{-3} = 0,978 e^{j0^{\circ}47'}$$

и

$$1 + \frac{ZY}{6} = 1 + \frac{j10,35 \cdot 10^{-3} - 22,4 \cdot 10^{-3}}{3} = (992,5 + j3,45) \cdot 10^{-3} = 0,993 e^{j0^{\circ}12'}$$

Таким образом множители $1 + \frac{ZY}{2}$ и $1 + \frac{ZY}{6}$ немного уменьшают абсолютную величину тех векторов, которые на них умножаются, и практически не влияют на их направление, так как углами в $0^{\circ}47'$ и, тем более, $0^{\circ}12'$ можно пренебречь.

Теперь определяем фазное напряжение и ток в начале линии. Направляя \dot{U}_2 по действительной оси и имея в виду, что $\cos \varphi_2 = 0,8$, а $I_2 = 125$ А, получим

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{-j \arccos 0,8} = 125 e^{-j37^{\circ}},$$

и далее, по формулам (12,64) и (12,65)

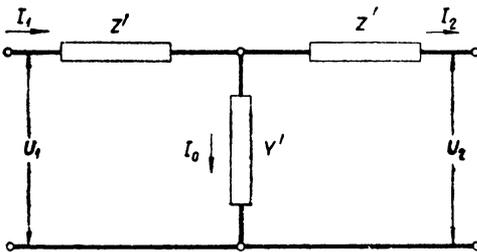
$$\dot{U}_1 = 60\,000 \cdot 0,978 + 125 e^{-j37^{\circ}} \cdot 88 e^{j65^{\circ}10'} \cdot 0,993 = 58\,700 + 10\,900 e^{j28^{\circ}} = \\ = 58\,700 + 9\,630 + j5\,120 = 68\,330 + j5\,120 = 68\,500 e^{j4^{\circ}} \text{ В.}$$

$$\dot{I}_1 = 125 e^{-j37^{\circ}} \cdot 0,978 + 60\,000 \cdot 560 \cdot 10^{-6} e^{j90^{\circ}} \cdot 0,993 = 122 e^{-j37^{\circ}} + 33,4 e^{j90^{\circ}} = \\ = 97,8 - j73,4 + j33,4 = 97,8 - j40 = 106 e^{-j22^{\circ}} \text{ А.}$$

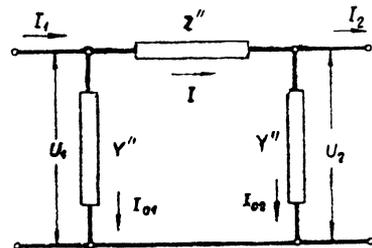
Результаты достаточно близко сходятся с полученными ранее графическим путем.

12,8. Схемы замещения

Схемой замещения линии с распределенными постоянными называется такая схема с сосредоточенными постоянными, которая приводит к найденным нами соотношениям между токами и напряжениями



Фиг. 12, 11.



Фиг. 12, 12.

в начале и в конце линии. Как показал Кеннелли, такой схемой могут служить симметричные Т-образная или П-образная схемы, представленные на фиг. 12,11 и 12,12. Определим постоянные этих схем Z' , Y' и Z'' , Y'' через постоянные линии Z и Y .

Т-образная схема. В Т-образной схеме напряжение между точками разветвления

$$\dot{U} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z',$$

а создаваемый им в ветви Y' ток

$$\dot{I}_0 = \dot{U} Y' = \dot{U}_2 Y' + \dot{I}_2 Z' Y',$$

откуда первичный ток

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = \dot{I}_2(1 + Z'Y') + \dot{U}_2Y' \quad (12,66)$$

и первичное напряжение

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{U} + \dot{I}_1Z' &= \dot{U}_2 + \dot{I}_2Z' + [\dot{I}_2(1 + Z'Y') + \dot{U}_2Y']Z' = \\ &= \dot{U}_2(1 + Z'Y') + \dot{I}_2Z'(2 + Z'Y'). \end{aligned} \quad (12,67)$$

Сравнивая полученные выражения \dot{U}_1 и \dot{I}_1 с уравнениями (12,14)

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_2 Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l$$

и (12,15)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{Z_\lambda} \operatorname{sh} \gamma l,$$

нетрудно видеть, что, для того чтобы при любых значениях \dot{U}_2 и \dot{I}_2 в обоих случаях получались одинаковые значения \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , необходимо и достаточно, чтобы были соответственно равны коэффициенты при \dot{U}_2 и \dot{I}_2 в уравнениях (12,66) и (12,67), с одной стороны, и (12,14) и (12,15) — с другой, т. е. чтобы было

$$\begin{aligned} 1 + Z'Y' &= \operatorname{ch} \gamma l, \\ Z'(2 + Z'Y') &= Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l \end{aligned}$$

и

$$Y' = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z_\lambda}.$$

Мы имеем таким образом для определения Z' и Y' три уравнения с двумя неизвестными. Такая система уравнений имеет решение лишь в том случае, если одно из трех уравнений является следствием двух остальных. Если бы это условие оказалось невыполненным, замена линии намеченной эквивалентной схемой была бы невозможна. Докажем, что указанное условие в действительности всегда существует. Для этого определим Y' из первых двух уравнений и сравним полученное выражение с третьим уравнением. Из первого уравнения

$$Z'Y' = \operatorname{ch} \gamma l - 1,$$

или

$$Y' = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{Z'},$$

и следовательно,

$$2 + Z'Y' = \operatorname{ch} \gamma l + 1,$$

откуда согласно второму уравнению

$$Z' = \frac{Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l}{2 + Z'Y'} = \frac{Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l + 1}.$$

Подставляя теперь Z' в найденное из первого уравнения выражение Y' , получим

$$Y' = \frac{\operatorname{ch} \gamma l - 1}{Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l} (\operatorname{ch} \gamma l + 1) = \frac{\operatorname{ch}^2 \gamma l - 1}{Z_\lambda \operatorname{sh} \gamma l},$$

а так как

$$\operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1,$$

то

$$\operatorname{ch}^2 \gamma l - 1 = \operatorname{sh}^2 \gamma l,$$

и поэтому

$$Y' = \frac{\text{sh}^2 \gamma l}{Z_\lambda \text{sh} \gamma l} = \frac{\text{sh} \gamma l}{Z_\lambda}.$$

Мы получили, таким образом, соотношение, вполне тождественное с третьим уравнением.

Доказав возможность замены линии Т-образной схемой замещения, выразим теперь постоянные этой схемы Z' и Y' через постоянные линии Z и Y . Для этого воспользуемся только что полученными выражениями

$$Z' = Z_\lambda \frac{\text{sh} \gamma l}{\text{ch} \gamma l + 1} \quad (12,68)$$

и

$$Y' = \frac{1}{Z_\lambda} \text{sh} \gamma l \quad (12,69)$$

и подставим в них приближенные выражения $\text{sh} \gamma l$ и $\text{ch} \gamma l$ в виде двух первых членов соответствующих бесконечных рядов, как это было сделано в § 12,7, а именно:

$$\text{sh} \gamma l = \sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right)$$

и

$$\text{ch} \gamma l = 1 + \frac{ZY}{2}.$$

Имея при этом в виду, что $Z_\lambda = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$, получим

$$Z' = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \frac{\sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right)}{2 + \frac{ZY}{2}} = \frac{Z \left(1 + \frac{ZY}{6} \right)}{2 + \frac{ZY}{2}} = \frac{Z}{2} \frac{1 + \frac{ZY}{6}}{1 + \frac{ZY}{4}} = \frac{Z}{2} K_1 \quad (12,70)$$

и

$$Y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}} \sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right) = Y \left(1 + \frac{ZY}{6} \right) = Y \cdot K_2, \quad (12,71)$$

где

$$K_1 = \frac{1 + \frac{ZY}{6}}{1 + \frac{ZY}{4}} \quad \text{и} \quad K_2 = 1 + \frac{ZY}{6}$$

— так называемые коэффициенты Кеннелли.

Рассмотрим их более подробно. В числителе выражения K_1 прибавим и вычтем $\frac{ZY}{4}$. Тогда

$$K_1 = \frac{1 + \frac{ZY}{4} + \frac{ZY}{6} - \frac{ZY}{4}}{1 + \frac{ZY}{4}} = \frac{1 + \frac{ZY}{4} - \frac{ZY}{12}}{1 + \frac{ZY}{4}} = 1 - \frac{ZY}{12 \left(1 + \frac{ZY}{4} \right)} \approx 1 - \frac{ZY}{12}.$$

Подставив теперь в выражения K_1 и K_2

$$Z = (R_0 + jx_0) \cdot l \quad \text{и} \quad Y = jy_0 l,$$

получим

$$K_1 = 1 - \frac{1}{12} l^2 [jR_0 y_0 - x_0 y_0] = 1 + \frac{x_0 y_0}{12} l^2 - j \frac{R_0 y_0}{12} l^2$$

и

$$K_2 = 1 + \frac{1}{6} l^2 [jR_0 y_0 - x_0 y_0] = 1 - \frac{x_0 y_0}{6} l^2 + j \frac{R_0 y_0}{6} l^2.$$

Так как мнимая часть обоих комплексов весьма мала по сравнению с их действительной частью, то ею можно пренебречь, и тогда

$$K_1 = 1 + \frac{x_0 y_0}{12} l^2$$

и

$$K_2 = 1 - \frac{x_0 y_0}{6} l^2.$$

Но

$$\begin{aligned} x_0 y_0 &= \omega L_0 \cdot \omega C_0 \approx \omega^2 \cdot 4,6 \lg \frac{a}{r} \cdot 10^{-4} \frac{2,42 \cdot 10^{-8}}{\lg \frac{a}{r}} = \omega^2 \cdot 4,6 \cdot 0,0241 \cdot 10^{-10} = \\ &= 0,111 \cdot 10^{-10} \omega^2, \end{aligned}$$

а при стандартной частоте $f = 50 \text{ Hz}$

$$x_0 y_0 = 0,111 \cdot 10^{-10} \cdot 314^2 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-2},$$

и тогда

$$K_1 = 1 + \frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{12} l^2 = 1 + 0,092 \cdot 10^{-6} l^2 \quad (12, 72)$$

и

$$K_2 = 1 - \frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{6} l^2 = 1 - 0,184 \cdot 10^{-6} l^2. \quad (12, 73)$$

Возвращаясь теперь к уравнениям (12, 70) и (12, 71), мы можем констатировать, что Z' в схеме замещения представляет собой активно-индуктивное сопротивление половины длины линии, несколько увеличенное путем умножения на $K_1 > 1$, а Y' — емкостную проводимость всей линии, несколько уменьшенную путем умножения на $K_2 < 1$.

Если K_2 отличается от единицы менее чем на 1%, а K_1 , следовательно, еще меньше, то можно принять $K_1 = K_2 = 1$, т. е. считать емкость всей линии просто сосредоточенной в ее середине. Это будет при

$$0,184 \cdot 10^{-6} l^2 < 0,01,$$

т. е. при $l < 234 \text{ km}$ (если $f = 50 \text{ Hz}$).

При большей длине линии такой упрощенный расчет дает уже заметную неточность.

Π-образная схема. Аналогичным путем могут быть найдены постоянные Π-образные схемы замещения Z'' и Y'' (фиг. 12,12). Ток в ветви Y'' , примыкающей к приемнику,

$$\dot{i}_{02} = \dot{U}_2 Y'',$$

а ток в участке Z''

$$\dot{i} = \dot{i}_2 + \dot{i}_{02} = \dot{i}_2 + \dot{U}_2 Y''.$$

Первичное напряжение

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{i} Z'' = \dot{U}_2 + (\dot{i}_2 + \dot{U}_2 Y'') Z'' = \dot{U}_2 (1 + Z'' Y'') + \dot{i}_2 Z'', \quad (12, 74)$$

а первичный ток

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 = \dot{i} + \dot{i}_{01} &= \dot{i}_2 + \dot{U}_2 Y'' + \dot{U}_1 Y'' = \dot{i}_2 + Y'' [\dot{U}_2 + \dot{U}_2 (1 + Z'' Y'') + \\ &+ \dot{i}_2 Z''] = \dot{i}_2 (1 + Z'' Y'') + \dot{U}_2 (2 + Z'' Y'') Y''. \end{aligned} \quad (12, 75)$$

Сравнивая эти выражения с (12, 14) и (12, 15), находим

$$\left. \begin{aligned} 1 + Z'' Y'' &= \text{ch } \gamma l; \\ Z'' &= Z_\lambda \text{ sh } \gamma l; \\ (2 + Z'' Y'') Y'' &= \frac{\text{sh } \gamma l}{Z_\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (12, 76)$$

Нетрудно и в этом случае убедиться в том, что любое из этих трех соотношений является следствием двух остальных.

Далее из первого и третьего уравнений находим

$$2 + Z'' Y'' = \operatorname{ch} \gamma l + 1$$

и

$$Y'' = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z_\lambda (2 + Z'' Y'')} = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z_\lambda (\operatorname{ch} \gamma l + 1)}, \quad (12, 77)$$

и подставляя в (12, 74) и (12, 75)

$$\operatorname{sh} \gamma l = \sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right)$$

и

$$\operatorname{ch} \gamma l = 1 + \frac{ZY}{2},$$

а также

$$Z_\lambda = \sqrt{\frac{Z}{Y}},$$

получим

$$Z'' = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right) = Z \left(1 + \frac{ZY}{6} \right) = ZK_2 \quad (12, 78)$$

и

$$Y'' = \frac{\sqrt{ZY} \left(1 + \frac{ZY}{6} \right)}{\sqrt{\frac{Z}{Y}} \left(2 + \frac{ZY}{2} \right)} = \frac{\left(1 + \frac{ZY}{6} \right)}{2 \left(1 + \frac{ZY}{4} \right)} = \frac{Y}{2} K_1, \quad (12, 79)$$

где K_1 и K_2 имеют те же значения, как и для Т-образной схемы. Таким образом Z'' представляет собой активно-индуктивное сопротивление всей линии, несколько уменьшенное благодаря умножению на $K_2 < 1$, а Y'' — емкостную проводимость половины длины линии, несколько увеличенную благодаря умножению на $K_1 > 1$. Замена линии с распределенными постоянными той или другой эквивалентной схемой замещения дает возможность вести расчет такой линии путем построения в масштабе векторных диаграмм. Такой метод расчета является наиболее простым.

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

13, 1. Общие понятия

До сих пор мы рассматривали электрические цепи при установившемся, стационарном, режиме. Однако этот режим устанавливается не сразу после произведенного переключения (включения напряжения, изменения постоянных цепи и т. п.). В самом деле, при наличии индуктивности в цепи электрического тока или при наличии напряжения на конденсаторе в цепи имеется известный запас энергии, в магнитном ($\frac{Li^2}{2}$) или электрическом ($\frac{Cu^2}{2}$) полях. Так как для сообщения конечного количества энергии требуется конечное время, то ток в участке цепи, содержащем индуктивность, и напряжение на емкости не могут мгновенно изменяться на конечную величину. Таким образом наличие индуктивности делает невозможным скачкообразное изменение тока, а наличие емкости — скачкообразное изменение напряжения (напряжения на емкости).

Это может быть показано и на основании того, что при скачке тока э. д. с. индуктивности ($L \frac{di}{dt}$) стала бы бесконечно большой, а при скачке напряжения на емкости стал бы бесконечно большим ток в конденсаторной цепи ($C \frac{du}{dt}$). Несоответствие между теми значениями, которые имели ток в индуктивности и напряжение на емкости к моменту переключения, и теми значениями, которые должны были бы иметь эти величины в момент переключения согласно новым условиям цепи, и обуславливает возникновение переходных процессов, в течение которых значения токов и напряжений могут значительно отличаться от токов и напряжений установившегося режима.

В обычных условиях переходные процессы практически заканчиваются очень быстро (их длительность порядка нескольких миллисекунд), но, тем не менее, знание того, как эти процессы протекают, совершенно необходимо для понимания тех условий (иногда более трудных, чем при установившемся режиме), в которых при этом находится электротехническая установка.

13, 2. Переходные процессы в цепях с сосредоточенными и в цепях с распределенными постоянными

В этой главе мы будем рассматривать переходные процессы в цепях, постоянные которых (R , C и L) можно считать сосредоточенными, т. е. можно считать, что на протяжении любой ветви между двумя соседними

узлами ток имеет в любой данный момент одинаковое значение и, точно так же, что на любых параллельно включенных ветвях в каждый момент имеется одинаковое напряжение. В следующей главе мы рассмотрим нестационарные процессы в цепях с распределенными постоянными. Для этих цепей мы будем учитывать то, что по любому проводу изменение тока и напряжения распространяется с конечной скоростью, в силу чего в двух точках провода, находящихся друг от друга на конечном расстоянии, токи и напряжения могут быть различны.

13, 3. Вынужденный и свободный процессы при переходных явлениях

Законы Кирхгофа для электрических цепей, выражаемые дифференциальными уравнениями, остаются, конечно, справедливыми и для переходных процессов. Примером таких уравнений может служить известное уже нам (см. стр. 146) линейное дифференциальное уравнение цепи, содержащей активное сопротивление и индуктивность:

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} = u;$$

интеграл подобных уравнений, как известно из курса математики, определяется как сумма двух значений: значения функции, удовлетворяющего дифференциальному уравнению с правой частью, и значения общего интеграла данного дифференциального уравнения с правой частью, приравненной нулю. Решение вышеприведенного уравнения сводится таким образом к решению двух уравнений:

$$i'R + L \frac{di'}{dt} = u; \quad (13, 1)$$

$$i''R + L \frac{di''}{dt} = 0, \quad (13, 2)$$

причем

$$iR + L \frac{di}{dt} = (i' + i'')R + L \frac{d(i' + i'')}{dt}, \quad (13, 3)$$

и следовательно, интеграл данного уравнения будет

$$i = i' + i''. \quad (13, 4)$$

Следуя формальным математическим операциям, мы получили ток в переходном режиме как сумму двух составляющих: i' и i'' .

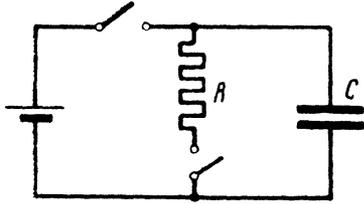
Этим двум составляющим тока можно дать и физическое истолкование, а именно: рассматривать переходный процесс как результат наложения вынужденного и свободного процессов. Вынужденный — это тот установившийся процесс, который возникает в цепи по окончании переходного процесса благодаря постоянному действию внешнего напряжения источника тока; он определяется уравнением (13,1). Свободный — это тот процесс, который вызывается несоответствием в начальный момент магнитного и электрического полей цепи условиям вынужденного процесса; он определяется уравнением (13,2).

Таким образом мы можем считать, что токи и напряжения во время переходного процесса складываются из вынужденных и свободных токов и напряжений, но нужно помнить, что физически реальны результирующий ток и результирующее напряжение.

13.4. Разряд конденсатора на сопротивление

Изучение переходных явлений мы начнем с простейших цепей, в которых имеется только R и C или R и L , т. е. с цепей, содержащих емкость и сопротивление, и цепей, содержащих индуктивность и сопротивление. Первый простой случай, которым мы займемся, это разряд конденсатора на сопротивление — процесс, связанный с исчезновением электрического поля.

Конденсатор, заряженный до напряжения u , замыкается на активное сопротивление R (фиг. 13,1). В таких условиях конденсатор берет на себя роль источника тока и за счет запаса энергии в электрическом поле некоторое время поддерживает напряжение между своими обкладками и ток в цепи; этот разрядный ток может быть выражен на основании закона Ома через напряжение конденсатора u_C следующим образом:



Фиг. 13.1.

$$i = \frac{u_C}{R}. \quad (13,5)$$

Но ток создается благодаря стеканию заряда с обкладок конденсатора и должен быть равен скорости убывания заряда

$$i = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}. \quad (13,6)$$

Подставляя полученное значение для i в уравнение (13,5), получаем

$$-C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_C}{R}, \text{ или } \frac{du_C}{u_C} = -\frac{dt}{RC}. \quad (13,7)$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\ln u_C = -\frac{t}{RC} + \ln K,$$

где $\ln K$ обозначает постоянную интегрирования, откуда

$$u_C = Ke^{-\frac{t}{RC}}. \quad (13,8)$$

Для того чтобы определить постоянную K , обращаемся к моменту начала разряда конденсатора; при $t=0$ напряжение между обкладками конденсатора $u_{C0} = U$, а следовательно, на основании уравнения (13,8) при $t=0$

$$u_{C0} = U = K.$$

Определив таким образом постоянную интегрирования из начальных условий, мы получаем окончательное выражение

$$u_C = U \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (13,9)$$

Разрядный ток конденсатора может быть определен на основании закона Ома:

$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (13,10)$$

¹ Производная взята со знаком минус, так как при положительном значении тока заряд (а следовательно, и напряжение) конденсатора непрерывно уменьшается.

Следовательно, напряжение и разрядный ток конденсатора убывают по закону показательной функции (фиг. 13, 2). При этом в начальный момент разряда ток

$$i_0 = \frac{U}{R},$$

следовательно, при малом R эти ток и напряжение в начальный момент могут иметь очень большую величину.

В рассмотренном процессе разряда конденсатора на сопротивление мы имеем только свободный ток и свободное напряжение, так как составляющие вынужденного установившегося режима равны нулю.

Энергия электрического поля во время разряда конденсатора постепенно превращается в тепло, выделяемое в сопротивлении R . За все время разряда конденсатора в тепло обращается по закону Джоуля энергия

$$W = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{CU^2}{2}, \quad (13, 11)$$

т. е. вся энергия электрического поля конденсатора превращается в джоулево тепло.

13.5. Постоянная времени цепи, содержащей R и C

Скорость, с которой уменьшаются напряжение и ток в рассматриваемой нами цепи, зависит от значения произведения RC : чем больше это произведение, тем медленнее уменьшается напряжение конденсатора и разрядный ток. Мы можем сказать, что сопротивление R , ограничивая величину разрядного тока, тем самым затягивает процесс разряда конденсатора. С другой стороны, чем больше емкость конденсатора, тем больше его заряд, тем больше (при том же напряжении) запас энергии в его электрическом поле, а за счет этой энергии поддерживается напряжение конденсатора и разрядный ток в цепи.

Величина RC носит название постоянной времени цепи и обозначается

$$\tau = RC. \quad (13, 12)$$

Постоянная времени измеряется в секундах

$$[RC] = \Omega F = \Omega \frac{A \text{ sec}}{V} = \frac{A \text{ sec}}{A} = \text{sec}.$$

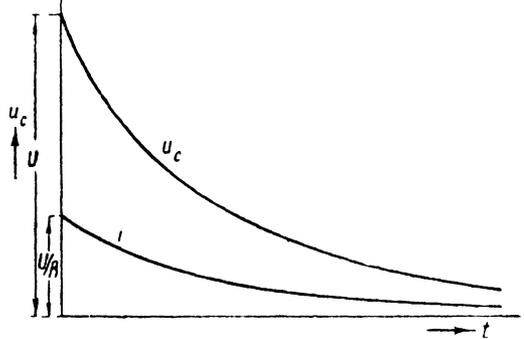
По истечении времени $t = \tau$ с момента начала разряда конденсатора напряжение конденсатора понизится до

$$u_c = Ue^{-1} = 0,368 \cdot U,$$

равным образом к этому моменту и разрядный ток уменьшится до

$$i = 0,368 \cdot i_0 = 0,368 \frac{U}{R}.$$

По истечении времени $t = 2\tau$ напряжение конденсатора и разрядный ток изменяются (уменьшаются) в $e^{-2} = (0,368)^2 = 0,135$ раз от своего на-



Фиг. 13,2.

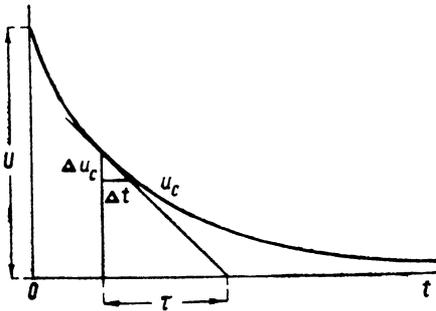
чального значения, при $t = 3\tau$ до $(0,368)^3 = 0,05$ и т. д. За каждый новый промежуток времени τ ток и напряжение изменяются в e^{-1} раз.

Существенно отметить то, что относительные изменения и тока и напряжения во все время разряда остаются постоянными т. е.

$$u_C / \frac{du_C}{dt} \text{ и } i / \frac{di}{dt} = \text{const.}$$

Значение постоянной времени τ можно определить графически по кривой изменения напряжения или тока во времени. Величина τ в масштабе графика равна подкасательной¹ в любой точке кривой напряжения (или тока) конденсатора (фиг. 13, 3).

Пример 13,1. Плоский конденсатор, имеющий площадь обкладок $S = 10 \text{ м}^2$, с изоляцией из парафинированной бумаги толщиной $d = 0,2 \text{ мм}$ заряжен до напряжения 2000 В и разряжается на собственную изоляцию. Определить промежуток времени, через который напряжение уменьшится в 100 раз.



Фиг. 13,3.

Сопротивление изоляции конденсатора мы можем определить приближенно, не учитывая влияния утечки по поверхности и утечки через воздух. Удельное сопротивление парафинированной бумаги будем считать $\rho = 5 \cdot 10^{15} \Omega \text{ см}$, следовательно, сопротивление изоляции конденсатора будет

$$R_{из} = \rho \frac{d}{S}.$$

Диэлектрическая проницаемость парафинированной бумаги $\epsilon_2 = 2$, следовательно, емкость рассматриваемого конденсатора

$$C = \frac{S \epsilon_r \epsilon_0}{d}.$$

Таким образом постоянная времени разряда через собственную изоляцию

$$\tau = R_{из} C = \rho \frac{d}{S} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} = \rho \epsilon_r \epsilon_0 = 5 \cdot 10^{15} \Omega \text{ см} \cdot 2 \cdot 0,886 \cdot 10^{-13} \text{ F/cm} = 886 \text{ сек.}$$

И следовательно, $u_C = 2000 e^{-t/886}$ вольт.

Нам нужно определить время t_x , когда u_C будет равно 20 В . При этом, очевидно, должно выполняться равенство

$$20 = 2000 e^{-\frac{t_x}{886}},$$

откуда, логарифмируя, находим

$$t_x = 886 \ln 100 = 3980 \text{ сек.}$$

В общем виде время t_x , по истечении которого напряжение u_C (или ток) уменьшится в N раз, выражается формулой

$$t_x = \tau \ln N.$$

¹ Подкасательной называется проекция на ось абсцисс отрезка касательной, заключенного между точкой касания и осью абсцисс.

13.6. Включение конденсатора на постоянное напряжение

Для того чтобы напряжение между обкладками конденсатора u_C достигло величины напряжения источника тока U , необходимо сообщить конденсатору заряд

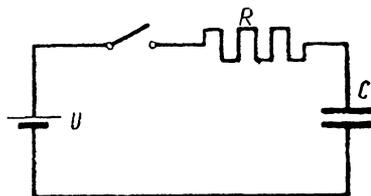
$$Q = U \cdot C.$$

Этот заряд должен перейти в конденсатор от источника тока, благодаря чему в цепи во время зарядки конденсатора должен проходить некоторый ток, равный скорости возрастания заряда конденсатора

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (13, 13)$$

При этом напряжение конденсатора будет

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$



Фиг. 13, 4.

При зарядке конденсатора постоянным током через сопротивление R (фиг. 13, 4) величина этого сопротивления ограничивает величину зарядного тока i и делает процесс зарядки более или менее длительным. Исследуем этот процесс.

Напряжение источника тока U должно уравновешивать падение напряжения на сопротивлении и напряжение конденсатора, следовательно,

$$U = iR + u_C = iR + \frac{1}{C} \int i dt = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (13, 14)$$

Как уже отмечалось выше, мы можем считать, что напряжение конденсатора и ток в цепи складываются из вынужденного напряжения u_C' и вынужденного тока i' , устанавливающихся под действием напряжения источника и свободных напряжения и тока (u_C'' и i''), вызванных реакцией емкости в течение переходного процесса, т. е. что

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u_C' + u_C''; \\ i' &= i' + i''. \end{aligned} \right\} \quad (13, 15)$$

Определив порознь свободные и вынужденные составляющие и сложив их, находим закон изменения во времени напряжения на конденсаторе и тока в цепи.

Вынужденное напряжение конденсатора должно быть равно напряжению источника тока

$$u' = U. \quad (13, 16)$$

В рассматриваемом случае мы считаем сопротивление изоляции между обкладками конденсатора бесконечно большим и потому полагаем при установившемся режиме $i' = 0$.

Уравнение для свободного напряжения конденсатора будет

$$0 = RC \frac{du_C''}{dt} + u_C'', \quad (13, 17)$$

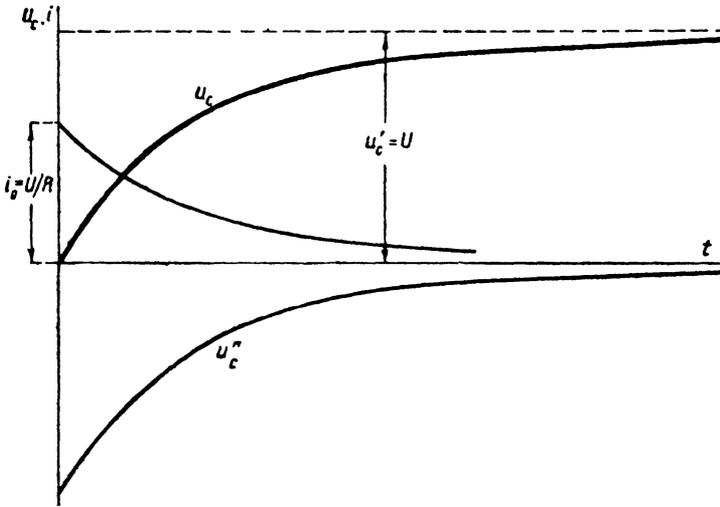
так как внешнее напряжение в этом случае полагается равным нулю. Решая уравнение (13, 17) так же, как мы решали уравнение разряда конденсатора, получаем

$$u_C'' = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Таким образом напряжение конденсатора может быть выражено следующим образом:

$$u_C = u_C' + u_C'' = U + Ke^{-\frac{t}{RC}}. \quad (13, 18)$$

Чтобы определить постоянную K , обратимся опять к начальным условиям. При зарядке конденсатора в начальный момент ($t=0$) напряжение



Фиг. 13, 5.

конденсатора должно оставаться таким же, каким оно было к моменту включения источника (так как напряжение на конденсаторе не может изменяться скачком). Если до включения источника конденсатор не был заряжен, то и в начальный момент напряжение конденсатора остается равным нулю ($u_{C0} = 0$).

Таким образом

$$u_{C0} = 0 = U + Ke^{-\frac{0}{RC}} = U + K,$$

на основании чего

$$K = -U,$$

и следовательно,

$$u_C = U - Ue^{-\frac{t}{RC}} = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (13, 19)$$

где

$$\tau = R \cdot C.$$

Как видим из последнего уравнения, напряжение конденсатора представляет собой разность постоянного напряжения источника тока (вынужденного напряжения) и свободного напряжения, убывающего во времени по показательной (экспоненциальной) функции.

Чтобы найти закон изменения во времени зарядного тока, нам нет надобности рассматривать порознь вынужденный и свободный токи, так

как в исследуемой цепи вынужденный ток равен нулю (постоянный ток через емкость не проходит).

Из уравнений (13,14) и (13,19) получаем

$$U = iR + u_c = iR + U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

на основании чего

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (13,20)$$

Следовательно, зарядный ток в момент $t=0$ будет

$$i_0 = \frac{U}{R}.$$

Этот ток постепенно ослабевает, изменяясь по закону показательной функции (фиг. 13,5).

Пример 13,2. Двухжильный кабель длиной 10 км обладает сопротивлением каждой из жил $R_0 = 0,5 \text{ } \Omega/\text{км}$ и емкостью $C_0 = 1 \text{ } \mu\text{F}/\text{км}$; этот кабель включается на постоянное напряжение $U = 1000 \text{ V}$.

Чтобы рассматривать этот кабель как цепь с сосредоточенными постоянными, заменим его Т-образной схемой замещения.¹ Тогда спустя промежуток времени $t_1 = \tau = 2R_0 \frac{l}{2} C_0 = 0,5 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 50 \cdot 10^{-6}$ сек. после включения кабель зарядится до напряжения

$$u_c = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 1000(1 - 0,368) = 632 \text{ V}, \text{ а спустя время}$$

$$t_3 = 3\tau = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

до напряжения

$$u_c = U(1 - 0,05) = 950 \text{ V}.$$

Заметим, что в начальный момент, при $t=0$, зарядный ток кабеля будет

$$i_0 = \frac{U}{R} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ A},$$

таким образом включение напряжения на емкость вызывает кратковременный, но сильный толчок тока.

13,7. Включение конденсатора на переменное напряжение

Источник переменного тока, к которому присоединяется конденсатор, дает переменное напряжение (фиг. 13,6)

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha),$$

где α — фазовый угол переменного напряжения в момент включения (в момент начала счета времени). Во время переходного процесса ток и напряжение в рассматриваемой цепи складываются из вынужденного и свободного токов и соответственно напряжений:

$$i = i' + i'' \quad \text{и} \quad u_c = u_c' + u_c''.$$

Процесс заряда кабеля с учетом того, что в нем сопротивление и емкость или индуктивность и емкость равномерно распределены и действительно происходящий при этом толчок тока будут рассмотрены в гл. 14.

Вынужденный ток определяется по закону Ома для цепи переменного тока

$$i' = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \alpha + \varphi), \quad (13, 21)$$

где $\varphi = \arctg \frac{1}{\omega CR}$.

Вынужденное напряжение конденсатора зависит от вынужденного тока и по фазе отстает от этого тока на четверть периода:

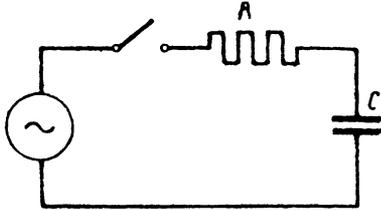
$$\begin{aligned} u_c' &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= U_m \sin \varphi \sin\left(\omega t + \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

так как

$$\frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \sin \varphi.$$

Что касается свободного напряжения на конденсаторе, оно определяется из уравнения

$$0 = Ri'' + u_c'' = RC \frac{du_c}{dt} + u_c'', \quad (13, 22)$$



Фиг. 13, 6.

ничем не отличающегося от уравнения (13, 17). Интегрируя это уравнение, как было показано выше, находим

$$u_c'' = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Постоянная K определяется на основании того, что в момент включения $t=0$ напряжение на конденсаторе равно нулю:

$$u_{c0} = u_{c0}' + u_{c0}'' = U_m \sin \varphi \sin\left(\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + K = 0, \quad (13, 23)$$

откуда

$$K = -U_m \sin \varphi \sin\left(\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (13, 24)$$

Следовательно, свободное напряжение конденсатора

$$u_c'' = -U_m \sin \varphi \sin\left(\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (13, 25)$$

здесь $\tau = RC$ — уже известная нам постоянная времени цепи. Таким образом напряжение конденсатора в течение переходного процесса будет

$$\begin{aligned} u_c &= u_c' + u_c'' = U_m \sin \varphi \sin\left(\omega t + \alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \\ &- U_m \sin \varphi \sin\left(\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (13, 26)$$

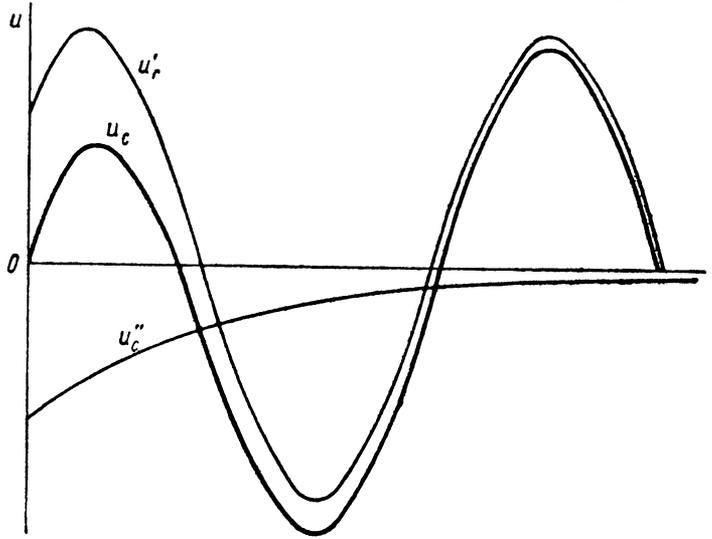
Как видим, напряжение конденсатора представляет собой разность синусоидального вынужденного напряжения и свободного напряжения, постоянного по знаку, но изменяющегося по закону показательной функции; на фиг. 13,7 показаны кривые напряжения конденсатора.

Начальное значение свободного напряжения конденсатора зависит от момента включения цепи на напряжение, свободное напряжение будет иметь наибольшее значение при $\alpha = -\varphi$, так как в этом случае

$$u_{C0}'' = U_m \sin \varphi.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ свободное напряжение будет равно нулю, и следовательно, вынужденный режим сразу установится в цепи.

Отметим следующую характерную особенность рассматриваемого процесса: в начальный момент напряжение конденсатора равно нулю, вынужденное и свободное напряжения противоположны по направлению и полностью уравновешивают одно другое, но во время второй половины периода синусоидального напряжения свободное и вынужденное напряжения уже совпадают по направлению и складываются, следовательно, при медленном затухании свободного напряжения, и при $\alpha = -\varphi$ напряжение конденсатора может во время переходного процесса достигнуть величины почти двойной амплитуды вынужденного напряжения.



Фиг. 13, 17.

Найдем теперь закон изменения тока в течение переходного процесса. Свободный ток соответствует свободному напряжению, следовательно,

$$i'' = C \frac{du_C''}{dt} = \frac{U_m}{R} \sin \varphi \sin \left(\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (13, 27)$$

Вынужденный ток мы уже определили выше и теперь можем написать выражение для действительного тока цепи в течение переходного процесса

$$i = i' + i'' = \frac{U_m}{z} \sin (\omega t + \alpha + \varphi) - \frac{U_m}{R} \sin \varphi \sin \left(\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где

$$z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \quad (13, 28)$$

Как показывает уравнение (13, 28), переходный ток в рассматриваемой цепи складывается из синусоидального вынужденного тока и постоянного по направлению, изменяющегося по закону показательной функции, свободного тока.

Как видно из уравнения (13, 28), в начальный момент ток

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{U_m}{R} \left[\frac{R}{z} \sin(\alpha + \varphi) - \sin \varphi \cos(\alpha + \varphi) \right] = \\ &= \frac{U_m}{R} [\cos \varphi \sin(\alpha + \varphi) - \sin \varphi \cos(\alpha + \varphi)] = \\ &= \frac{U_m}{R} \sin \alpha; \end{aligned}$$

следовательно, в момент включения цепи на переменное напряжение ток равен мгновенному значению переменного напряжения на зажимах цепи, деленному на активное сопротивление этой цепи, так же как это имело место при включении конденсатора на постоянное напряжение; в обоих случаях в момент включения зарядный ток имеет такую величину, как будто емкость замкнута накоротко. Это объясняется тем, что в начальный момент напряжение на зажимах конденсатора равно нулю.

Пример 13, 3. Зарядный ток в начальный момент при включении разомкнутой на конце кабельной линии, обладающей емкостью в $0,1 \mu\text{F}$ и сопротивлением каждой жилы в $0,1 \Omega$ ¹ на напряжение $U = 10\,000 \text{ V}$ при $\alpha = 90^\circ$, достигает величины

$$i_0 = \frac{10\,000 \cdot \sqrt{2} \sin 90^\circ}{0,1} = 141\,000 \text{ A.}$$

Амплитудное значение установившегося (вынужденного) переменного тока в этой линии будет только

$$I_m = 0,443 \text{ A,}$$

т. е. начальный ток в 320 000 раз больше амплитуды установившегося тока.

Толчок зарядного тока потребует от источника тока в начальный момент мощность

$$P_0 = i_0^2 R = 2\,000\,000 \text{ kW.}$$

В практических условиях толчок тока в значительной мере ослабляется благодаря реакции индуктивности линии. Но все же подобный толчок зарядного тока при включении линии, обладающей значительной емкостью, следует принимать во внимание.

В заключение отметим, что в нашем примере переходный процесс закончится очень быстро, так как постоянная времени в данном случае равна

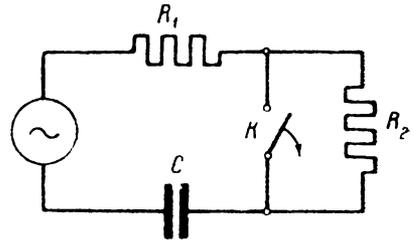
$$\tau = R \cdot C = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} = 10^{-8} \text{ сек.}$$

13, 8. Изменение сопротивления в цепи, содержащей R и C

Изменение сопротивления в цепи переменного тока, содержащей емкость и сопротивление, также сопровождается переходным процессом. В качестве примера рассмотрим переходный процесс при увеличении сопротивления в цепи (фиг. 13, 8). Указанная цепь, работающая при переменном напряжении на зажимах, первоначально содержит активное сопротивление R_1 и емкость C , затем в эту цепь, в некоторый момент $t = 0$, вводится еще сопротивление R_2 . Благодаря увеличению сопротивления ток в цепи уменьшается, вследствие чего должно снизиться и напряжение конденсатора. Но в момент размыкания ключа, вводящего в цепь сопротивление R_2 , конденсатор обладает некоторой энергией, соответствующей мгновенному напряжению конденсатора. Количество этой энергии не может измениться мгновенно на конечную величину, вследствие чего не может

¹ См. примечание к примеру 13, 2.

мгновенно измениться и напряжение конденсатора и принять значение, соответствующее новым условиям цепи. Если мгновенное напряжение конденсатора в момент размыкания ключа больше нового значения вынужденного напряжения, то конденсатор будет разряжаться через сопротивления $R_1 + R_2$. Таким образом в рассматриваемой цепи во время переходного процесса на синусоидальный переменный ток наложится ток разряда конденсатора.



Фиг. 13, 8.

Обратимся теперь к математической формулировке законов изменения во времени переходного тока и напряжения конденсатора. В момент включения сопротивления R_2 переменное напряжение на зажимах цепи

$$u_0 = U_m \sin \alpha,$$

а ток в цепи в этот момент

$$i_0 = \frac{U_m}{\sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\alpha + \varphi_1),$$

где

$$\varphi_1 = \arctg \frac{1}{\omega C \cdot R_1}.$$

Напряжение конденсатора отстает по фазе от тока на четверть периода. В начальный момент $t = 0$ оно будет

$$u_{C0} = \frac{U_m}{z_1} \frac{1}{\omega C} \sin\left(\alpha + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin \varphi_1 \sin\left(\alpha + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

После включения R_2 , по окончании переходного процесса, в цепи установится переменный вынужденный ток

$$i' = \frac{U_m}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \alpha + \varphi_2) = \frac{U_m}{z_2} \sin(\omega t + \alpha + \varphi_2),$$

где

$$\varphi_2 = \arctg \frac{1}{\omega C (R_1 + R_2)}.$$

Устанавливающееся по окончании переходного процесса напряжение конденсатора будет

$$u_{C'} = \frac{U_m}{z_2} \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \alpha + \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin \varphi_2 \sin\left(\omega t + \alpha + \varphi_2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

В течение переходного процесса напряжение конденсатора u_C может быть представлено как сумма вынужденного и свободного напряжений.

$$u_C = u_{C'} + u_{C''}.$$

Вынужденное напряжение $u_{C'}$ нам известно. Для определения свободного напряжения $u_{C''}$, как и в предыдущих случаях, мы воспользуемся вторым из тех двух дифференциальных уравнений, на которые распадается дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи:

$$RC \frac{du_{C'}}{dt} + u_{C'} = u;$$

$$RC \cdot \frac{du_{C''}}{dt} + u_{C''} = 0.$$

В рассматриваемом случае

$$R = R_1 + R_2.$$

Интегрируя уравнение свободного напряжения, мы находим

$$u_C'' = Ke^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

Чтобы определить постоянную K , мы воспользуемся тем, что в момент включения R_2 , когда

$$u_{C0} = u_{C0}' + u_{C0}'' = U_m \sin \varphi_2 \sin \left(\alpha + \varphi_2 - \frac{\pi}{2} \right) + K,$$

напряжение конденсатора должно быть равным

$$u_{C0} = U_m \sin \varphi_1 \sin \left(\alpha + \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right),$$

на основании чего постоянная

$$\begin{aligned} K &= U_m \left[\sin \varphi_1 \sin \left(\alpha + \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \varphi_2 \sin \left(\alpha + \varphi_2 - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= U_m [\sin \varphi_2 \cos (\alpha + \varphi_2) - \sin \varphi_1 \cos (\alpha + \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Следовательно, закон изменения напряжения конденсатора может быть выражен уравнением

$$\begin{aligned} u_C &= U_m \sin \varphi_2 \sin \left(\omega t + \alpha + \varphi_2 - \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ U_m [\sin \varphi_2 \cos (\alpha + \varphi_2) - \sin \varphi_1 \cos (\alpha + \varphi_1)] e^{-\frac{t}{\tau}}, \end{aligned}$$

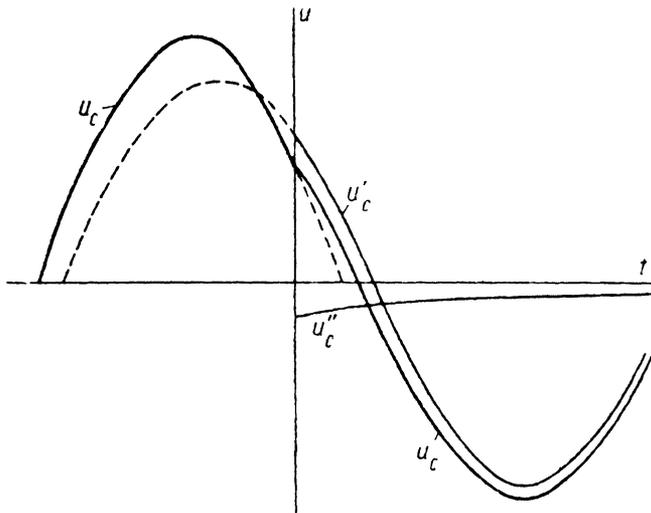
или, так как в рассматриваемой цепи

$$U_m \sin \varphi = \frac{U_m}{z} \frac{1}{\omega C} = I_m \frac{1}{\omega C} = U_{mC},$$

то в другой форме напряжение конденсатора

$$\begin{aligned} u_C &= U_{m2C} \sin \left(\omega t + \alpha + \varphi_2 - \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ [U_{m1C} \cos (\alpha + \varphi_2) - U_{m2C} \cos (\alpha + \varphi_1)] e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (13, 29)$$

Из последнего уравнения мы видим, что во время переходного процесса напряжение конденсатора складывается из вынужденного синусоидаль-



Фиг. 13, 9.

ного напряжения и несинусоидального свободного напряжения, убывающего по закону показательной функции (фиг. 13, 9); начальное значение

свободного напряжения равно, как показывает последнее уравнение, разности между мгновенным значением напряжения конденсатора в момент перед увеличением сопротивления и мгновенным значением вынужденного напряжения конденсатора в начальный момент после увеличения сопротивления.

Ток в рассматриваемой цепи складывается из вынужденного тока

$$i' = \frac{U_m}{z_2} \sin(\omega t + \alpha + \varphi_2)$$

и из свободного тока

$$i'' = C \frac{du_C''}{dt} = -\frac{C}{RC} U_m [\sin \varphi_2 \cos(\alpha + \varphi_2) - \sin \varphi_1 \cos(\alpha + \varphi_1)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

или

$$i'' = \frac{U_m}{R} [\sin \varphi_2 \cos(\alpha + \varphi_2) - \sin \varphi_1 \cos(\alpha + \varphi_1)] e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Следовательно,

$$i = i' + i'' = \frac{U_m}{z_2} \sin(\omega t + \alpha + \varphi_2) + \frac{U_m}{R} [\sin \varphi_1 \cos(\alpha + \varphi_1) - \sin \varphi_2 \cos(\alpha + \varphi_2)] e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (13, 30)$$

Как видим, в рассматриваемой цепи при переходном процессе на вынужденный переменный ток налагается свободный, постоянный по направлению ток, затухающий по показательной кривой.

13,9. Замыкание коротко цепи, содержащей индуктивность и сопротивление

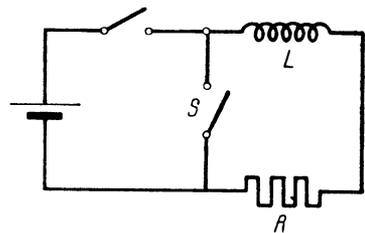
Рассмотрев основные виды переходных процессов в цепях с емкостью, мы обратимся теперь к переходным процессам в цепях, содержащих индуктивность.

Изучение переходных процессов в цепях, содержащих L и R , мы начнем также с простейшего случая — с процесса затухания тока в названной цепи при замыкании ее коротко¹, как показано на фиг. 13, 10.

В цепи фиг. 13, 10 источник с постоянным напряжением U поддерживал ток

$$I = U : R,$$

образующий магнитное поле в индуктивности L . Затем посредством ключа S цепь замыкается коротко, и источник тока выключается. Хотя таким образом прекращено действие внешнего напряжения, однако благодаря наличию магнитного поля ток в цепи исчезает не сразу; э. д. с. самоиндукции стремится поддержать ток за счет энергии исчезающего магнитного поля. По мере того, как исчерпывается энергия магнитного поля, ток в цепи постепенно ослабевает. Итак, в рассматриваемой цепи при замыкании ее коротко имеет место свободный процесс исчезновения магнитного поля и затухания тока; закон изменения этого тока во



Фиг. 13, 10.

¹ Мы рассматриваем явление исчезновения тока при замыкании цепи коротко, а не при выключении источника тока, так как выключение цепи, содержащей индуктивность, является очень сложным процессом, благодаря тому, что оно сопровождается образованием вольтовой дуги на ножах выключателя.

время переходного процесса мы можем определить на основании дифференциального уравнения исследуемой цепи:

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0; \quad (13, 31)$$

правая половина уравнения равна нулю, так как в данных условиях внешнее напряжение отсутствует. Мы имеем здесь только свободный процесс. Разделив переменные в рассматриваемом уравнении

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln K.$$

Здесь $\ln K$ обозначает постоянную интегрирования. Последнее уравнение преобразуем следующим образом:

$$\ln \frac{i}{K} = -\frac{R}{L} t,$$

и освобождаясь от логарифма, получаем

$$\frac{i}{K} = e^{-\frac{R}{L} t}$$

или

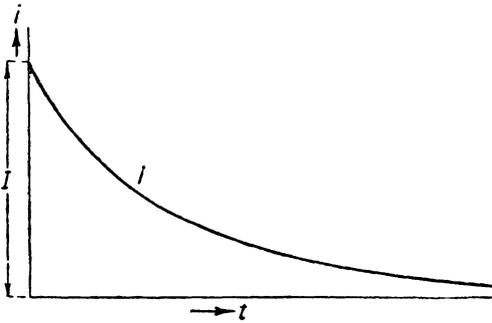
$$i = K e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Постоянную K мы можем определить, исходя из того, что в первый момент после замыкания накоротко ток в цепи должен сохранить свое начальное значение, так как при наличии индуктивности ток не может изменяться скачком. Поэтому при $t = 0$ ток

$$i_0 = K e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = K = I,$$

и следовательно,

$$i = I e^{-\frac{R}{L} t}.$$



Фиг. 13, 11.

Кривая исчезающего тока показана на фиг. 13, 11. Скорость исчезновения тока в рассматриваемой цепи определяется значением

величины $\frac{L}{R}$. Эта последняя в рассматриваемой цепи играет ту же роль, что и величина $R \cdot C$ в цепи с емкостью и сопротивлением, и носит также название постоянной времени. Ее размерность

$$\frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{H}}{\Omega} = \frac{\text{V} \cdot \text{sec}/\text{A}}{\text{V}/\text{A}} = \text{sec}. \quad (13, 32)$$

Пример 13, 4. Катушка, имеющая сопротивление $R = 0,5 \Omega$ и индуктивность $L = 0,1 \text{ H}$, замыкается накоротко в момент $t = 0$. В период, предшествующий короткому замыканию, к катушке было подведено переменное напряжение $u_{\sim} = 100 \sin(\omega t + \alpha)$, которое поддерживало в цепи катушки переменный ток

$$i_{\sim} = \frac{100}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi).$$

В рассматриваемой цепи угол сдвига фаз

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} = \arctg \left(\frac{31,4}{0,5} \right) \approx \frac{\pi}{2}.$$

Если катушка закорачивается в момент $\alpha = 0$, то начальное значение тока будет

$$I = \frac{100}{\sqrt{0,5^2 + 31,4^2}} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \approx -3,2 \text{ А},$$

и следовательно, закон затухания тока в катушке будет

$$i = -3,2 e^{-\frac{0,5}{0,1} t} = -3,2 e^{-5t}.$$

Постоянная времени рассматриваемой цепи

$$\tau = \frac{L}{R} = 0,2 \text{ сек.},$$

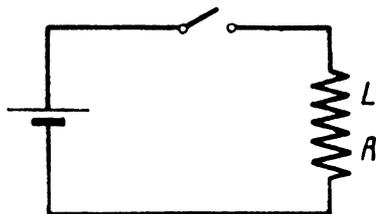
следовательно, спустя 0,2 сек. после замыкания накоротко ток в катушке упадет до $i = 3,2 \cdot 0,368 = 1,18 \text{ А}$, а спустя 0,6 сек. — до $i = 0,16 \text{ А}$. За время переходного процесса в сопротивлении рассматриваемой цепи превращается в тепло электрическая энергия

$$A = \int_{t=0}^{t=\infty} i^2 R dt = I^2 R \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-2 \frac{R}{L} t} dt = \frac{LI^2}{2},$$

т. е. вся энергия магнитного поля тока.

13,10. Включение на постоянное напряжение цепи, содержащей L и R

Исследуем теперь, как нарастает ток в цепи, содержащей индуктивность и сопротивление, при включении этой цепи на постоянное напряжение (фиг. 13,12). Ток в рассматриваемой цепи не может мгновенно достигнуть конечной величины — такому внезапному скачкообразному изменению энергии, мешает э. д. с. самоиндукции; благодаря ее противодействию ток увеличивается постепенно, асимптотически приближаясь к значению $I = U : R$. За время этого постепенного нарастания тока энергия источника тока затрачивается частично на покрытие джоулевых потерь, а частично — на образование магнитного поля тока.



Фиг. 13,12.

Для упрощения исследований мы можем рассматривать и этот переходный процесс как результат наложения вынужденного и свободного процессов, как мы это делали по отношению к цепям, содержащим R и C .

Дифференциальное уравнение для рассматриваемой цепи

$$iR + L \frac{di}{dt} = U \tag{13,33}$$

мы можем разделить на два уравнения: на уравнение для вынужденного процесса

$$i'R + L \frac{di'}{dt} = U$$

и уравнение для свободного процесса

$$i'' R + L \frac{di''}{dt} = 0,$$

причем фактически ток переходного процесса мы рассматриваем как сумму вынужденного и свободного токов

$$i = i' + i''.$$

Вынужденный ток — в данном случае постоянный, следовательно, в первом уравнении

$$L \frac{di'}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad i' = \frac{U}{R} = I.$$

Свободный ток определим, решая второе уравнение

$$i'' R + L \frac{di''}{dt} = 0,$$

так же, как мы это делали выше; получим

$$i'' = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (13, 34)$$

где $\tau = \frac{L}{R}$ — постоянная времени цепи.

Чтобы определить постоянную K , обращаемся к начальным условиям: в момент включения цепи на напряжение ($t=0$) ток в цепи

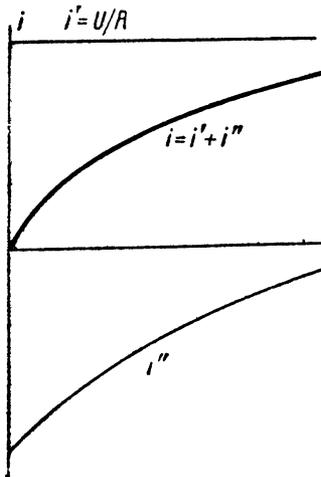
$$i_0 = 0 = i' + i'' = \frac{U}{R} + K; \quad (13, 35)$$

следовательно,

$$K = -\frac{U}{R},$$

на основании чего

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (13, 36)$$



Фиг. 13, 13.

Электродвижущая сила индуктивности в нашей цепи

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{U}{R} \frac{R}{L} L e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (13, 37)$$

$$e_L = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (13, 37)$$

Эта э. д. с. также изменяется по закону показательной функции. В начальный момент она равна по величине и противоположна по направлению напряжению источника тока.

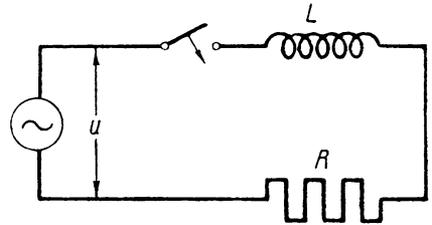
13,11. Включение на переменное напряжение цепи, содержащей L и R

При включении на переменное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ той же цепи, содержащей L и R (фиг. 13,14), мы будем иметь вновь вынужденный и свободный процессы, а следовательно, и два дифференциальных уравнения:

$$L \frac{di'}{dt} + i'R = u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

и

$$i''R + L \frac{di''}{dt} = 0.$$



Фиг. 13,14.

Вынужденный ток — это переменный синусоидальный ток, амплитуду которого мы определяем по закону Ома для цепи переменного тока. Этот ток отстает по фазе от напряжения на угол

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R},$$

следовательно,

$$i' = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi).$$

Из уравнения свободного процесса находим выражение для свободного тока

$$i'' = K e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Определяем постоянную K на основании начальных условий. При $t = 0$ ток в цепи

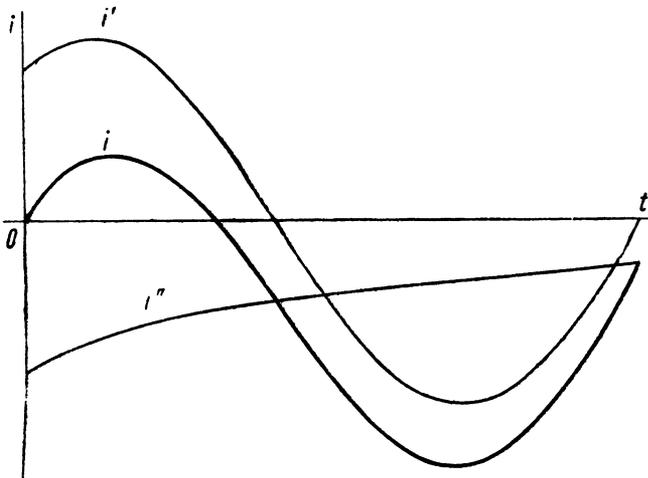
$$i_0 = 0 = i_0' + i_0'' = \frac{U_m}{z} \sin(\alpha - \varphi) + K,$$

следовательно,

$$K = -\frac{U_m}{z} \sin(\alpha - \varphi),$$

и наконец,

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \frac{U_m}{z} \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_m}{z} [\sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}]. \quad (13,38)$$



Фиг. 13,15.

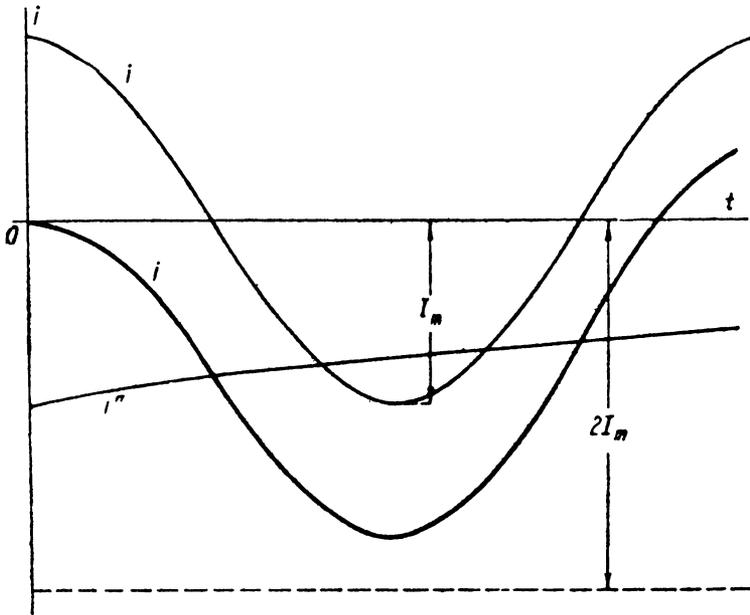
Как показывает последнее уравнение, ток переходного режима представляет собой разность синусоидального (вынужденного) тока и постоянного по направлению свободного тока, изменяющегося по закону показательной функции (фиг. 13,15). В начальный момент свободный ток равен и противоположен по направлению вынужденному току. Если в начальный момент вынужденный ток проходит через

нуль ($\alpha = \varphi$), то свободный ток не возникает, и в цепи сразу, без переходного процесса, устанавливается вынужденный режим.

Наибольшее возможное значение свободный ток будет иметь при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$. В этом случае

$$i_0'' = \frac{U_m}{z} = I_m,$$

причем этот свободный ток противоположен по направлению вынужденному току только до тех пор, пока переменный ток не переменяет направление, во второй части периода переменного тока вынужденный и сво-



Фиг. 13, 16

бодный токи направлены одинаково, и если свободный ток затухает медленно, результирующий ток в наиболее неблагоприятном случае может достигнуть величины, близкой к двойной амплитуде вынужденного (фиг. 13, 16).

13,12. Изменение сопротивления в цепи, содержащей R и L

Не только при включении, но и при всяком изменении вынужденного тока в цепи, содержащей L и R , имеет место переходный процесс; нетрудно найти уравнение тока переходного режима в общей форме для постоянного и переменного токов.

В цепи фиг. 13, 17 активное сопротивление может быть изменено посредством замыкания или размыкания рубильника.

Дифференциальное уравнение этой цепи, так же как и все уравнения переходных процессов, может быть разделено на уравнения вынужденного и свободного процессов. Вынужденный процесс—в данном случае это тот процесс, который устанавливается в цепи после изменения сопротивления, следовательно, его уравнение будет

$$i'R_x + L \frac{di'}{dt} = u,$$

причем $i' = i_k$ — вынужденному току в цепи, когда в ней осталось сопротивление R_k . Уравнение свободного процесса будет

$$i''R_k + L \frac{di''}{dt} = 0,$$

на основании чего свободный ток

$$i'' = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Чтобы определить K , обращаемся к начальным условиям. В начальный момент ($t=0$) ток в цепи равен еще току i_n , существовавшему до изменения сопротивления:

$$i_0 = i_{n0} = i'_0 + i''_0 = i_{k0} + K, \quad (13,39)$$

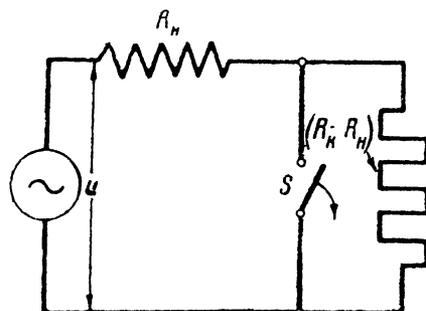
откуда

$$K = i_{n0} - i_{k0}. \quad (13,40)$$

Таким образом изменение тока переходного процесса будет выражаться уравнением

$$i = i_k - (i_{k0} - i_{n0}) e^{-\frac{t}{T}}. \quad (13,41)$$

Ток переходного процесса является разностью вынужденного и свободного тока, убывающего по закону показательной функции, при этом изменение тока происходит без резкого скачка. Если обозначить через R_n сопротивление цепи до размыкания или замыкания ключа S , а через R_k —



Фиг. 13, 17.

сопротивление цепи после размыкания (или замыкания) этого ключа, то в случае постоянного напряжения начальное значение тока

$$i_n = \frac{U}{R_n},$$

а конечное значение

$$i_k = \frac{U}{R_k}.$$

Следовательно, для случая постоянного напряжения уравнение (13,41) может быть переписано в следующей форме:

$$i = \frac{U}{R_k} - \left(\frac{U}{R_k} - \frac{u}{R_n} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (13,42)$$

На фиг. 13, 18 показана соответствующая кривая изменения тока.

Пример 13,5. В цепи постоянного тока с данными:

$$R_n = 10 \Omega; R_k = 5 \Omega; U = 100 \text{ V}; L = 0,5 \text{ H}$$

токи соответственно равны

$$i_n = 10 \text{ A}; i_k = i' = 20 \text{ A}; i'' = -10e^{-10t}; i = 20 - 10e^{-10t}.$$

Постоянная времени $\tau = 0,1$ сек.

Переходный процесс можно считать практически закончившимся при $i = 5\tau = 0,5$ сек когда

$$t = i_{\kappa} - (i_{\kappa} - i_{\mu}) 0,01 = 19,9 \text{ А.}$$

При переменном токе

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha);$$

$$i_{\mu} = \frac{U_m}{\sqrt{R_{\mu}^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi_{\mu}) = \frac{U_m}{z_{\mu}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi_{\mu});$$

$$i_{\kappa} = \frac{U_m}{\sqrt{R_{\kappa}^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi_{\kappa}) = \frac{U_m}{z_{\kappa}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi_{\kappa});$$

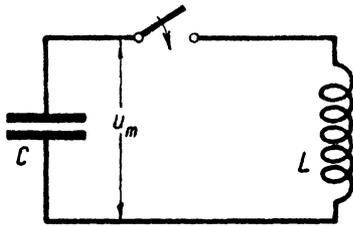
следовательно, ток переходного процесса

$$i = \frac{U_m}{z_{\kappa}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi_{\kappa}) - \left[\frac{U_m}{z_{\kappa}} \sin(\alpha - \varphi_{\kappa}) - \frac{U_m}{z_{\mu}} \sin(\alpha - \varphi_{\mu}) \right] e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (13, 43)$$

Во время переходного процесса ток в цепи складывается из синусоидального переменного тока и неизменного по направлению свободного тока, изменяющегося по закону показательной функции времени. Чем меньше разница между $i_{\mu 0}$ и $i_{\kappa 0}$, т. е. чем ближе мгновенные значения вынужденного тока до изменения сопротивления и вынужденного тока после изменения сопротивления, соответствующие моменту $t=0$, тем меньше начальное значение свободного тока.

13, 13. Колебательный контур без потерь

Обратимся теперь к переходным явлениям в простейших цепях, содержащих одновременно емкость и индуктивность. Наличие емкости и индуктивности делает электрическую цепь способной к собственным колебаниям (если не слишком велики происходящие в ней потери энергии) подобно тому, как способна к собственным колебаниям механическая система, обладающая упругостью и инерцией (если только в этой системе не слишком велики потери энергии, вызываемые трением).



Фиг. 13, 19.

Рассмотрим сначала колебательный процесс в воображаемой цепи без потерь (фиг. 13, 19), т. е. в цепи с $R=0$. Общую картину процесса в такой цепи мы можем представить себе следующим образом:

Емкость C была заряжена до напряжения U_m от внешнего источника (следовательно, емкости была сообщена энергия $\frac{CU_m^2}{2}$), затем эта емкость была замкнута на индуктивность L . Емкость начинает разряжаться, в цепи возникает ток и в индуктивности создается магнитное поле. При этом в энергии магнитного поля переходит энергия исчезающего электрического поля конденсатора. При разряде напряжение емкости должно преодолеть э. д. с. индуктивности, противодействующую увеличению тока. Когда к концу разряда емкости ее напряжение падает до нуля, то разрядный ток в цепи, казалось бы, прекращается, но по мере увеличения тока и ослабления электрического поля усиливалось магнитное поле, и в конце разряда вся энергия, бывшая в электрическом поле, оказывается сосредото-

точной в магнитном поле; напряжение емкости упало до нуля, но теперь индуктивность противодействует уменьшению тока, она уже за счет энергии магнитного поля поддерживает ток в том же направлении, что и при разряде емкости, таким образом в цепи поддерживается ток первоначального направления, который теперь уже становится током, заряжающим емкость в обратном направлении. Так как в рассматриваемой цепи потерь нет, то вся энергия системы переходит опять из магнитного поля в электрическое. К концу новой зарядки емкости (за счет энергии магнитного поля) конденсатор окажется заряженным до напряжения, равного по величине начальному, но обратного по знаку, обкладка, имевшая ранее положительный заряд, получает отрицательный заряд такой же величины. Затем емкость начинает вновь разряжаться, отдавая свою энергию магнитному полю тока и т. д.

Поскольку в рассматриваемой цепи нет потерь, этот колебательный процесс — непрерывные периодические изменения напряжения и тока по величине и направлению, сопровождающие перемещения энергии, — должен продолжаться, не затухая, неопределенно долго. Вследствие описанных здесь колебаний рассматриваемая цепь получила название колебательного контура.

Когда напряжение на конденсаторе уменьшается (по абсолютной величине), он играет роль генератора, напряжение которого уравновешивается э. д. с. индуктивности; напротив, при зарядке конденсатора играет роль генератора индуктивность.

Для того чтобы найти закон изменения тока и напряжения при разряде конденсатора на индуктивность, будем исходить из следующего:

1) напряжение на конденсаторе должно быть в любой момент равно напряжению на индуктивности

$$u_C = L \frac{di}{dt}; \quad (13, 44)$$

2) ток в цепи должен быть равен скорости убывания заряда конденсатора $q_C = CU_C$:

$$i = -C \frac{du_C}{dt}. \quad (13, 45)$$

Подставляя значение тока из второго уравнения в первое, получаем

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (13, 46)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$u_C = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (13, 47)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, а α_1 и α_2 — корни характеристического уравнения

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \frac{1}{LC} &= 0; \\ \alpha_1 &= \frac{j}{\sqrt{LC}}; \quad \alpha_2 = \frac{-j}{\sqrt{LC}}. \end{aligned} \right\} \quad (13, 48)$$

Из (13, 45) и (13, 47) находим выражение для тока

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -j \frac{C}{\sqrt{LC}} (A_1 e^{+j \frac{t}{\sqrt{LC}}} - A_2 e^{-j \frac{t}{\sqrt{LC}}}). \quad (13, 49)$$

Чтобы определить A_1 и A_2 , обращаемся к начальным условиям: в момент начала разряда конденсатора при $t = 0$

$$u_{C0} = U_m \quad \text{и} \quad i_0 = 0, \quad (13, 50)$$

так как ни напряжение, ни ток в этой цепи не могут изменяться скачком. Для $t=0$ по (13, 47)

$$u_{c0} = U_m = A_1 + A_2,$$

а по (13, 49)

$$i_0 = 0 = -j \frac{C}{\sqrt{LC}} (A_1 - A_2),$$

и следовательно,

$$A_1 = A_2;$$

таким образом

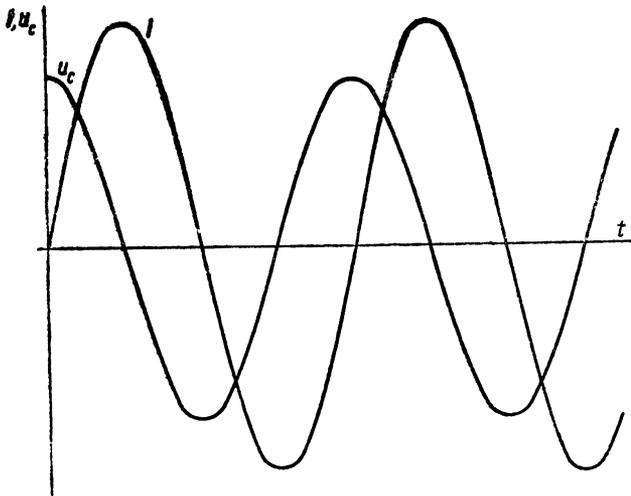
$$A_1 = A_2 = \frac{U_m}{2}. \quad (13, 51)$$

Подставляя значения постоянных в уравнения напряжения и тока, находим

$$u_c = \frac{U_m}{2} (e^{j \frac{t}{\sqrt{LC}}} + e^{-j \frac{t}{\sqrt{LC}}}) = U_m \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}; \quad (13, 52)^1$$

$$i = -j \frac{U_m}{2 \sqrt{\frac{L}{C}}} (e^{j \frac{t}{\sqrt{LC}}} - e^{-j \frac{t}{\sqrt{LC}}}) = \frac{U_m}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}. \quad (13, 53)^2$$

Как показывают уравнения (13, 52) и (13, 53), в колебательном контуре напряжение и ток изменяются по закону синуса, — в контуре действует переменное синусоидальное напряжение и проходит переменный синусоидальный ток, хотя источник переменного тока отсутствует; при этом между напряжением и током имеется сдвиг по фазе на четверть периода (фиг. 13, 20).



Фиг. 13, 20.

Нетрудно определить период тока в контуре на основании (13, 52) или (13, 53), в них величина $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ играет роль круговой частоты синусоидального переменного тока. По этой причине она носит название собственной, или свободной, угловой скорости контура.

Период свободных колебаний контура будет

$$T'' = 2\pi \sqrt{LC}, \quad (13, 54)$$

и свободная (собственная) частота контура будет

$$f'' = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad (13, 55)$$

¹ Так как

$$\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos \alpha.$$

² Так как

$$\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2} = j \sin \alpha \text{ и } \sin \alpha = -j \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2}.$$

Отношение между амплитудами тока и напряжения, как видно из (13,52) и (13,53),

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\frac{L}{C}}}; \quad (13,56)$$

следовательно, в колебательном контуре роль кажущегося сопротивления играет величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$, она носит название волнового сопротивления колебательного контура.

Колебательный контур имеет практическое применение в радиотехнике для получения переменного тока высокой частоты, в технике же сильных токов, при низкой частоте, явления свободных колебаний в большинстве случаев приходится рассматривать как нежелательное осложнение переходных процессов, иногда могущее служить причиной аварий.

13,14. Колебательный контур с потерями

Рассмотрим теперь процесс разряда конденсатора на индуктивность не в воображаемых условиях при $R=0$, а в условиях, соответствующих фактическим соотношениям в электрических цепях, где потери неизбежны, а следовательно, — наличие активное сопротивление R .

При наличии R энергия колебательного контура неизбежно должна уменьшаться с каждым колебанием благодаря превращению энергии электрического и магнитного полей в джоулево тепло. Поэтому мы вправе ожидать, что разряд конденсатора на L и R будет затухающим процессом, подобно тому как затухают благодаря трению колебания в механической системе, обладающей упругостью и инерцией.

Рассмотрим теперь уравнения разряда конденсатора в колебательном контуре с потерями фиг. 13,21. Конденсатор C , заряженный предварительно от некоторого внешнего источника тока до напряжения u_{c0} , разряжается затем на катушку, обладающую индуктивностью L и активным сопротивлением R .

Напряжение на конденсаторе u_C в любой момент равно сумме напряжений на индуктивности и активном сопротивлении:

$$u_C = L \frac{di}{dt} + iR. \quad (13,57)$$

Ток в цепи равен скорости убывания заряда конденсатора:

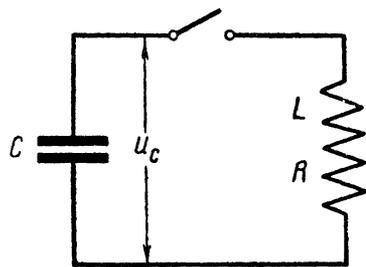
$$i = -C \frac{du_C}{dt}. \quad (13,58)$$

Исключая из этих двух уравнений i , получаем

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (13,59)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$u_C = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}, \quad (13,60)$$



Фиг. 13,21.

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, а γ_1 и γ_2 — корни характеристического уравнения

$$\gamma^2 + \frac{R}{L}\gamma + \frac{1}{LC} = 0, \quad (13, 61)$$

соответственно равные

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} + \\ &+ j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\frac{R}{2L} + j\omega''^1 \\ \gamma_2 &= -\frac{R}{2L} - j\omega''; \\ \omega'' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13, 62)$$

и

здесь

Подставляя найденные значения γ в (13, 60),

$$\begin{aligned} u_C &= A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} = A_1 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{j\omega''t} + \\ &+ A_2 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{-j\omega''t}. \end{aligned} \quad (13, 63)$$

Заменяя по формуле Эйлера

$$e^{\pm j\omega''t} = \cos(\omega''t) \pm j \sin(\omega''t),$$

получаем

$$u_C = e^{-\frac{R}{2L}t} [(A_1 + A_2) \cos \omega''t + i(A_1 - A_2) \sin \omega''t]. \quad (13, 64)$$

Обозначим

$$A_1 + A_2 = A_3 \quad \text{и} \quad i(A_1 - A_2) = A_4; \quad (13, 65)$$

тогда

$$u_C = e^{-\frac{R}{2L}t} (A_3 \cos \omega''t + A_4 \sin \omega''t). \quad (13, 66)$$

Производя сложение двух членов, стоящих в скобках и обозначая

$$K = \sqrt{A_3^2 + A_4^2} \quad \text{и} \quad \beta = \arctg \frac{A_4}{A_3} \quad (13, 67)$$

(фиг. 13, 22), получаем

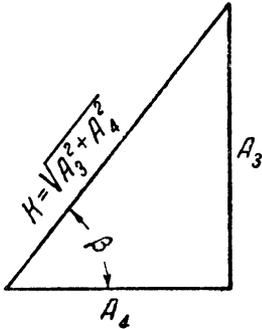
$$u_C = K e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega''t + \beta). \quad (13, 68)$$

Таким образом мы получили выражение затухающего во времени колебательного процесса с круговой частотой

$$\omega'' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

и с убывающей во времени амплитудой $e^{-\frac{R}{2L}t} K$; величина ω'' может быть названа свободной или собственной круговой частотой рассматриваемого

¹ Такое преобразование уравнения сделано потому, что предполагается, что $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$. Только при выполнении этого условия разряд конденсатора носит колебательный характер (см. ниже § 13, 17).



Фиг. 13, 22.

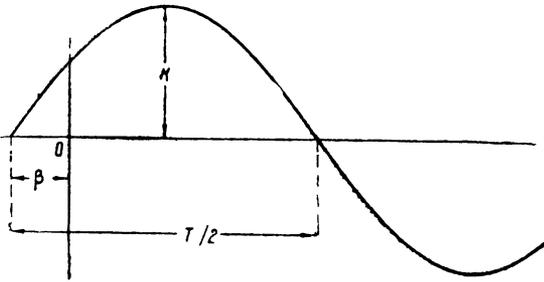
колебательного контура. Ясно, что период и частота данного колебательного процесса будут

$$T = \frac{2\pi}{\omega''} \quad \text{и} \quad f'' = \frac{\omega''}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (13, 69)$$

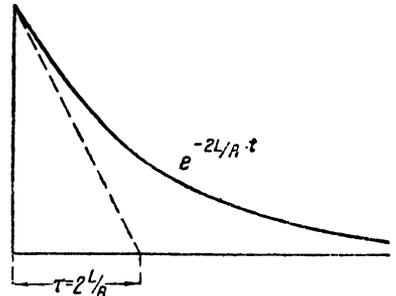
Множитель $e^{-\frac{R}{2L}t}$ знаком нам уже из исследований переходных процессов в цепях с R и L или R и C . Он указывает на то, что процесс в рассматриваемом контуре затухает со временем по закону показательной функции, причем скорость этого затухания определяется постоянной времени

$$\tau = 2\frac{L}{R}; \quad (13, 70)$$

она отличается от постоянной времени цепи, содержащей L и R , множителем 2. Величина τ имеет размерность времени.



Фиг. 13, 23.



Фиг. 13, 24.

Отметим, что при тех же L и R процесс в контуре с емкостью затухает в два раза медленнее, чем в контуре без емкости.

Кривая изменения u_C во времени в рассматриваемом случае может быть построена следующим образом: сначала построим отдельно синусоидальную кривую $K \sin(\omega''t + \beta)$ (фиг. 13, 23), затем показательную кривую $e^{-\frac{t}{\tau}}$ (фиг. 13, 24); перемножая ординаты этих двух кривых, соответствующие одним и тем же значениям t , мы получим в соответствующем масштабе кривую затухания напряжения конденсатора. Она будет представлять собой затухающую синусоиду — синусоидальную кривую, вписывающуюся между двумя кривыми показательной функции $\pm Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ (фиг. 13, 26).

Обратим теперь внимание на то, что в правой части формулы (13, 68) все сомножители кроме K — отвлеченные числа, следовательно, K должно иметь размерность напряжения, а так как K , кроме того, является амплитудой синусоидальной незатухающей кривой, то мы можем обозначить

$$K = U_{Cm}. \quad (13, 71)$$

При этом (13, 68) принимает следующую форму:

$$u_C = U_{Cm} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega''t + \beta). \quad (13, 72)$$

Ниже, исследовав процесс затухания тока, мы определим связь между U_{Cm} и начальным напряжением конденсатора u_{C0} , а равно найдем величину β , т. е. фазу синусоиды в начальный момент разряда конденсатора.

Перейдем теперь к исследованию закона изменения по времени тока в рассматриваемом колебательном контуре. С этой целью подставим в выражение для тока (13,58)

$$i = -C \frac{du_C}{dt},$$

значение u_C из уравнения (13,72). Дифференцируя, получим

$$i = U_{Cm} C e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\frac{1}{\tau} \sin(\omega''t + \beta) - \omega'' \cos(\omega''t + \beta) \right]. \quad (13,73)$$

Производя сложение членов, стоящих в прямых скобках, имея в виду, что

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + (\omega'')^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (13,74)$$

и обозначая

$$\varepsilon = \arctg(\omega''\tau) \quad (13,75)$$

(фиг. 13,25), получаем

$$i = U_{Cm} \frac{C}{\sqrt{LC}} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega''t + \beta - \varepsilon) = \frac{U_{Cm}}{Z_\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega''t + \beta - \varepsilon), \quad (13,76)$$

где

$$Z_\lambda = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (13,77)$$

Z_λ является сопротивлением колебательного контура.

В начальный момент разряда благодаря наличию в контуре индуктивности ток

$$i_0 = 0 = \frac{U_{Cm}}{Z_\lambda} \sin(\beta - \varepsilon), \quad (13,78)$$

а так как $U_{Cm} : Z_\lambda \neq 0$, то, следовательно,

$$\sin(\beta - \varepsilon) = 0 \text{ и } \beta = \varepsilon.$$

Но величина ε нами уже определена выше (13,75), следовательно,

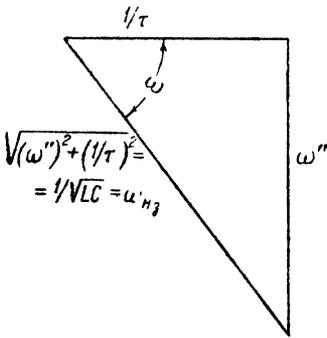
$$\beta = \varepsilon = \arctg(\omega''\tau) = \arctg\left(\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}\right). \quad (13,79)$$

Таким образом уравнение тока (13,76) получает окончательно следующий вид:

$$i = \frac{U_{Cm}}{Z_\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega''t. \quad (13,80)$$

Как видим, ток в рассматриваемом контуре изменяется по синусоидальной кривой, которая имеет ту же периодичность и также затухает по времени, как и напряжение конденсатора; но по фазе затухающая кривая тока отстает от напряжения конденсатора на β . Амплитудой синусоидальной незатухающей кривой служит величина

$$I_m = U_{Cm} : Z_\lambda; \quad (13,81)$$



Фиг. 13,25.

как видим, закон Ома для колебательного контура, содержащего активное сопротивление, имеет ту же форму, что и для колебательного контура без потерь, — здесь также роль кажущегося сопротивления играет сопротивление колебательного контура.

Теперь мы можем определить связь между U_{Cm} и начальным напряжением конденсатора u_{C0} (при $t=0$). Это начальное напряжение согласно (13,72) и (13,74) будет

$$u_{C0} = U_{Cm} \sin \beta = U_{Cm} \omega'' \sqrt{LC}, \quad (13,82)$$

так как $\sin \beta = \sin \varepsilon = \omega'' \sqrt{LC}$, как видно из (13,79) и фиг. 13,26. Найдем теперь закон изменения напряжения на индуктивности

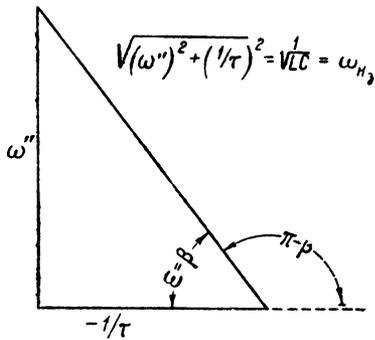
$$u_L = L \frac{di}{dt} = LI_m e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\omega'' \cos \omega'' t - \frac{1}{\tau} \sin \omega'' t \right). \quad (13,83)$$

Производя сложение членов, стоящих в скобках (фиг. 13,26), и имея в виду (13,74) и равенство между β и ε , получаем

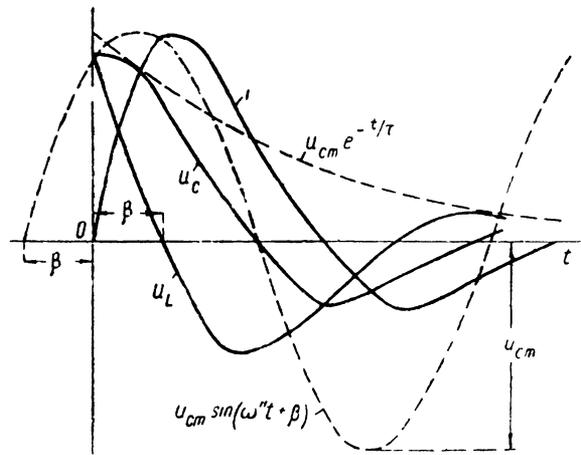
$$u_L = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega'' t + \pi - \beta). \quad (13,8)$$

Наконец, напряжение на активном сопротивлении будет

$$iR = I_m R e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega'' t. \quad (13,85)$$



Фиг. 13,26.



Фиг. 13,27.

Вспомним теперь, что $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ есть собственная круговая частота контура при отсутствии потерь — круговая частота при незатухающих колебаниях, обозначим ее

$$\omega_{нз} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (13,85)$$

Величину $\sqrt{\frac{L}{C}}$ мы можем определить через $\omega_{нз}$ двояко: с одной стороны,

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \omega_{нз} L,$$

с другой стороны,

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{1}{\omega_{нз} C}.$$

$$(13,86)$$

На основании этой подстановки мы можем придать уравнениям (13, 72), (13, 80) и (13, 84) следующую форму, сходную с выражениями для цепей переменного тока:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= U_{Cm} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega''t + \beta) = I_m \frac{1}{\omega_{нз} C} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega''t + \beta); \\ u_L &= I_m \omega_{нз} L e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega''t + \pi - \beta); \\ i &= U_{Cm} \omega_{нз} C e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega''t = \frac{U_{Lm}}{\omega_{нз} L} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega''t, \end{aligned} \right\} \quad (13, 87)$$

причем

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\omega''}{\omega_{нз}}\right)$$

и

$$U_{Lm} = U_{Cm} = u_{C0} \frac{\omega_{нз}}{\omega''}. \quad (13, 88)$$

Соответствующие кривые тока и напряжений в колебательном контуре показаны на фиг. 13, 27.

13, 15. Векторное изображение напряжений и тока в колебательном контуре

Вышеприведенные формулы показывают, что соотношения амплитудных значений в колебательном контуре напоминают соотношения в цепи установившегося переменного тока, но при этом роль круговой частоты играет угловая скорость затухающих колебаний контура $\omega_{нз}$, а не угловая скорость фактических затухающих колебаний ω'' .

С некоторыми оговорками мы можем применить к затухающим напряжениям и току колебательного контура векторное изображение, применявшееся нами для цепей переменного тока.

Как мы уже видели выше, в колебательном контуре

$$u_C = u_L + iR; \quad (13, 89)$$

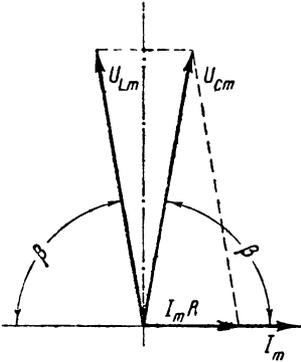
заменяв эти величины по (13, 87) и разделив полу-

ченное уравнение на $e^{-\frac{t}{\tau}}$, получим

$$U_{Cm} \sin(\omega''t + \beta) = I_m \omega_{нз} L \sin(\omega''t + \pi - \beta) + I_m R \sin \omega''t; \quad (13, 90)$$

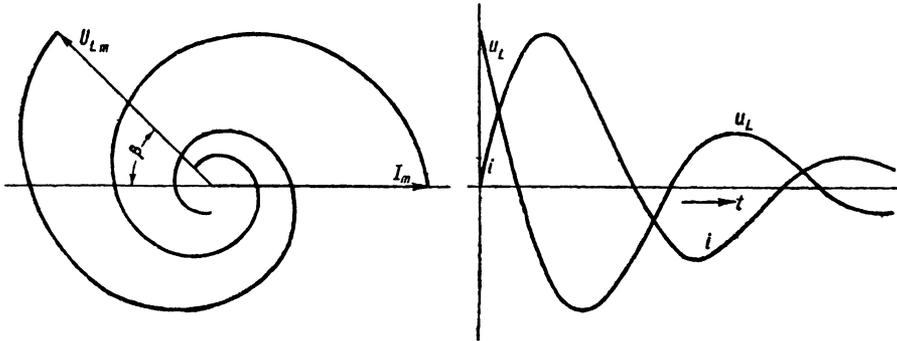
это выражение по форме напоминает нам выражение для мгновенных значений синусоидального переменного тока. Так же как для синусоидальных переменных величин, мы можем напряжения колебательного контура изобразить векторной диаграммой (фиг. 13, 28) и нанести в ней же по направлению I_m вектор $I_m R$. В построенной нами диаграмме вектор напряжения на индуктивности U_{Lm} опережает I_m на угол $(\pi - \beta)$, а вектор напряжения конденсатора U_{Cm} — на угол β . Векторы U_{Cm} , U_{Lm} и $I_m R$ образуют замкнутый треугольник напряжений¹.

¹ Следует иметь в виду, что при написании всех уравнений и при вычерчивании векторной диаграммы положительные направления токов и напряжений выбраны так, как если бы конденсатор был генератором.



Фиг. 13, 28.

Посмотрим теперь, каким образом мы можем на основе векторного изображения напряжений и тока колебательного контура определить графически мгновенные значения этих величин. Величины $U_{Cm}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $U_{Lm}e^{-\frac{t}{\tau}}$ и $I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$ изображаются в полярной системе координат логарифмическими



Фиг. 13. 29.

спиралями фиг. 13, 29. Для построения соответствующих мгновенных значений мы должны вращать вокруг начала координат соответствующие векторы, так чтобы их концы лежали на спиральной кривой. Проекция соответствующего вектора на вертикальную ось будет изображать в масштабе построения соответствующее мгновенное значение.

13, 16. Декремент затухания

Благодаря активному сопротивлению в колебательном контуре при каждом переходе энергии из электрического поля в магнитное или обратно часть энергии уходит из контура в виде потерь на джоулево тепло. В результате, как мы видели, колебания затухают. Выясним теперь, во-первых, какой величиной характеризуется это затухание, и, во-вторых, определим то критическое значение активного сопротивления, при котором колебательный характер разряда становится невозможным.

Затухание всякого рода периодических колебаний в физике принято характеризовать отношением двух соседних амплитуд колебания, т. е. амплитуд, отстоящих по времени друг от друга на один период колебания T . Указанное отношение носит название декремента затухания колебаний (от латинского слова *decrescere* — затухать).

Декремент процесса в колебательном контуре есть величина постоянная, одинаковая для напряжений и для тока, этот декремент может быть определен, например, как отношение значения тока в контуре в момент t к значению того же тока спустя время одного периода колебания T .

Из уравнений тока и напряжения в колебательном контуре ясно, что декремент представляет собой отношение не только амплитуд тока или напряжения, но и отношение двух любых промежуточных значений, разделенных промежутком времени, равным одному периоду колебания.

Следовательно, декремент

$$\Delta = \frac{i_t}{i_{(t+T)}} = \frac{I_m \sin(\omega''t) e^{-\frac{t}{\tau}}}{I_m \sin[\omega''(t+T)] e^{-\frac{t+T}{\tau}}},$$

или

$$\Delta = e^{-\frac{T}{\tau}}. \quad (13, 91)$$

Логарифм декремента носит название логарифмического декремента затухания:

$$\delta = \ln(e^{-\frac{T}{\tau}}) = -\frac{T}{\tau}, \quad (13, 92)$$

т. е. логарифмический декремент равен отношению периода собственного затухающего колебания контура к постоянной времени затухания, а так как

$$T = \frac{2\pi}{\omega''} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{2L}{R},$$

то логарифмический декремент может быть выражен через параметры контура следующим образом:

$$\delta = \frac{\pi R}{\omega'' L} = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}. \quad (13, 93)$$

Обратим теперь внимание на то, что увеличение активного сопротивления в колебательном контуре вызывает ускорение затухания колебаний и на некотором пределе делает колебательный процесс невозможным, подобно тому как увеличение трения сверх известного предела делает невозможным колебания в механической системе, обладающей инерцией и упругостью. Легко найти предельное значение сопротивления R , при достижении которого разряд конденсатора теряет колебательную форму. Угловая скорость колебаний в контуре с потерями [см. (13, 62)]

$$\omega'' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_{нз}^2 - \frac{1}{\tau^2}};$$

по мере роста R подкоренное выражение уменьшается, и когда

$$\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}, \quad \text{или} \quad R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2Z_{\lambda},$$

т. е. когда

$$\frac{1}{\tau} \geq \omega_{нз},$$

(13, 94)

тогда угловая скорость колебаний в контуре с потерями превращается в мнимое число или нуль, т. е. колебания прекращаются.

13,17. Аперриодический разряд конденсатора

Как мы уже отмечали выше, при $R \geq 2Z_{\lambda}$ контур теряет способность к собственным колебаниям, — колебательный процесс заменяется аперриодическим разрядом конденсатора. Пользуясь основным дифференциальным уравнением цепи

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0, \quad (13, 95)$$

исследуем законы этого аперриодического разряда. Полное решение этого уравнения

$$u_C = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t},$$

где $\gamma_{1,2}$ определяется на основании характеристического уравнения

$$\gamma_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Выше мы рассмотрели случай, когда

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

и корень, составляющий часть γ , является мнимым числом, изображаемым в виде $\pm j\omega''$, само γ в этом случае — комплексное число, действительная часть которого определяет скорость затухания колебаний в контуре, а мнимая часть — угловую скорость этих затухающих колебаний.

Но при

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

γ становится действительным числом, и u_C не может уже быть представлено как синусоидальная затухающая функция времени. Напряжение конденсатора при действительном значении γ будет выражаться следующим уравнением:

$$u_C = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}. \quad (13, 96)$$

Следовательно, u_C представляет собой сумму двух аperiодически убывающих напряжений, причем постоянная времени первого слагаемого больше $\frac{2L}{R}$, а постоянная времени второго слагаемого меньше $\frac{2L}{R}$, следовательно, первая составляющая u_C затухает медленнее, чем вторая ¹.

В предельном случае, при

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -\frac{R}{2L}, \quad (13, 97)$$

разряд получается также аperiодическим. Однако решение уравнения (13, 95) при этом получает вид, отличный от (13, 96), а именно, в этом случае

$$u_C = A_1 e^{\gamma t} + A_2 t e^{\gamma t} = A_1 e^{-\frac{R}{2L} t} + A_2 t e^{-\frac{R}{2L} t}. \quad (13, 98)$$

Для того чтобы определить постоянные A_1 и A_2 , обратимся к начальным условиям. При $t=0$ напряжение конденсатора $u_{C0} = U$, а ток $i_0 = 0$; подставляя эти значения в уравнение напряжения конденсатора (13, 96) и в уравнение тока, получаем ².

$$U = A_1 + A_2;$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = C(\gamma_1 A_1 e^{\gamma_1 t} + \gamma_2 A_2 e^{\gamma_2 t});$$

$$i_0 = 0 = -C(\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= U \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 - (2Z_L)^2}} \right) \\ A_2 &= U - A_1 = U \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{U}{2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 - (2Z_L)^2}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (13, 99)$$

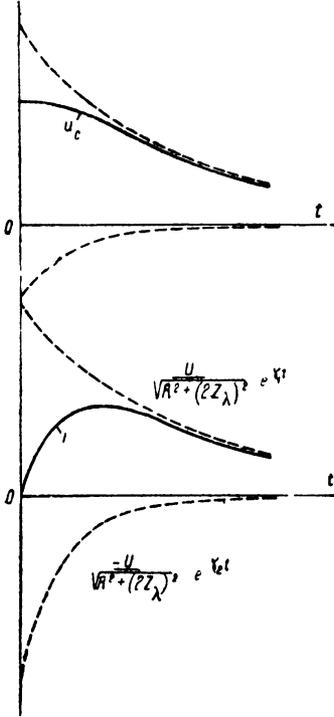
и

¹ Следует обратить внимание на то, что и γ_1 и γ_2 отрицательны.

² Методом, аналогичным излагаемому ниже, можно определить постоянные A_1 и A_2 и для уравнения (13, 98). Их значения будут $A_1 = U$; $A_2 = \gamma_1 A_1$.

на основании чего получаем сначала уравнение напряжения конденсатора

$$u_c = \frac{U}{2} \left[\left(1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 - (2Z_\lambda)^2}} \right) e^{\gamma_1 t} + \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 - (2Z_\lambda)^2}} \right) e^{\gamma_2 t} \right], \quad (13, 100)$$



Фиг. 13, 30.

а затем и уравнение разрядного тока

$$\begin{aligned} i &= UC \frac{\gamma_2 \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}) = \\ &= \frac{U}{\sqrt{R^2 - (2Z_\lambda)^2}} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}). \end{aligned} \quad (13, 101)$$

Как видим, разрядный ток представляет собой разность двух аperiodически затухающих токов, причем в начальный момент эти токи между собой равны. На фиг. 13, 30 показаны кривые напряжения и тока при аperiodическом разряде. Так как разрядный ток при $t=0$ и $t=\infty$ равен нулю, то, следовательно, в некоторый момент он должен проходить через максимальное значение.

Мы можем определить этот момент (t_m) и максимальную величину разрядного тока, приравняв нулю первую производную тока по времени:

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=t_m} = \frac{U}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} (\gamma_1 e^{\gamma_1 t_m} - \gamma_2 e^{\gamma_2 t_m}) = 0;$$

в этом выражении постоянный коэффициент перед скобками не равен нулю, следовательно,

$$\gamma_1 e^{\gamma_1 t_m} - \gamma_2 e^{\gamma_2 t_m} = 0,$$

или

$$e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t_m} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

и

$$t_m = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{L}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}. \quad (13, 102)$$

Теперь, для того чтобы определить максимальное значение тока, определим на основании уравнения (13, 102) разность показательных функций, входящую в уравнение (13, 101):

$$e^{\gamma_1 t_m} - e^{\gamma_2 t_m} = e^{\gamma_1 t_m} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} e^{\gamma_1 t_m} = \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2} \right) e^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1}};$$

а так как

$$e^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}},$$

то

$$e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}};$$

далее,

$$\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2 \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}};$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}{-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} = \frac{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}},$$

а

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}{2 \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} - 1 \right);$$

таким образом

$$e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t} = \frac{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} - 1 \right)$$

и максимальный разрядный ток будет выражен следующим образом:

$$i_{\max} = -\frac{2U}{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} - 1 \right) \quad (13, 103)$$

Пример 13, 6. Конденсатор емкостью $C = 2 \mu\text{F}$ заряжен до напряжения $U = 10\,000 \text{ V}$ и разряжается на цепь, обладающую индуктивностью $L = 0,125 \text{ мГн}$. Найти: 1) собственную частоту колебательного контура при $R = 0$ и при $R = 10 \Omega$.

2) Величину сопротивления, которым должен обладать контур, для того чтобы разряд протекал аperiодически.

3) Уравнения тока и напряжения на конденсаторе при сопротивлении $R = 20 \Omega$ и максимальное значение, которое при этом достигнет ток.

Решение:

1) Собственная частота колебательного контура при $R = 0$

$$f = \frac{\omega_{\text{св}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28 \sqrt{1,25 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} \frac{1}{\text{сек}} = 1,01 \cdot 10^4 \text{ Hz};$$

при $R = 10 \Omega$

$$f = \frac{\omega''}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{6,28} \sqrt{40 \cdot 10^8 - \frac{10^2}{6,25 \cdot 10^{-8}}} =$$

$$= \frac{1}{6,28} \sqrt{(40 - 16) \cdot 10^8} = 0,781 \cdot 10^4 \text{ Hz}.$$

2) Величина критического сопротивления в данном примере

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \sqrt{\frac{125 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}}} = 2 \cdot 7,9 \Omega = 15,8 \Omega.$$

3) При $R = 20 \Omega$ разряд будет аperiodическим, так как

$$R = 20 \Omega > 2Z_\lambda = 15,8 \Omega.$$

Вычисляем значение γ :

$$\gamma_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -80 \cdot 10^3 + 49 \cdot 10^3 = -31 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{sec}} = 31 \frac{1}{\text{msec}};$$

$$\gamma_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -80 \cdot 10^3 - 49 \cdot 10^3 = -129 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{sec}} = -129 \frac{1}{\text{msec}},$$

и отношение

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 - (2Z_\lambda)^2}} = \frac{20}{\sqrt{400 - 250}} = 16,3.$$

Тогда по (13, 100)

$$u_C = 3000 \left(17,3 e^{-31 \frac{t}{\text{msec}}} - 15,3 e^{-129 \frac{t}{\text{msec}}} \right) \text{V},^1$$

а по (13, 101)

$$i = 488 \left(e^{-31 \frac{t}{\text{msec}}} - e^{-129 \frac{t}{\text{msec}}} \right) \text{A}.$$

Максимальное значение, которого достигнет ток в момент [см. (13, 102)],

$$t = t_m = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{98} \ln \frac{129}{31} \text{ msec} = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ msec},$$

будет равно

$$i_{\max} = 488 (e^{-0,453} - e^{-1,88}) = 488 (0,636 - 0,153) = 220 \text{ A}.$$

Значение i_{\max} можно было бы найти и непосредственно по формуле (13, 103).

Отметим, что если бы индуктивность контура была практически равна нулю, максимальное значение тока (в самый момент включения) составляло бы

$$i_{\max} = \frac{n}{R} = \frac{6000 \text{ V}}{20 \Omega} = 300 \text{ A}.$$

13, 18. Включение колебательного контура на постоянное напряжение

Рассмотрим теперь процесс включения на постоянное напряжение цепи, содержащей C , L и R , соединенные последовательно.

Дифференциальное уравнение для напряжений цепи в данном случае будет

$$u_C + iR + L \frac{di}{dt} = U, \quad (13, 104)$$

или, подставляя

$$i = C \frac{du_C}{dt},^2$$

имеем

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = U. \quad (13, 105)$$

¹ При такой записи время t нужно подставлять в миллисекундах (msec).

² В отличие от предыдущих параграфов мы считаем теперь ток положительным, когда конденсатор заряжается, поэтому мы пишем

$$i = C \frac{du_C}{dt} \text{ вместо } i = -C \frac{du_C}{dt}.$$

Этот процесс мы можем рассматривать как состоящий из вынужденного и свободного процессов и считать, что

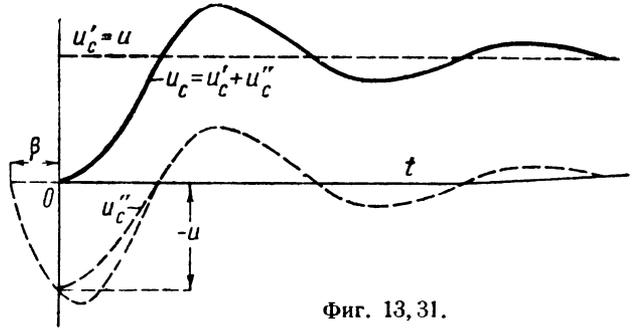
$$u_c = u_c' + u_c'';$$

$$i = i' + i''.$$

Вынужденное напряжение конденсатора равно напряжению постоянного тока, а вынужденный ток равен нулю (так как постоянный ток протекать через емкость не может):

$$u_c' = U; \quad i' = 0.$$

Дифференциальное уравнение для свободного напряжения конденсатора и решение этого уравнения в данном случае будут иметь тот же вид, что и для случая разряда конденсатора:



Фиг. 13, 31.

$$\left. \begin{aligned} u_c'' + RC \frac{du_c''}{dt} + LC \frac{d^2u_c''}{dt^2} &= 0; \\ u_c'' &= A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}; \\ \gamma_{1,2} &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \end{aligned} \right\} \quad (13, 106, \text{ и } 107)$$

В начальный момент напряжение конденсатора и ток в цепи равны нулю, следовательно,

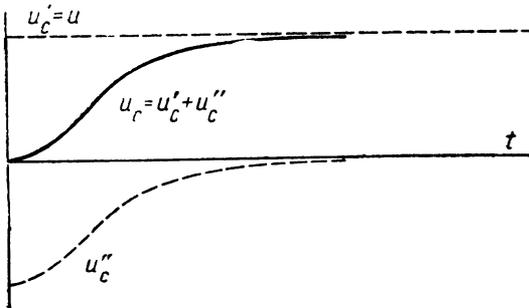
$$u_{c0} = 0 = u_{c0}' + u_{c0}'' = U + u_{c0}'';$$

$$i_0 = 0 = i_0' + i_0'' = 0 + i_0''$$

или

$$u_{c0}'' = -U; \quad i_0'' = 0. \quad (13, 108)$$

Как видим, для свободного процесса начальные условия при зарядке отличаются от начальных условий при разряде только тем, что при зарядке свободное напряжение конденсатора равно не положительному, как при разряде, а отрицательному значению напряжения источника тока; следовательно, значения свободных напряжения и тока будут отличаться от соответствующих значений при разряде только направлением. В случае, когда



Фиг. 13, 32.

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2},$$

процесс заряда будет колебательным, а при

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

этот процесс будет протекать аperiодически (фиг. 13, 31 и 13, 32).

В случае колебательной зарядки напряжение конденсатора и зарядный ток могут быть выражены следующим образом [ср. (13, 87) и (13, 88)]:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u_C' + u_C'' = U - \frac{U}{\omega'' \sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega'' t + \beta); \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = i'' = \frac{U}{\omega'' L} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega'' t; \end{aligned} \right\} \quad (13, 109)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \omega'' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}; \quad \tau = 2 \frac{L}{R}; \\ \beta &= \arcsin \frac{\omega''}{\omega_{нз}}, \quad \text{и} \quad \omega_{нз} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \end{aligned} \right\} \quad (13, 110)$$

В случае аperiodического процесса мы будем иметь [ср. (13,100) и (13, 101)]

$$\left. \begin{aligned} u_C &= U - \frac{U}{2} \left[\left(1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \right) e^{\gamma_1 t} + \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \right) e^{\gamma_2 t} \right]; \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{\sqrt{R^2 - (2Z_\lambda)^2}} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}), \end{aligned} \right\} \quad (13, 111)$$

где

$$Z_\lambda = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тождество выражений для свободного тока и напряжения конденсатора при разряде и зарядке вполне естественно, в первом случае мы имеем перемещение энергии благодаря исчезновению постоянного электрического поля, во втором же случае—перемещение такого же количества энергии в обратном направлении для создания того же постоянного электрического поля. Свободный процесс, вызванный противодействием системы этому перемещению, в обоих случаях по существу один и тот же, изменяется только его направление.

13, 19. Включение колебательного контура на переменное напряжение

Процесс включения последовательной цепи, содержащей C , L и R , на переменное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (13, 112)$$

мы будем рассматривать как наложение вынужденного и свободного процессов и, следовательно, будем считать, что напряжение конденсатора и ток в цепи являются алгебраической суммой вынужденных и свободных напряжений и токов:

$$\begin{aligned} u_C &= u_C' + u_C''; \\ i &= i' + i''. \end{aligned}$$

Вынужденный ток и вынужденное напряжение конденсатора определяются на основании закона Ома для стационарного режима цепи переменного тока:

$$\left. \begin{aligned} i' &= \frac{U_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi); \\ u_C' &= -\frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \alpha - \varphi) = -U_{Cm} \cos(\omega t + \alpha - \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (13, 113)$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

причем знак φ зависит от преобладания в цепи того или другого вида реактивного сопротивления.

Для свободного напряжения конденсатора мы будем иметь знакомое нам дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u_C''}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C''}{dt} + \frac{1}{LC} u_C'' = 0,$$

решение которого имеет известную форму

$$u_C'' = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}, \tag{13, 114}$$

где

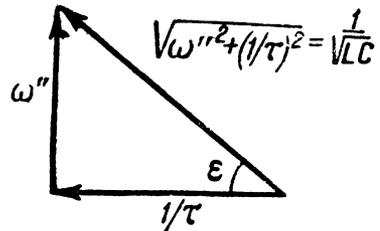
$$\gamma = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Рассмотрим более интересный для нас случай, когда γ — комплексное число, т. е. когда цепь способна к собственным колебаниям. Преобразуя уравнение (13, 114) совершенно так же, как это мы делали раньше [см. (13, 60) — (13, 68)], получаем

$$u_C'' = K e^{-\delta t} \sin(\omega'' t + \beta), \tag{13, 115}$$

где

$$\delta = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}; \quad \omega'' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$



Фиг. 13, 33.

а β и K пока еще неизвестные постоянные интегрирования.

Дифференцируя (13, 115), получаем

$$i'' = C \frac{du_C''}{dt} = CK e^{-\delta t} [\omega'' \cos(\omega'' t + \beta) - \delta \sin(\omega'' t + \beta)]. \tag{13, 116}$$

Производя сложение членов, стоящих в квадратных скобках (фиг. 13, 33), обозначая

$$\epsilon = \arctg \omega'' \tau \tag{13, 117}$$

и имея в виду, что

$$\sqrt{\omega''^2 + \delta^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{13, 118}$$

перепишем уравнение для тока в такой форме:

$$i'' = -\frac{K}{\sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-\delta t} \sin(\omega'' t + \beta - \epsilon). \tag{13, 119}$$

Для того чтобы определить постоянные K и β , обратимся к начальным условиям: при $t=0$ как напряжение на конденсаторе, так и ток должны равняться нулю, т. е.

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} i_0 = i'_0 + i''_0 = 0 \quad \text{и} \quad u_{C0} = u'_{C0} + u''_{C0} \\ i''_0 = -i'_0 \quad \text{и} \quad u''_{C0} = -u'_{C0}; \end{aligned} \right\} \quad (13, 120)$$

тогда по (13, 113), (13, 115) и (13, 116)

$$u''_{C0} = -u'_{C0} = K \sin \beta = U_{Cm} \cos(\alpha - \varphi); \quad (13, 121)$$

$$i_0'' = -i_0' = CK(\omega'' \cos \beta - \delta \sin \beta) = I_m \sin(\alpha - \varphi).$$

Подставляя во второе уравнение найденное значение $K \sin \beta$, получаем

$$K \cos \beta = \frac{U_{Cm}}{\omega''} \delta \cos(\alpha - \varphi) - \frac{I_m}{\omega'' C} \sin(\alpha - \varphi). \quad (13, 122)$$

Теперь мы можем составить уравнение для свободных тока и напряжения конденсатора. Для свободного тока, преобразуя уравнение (13, 119)

$$i'' = -\frac{K}{\sqrt{\frac{L}{C}}} e^{-\delta t} \sin(\omega'' t + \beta - \varepsilon) = \frac{C}{\sqrt{LC}} e^{-\delta t} [-\sin(\omega'' t - \varepsilon) - \varepsilon) K \cos \beta - \cos(\omega'' t - \varepsilon) K \sin \beta],$$

и, заменяя $K \sin \beta$ и $K \cos \beta$ через их значения, получим

$$\begin{aligned} i'' &= C e^{-\delta t} \left[-\frac{U_{Cm}}{\omega'' \sqrt{LC}} \delta \cos(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t - \varepsilon) + \right. \\ &+ \left. \frac{I_m}{\omega'' C \sqrt{LC}} \sin(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t - \varepsilon) - \frac{U_{Cm}}{\sqrt{LC}} \cos(\alpha - \varphi) \cos(\omega'' t - \varepsilon) \right] = \\ &= e^{-\delta t} \left\{ \frac{I_m}{\omega'' \sqrt{LC}} \sin(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t - \varepsilon) - \right. \\ &\left. - \frac{U_{Cm} C}{\omega'' \sqrt{LC}} \cos(\alpha - \varphi) [\delta \sin(\omega'' t - \varepsilon) + \omega'' \cos(\omega'' t - \varepsilon)] \right\}; \end{aligned}$$

но $\omega'' \sqrt{LC} = \sin \varepsilon$, а $\delta \sqrt{LC} = \cos \varepsilon$ (фиг. 13, 33), следовательно,

$$\begin{aligned} i'' &= e^{-\delta t} \left\{ \frac{I_m}{\omega'' \sqrt{LC}} \sin(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t - \varepsilon) - \right. \\ &\left. - \frac{U_{Cm} C}{\omega'' \sqrt{LC}} \cos(\alpha - \varphi) [\cos \varepsilon \sin(\omega'' t - \varepsilon) + \sin \varepsilon \cos(\omega'' t - \varepsilon)] \right\} = \\ &= e^{-\delta t} \left[\frac{I_m}{\omega'' \sqrt{LC}} \sin(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t - \varepsilon) - \frac{U_{Cm}}{\omega'' L} \cos(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t \right]. \quad (13, 123) \end{aligned}$$

Для свободного напряжения мы имеем следующее выражение:

$$u_C'' = Ke^{-\delta t} \sin(\omega'' t + \beta) = e^{-\delta t} K(\cos \beta \sin \omega'' t + \sin \beta \cos \omega'' t);$$

после подстановки значений $K \cos \beta$ и $K \sin \beta$ получим

$$\begin{aligned} u_C'' &= e^{-\delta t} \left[\frac{U_{Cm}}{\omega''} \delta \cos(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{I_m}{\omega'' C} \sin(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t + U_{Cm} \cos(\alpha - \varphi) \cos \omega'' t \right] = \\ &= e^{-\delta t} \left\{ -\frac{I_m}{\omega'' C} \sin(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t + \frac{U_{Cm}}{\omega'' \sqrt{LC}} \cos(\alpha - \varphi) [\delta \sqrt{LC} \sin \omega'' t + \right. \\ &\quad \left. + \omega'' \sqrt{LC} \cos \omega'' t] \right\} = e^{-\delta t} \left[\frac{U_{Cm}}{\omega'' \sqrt{LC}} \cos(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t + \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{I_m}{\omega'' C} \sin(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t \right]. \end{aligned} \quad (13, 124)$$

Как явствует из уравнений (13, 123) и (13, 124), свободные ток и напряжение конденсатора представляют собой затухающие синусоидальные колебания, причем эти колебания складываются из двух, сдвинутых между собой по фазе на $(\pi - \varepsilon)$ синусоидальных колебаний; амплитуда одной из указанных составляющих определяется начальным (при $t = 0$) значением вынужденного напряжения, а амплитуда второй составляющей—начальным значением вынужденного тока, т. е. свободный процесс определяется начальными условиями электрического и магнитного полей.

Несоответствие в начальный момент энергии этих полей требованиям вынужденного стационарного режима вызывает дополнительное перемещение энергии.

Теперь, определив законы изменения во времени свободных тока и напряжения конденсатора, мы можем написать соответствующие уравнения уже для всего переходного тока и напряжения конденсатора в течение переходного процесса:

$$\begin{aligned} i &= i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + \\ &+ e^{-\delta t} \left[\frac{I_m}{\omega'' \sqrt{LC}} \sin(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t - \varepsilon) - \frac{U_{Cm}}{\omega'' L} \cos(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t \right]. \\ u_C &= u_C' + u_C'' = -U_{Cm} \cos(\omega t + \alpha - \varphi) + e^{-\delta t} \left[\frac{U_{Cm}}{\omega'' \sqrt{LC}} \cos(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t + \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{I_m}{\omega'' C} \sin(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t \right]. \end{aligned}$$

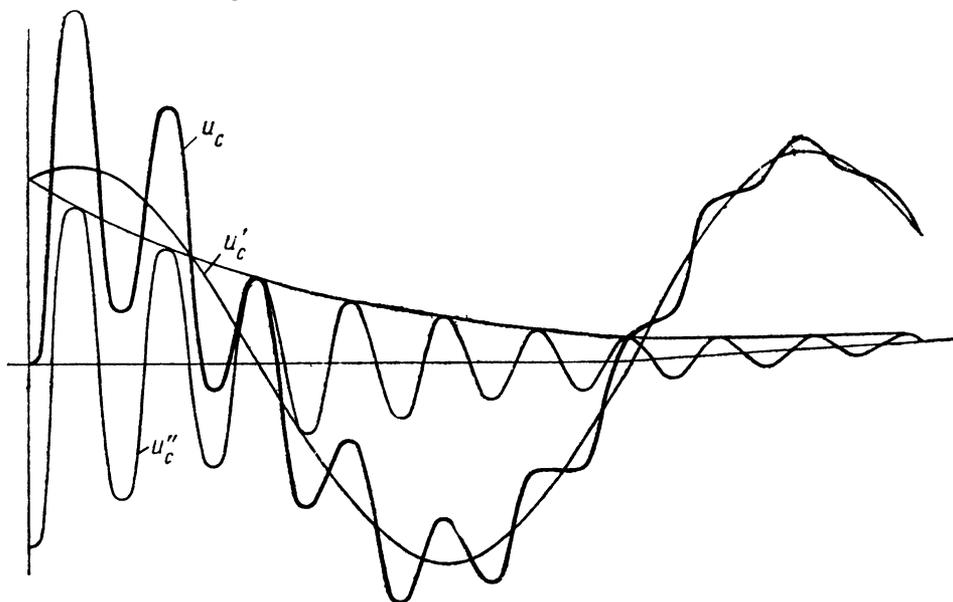
Переходные ток и напряжение конденсатора складываются из незатухающего вынужденного колебания с круговой частотой ω и свободного затухающего колебания с круговой частотой ω'' . В начальный момент вынужденное и свободное колебания противоположны по направлению и в сумме дают нуль, но благодаря различию в частоте спустя некоторый промежуток времени после момента включения вынужденное и свободное колебания уже совпадают по направлению (фиг. 13, 34), и результирующая величина может оказаться значительно больше амплитудного значения вынужденного колебания. Амплитуды свободных величин могут достигать относительно больших значений только при малом затухании в цепи, т. е. при относительно малом активном сопротивлении, а в таких условиях круговая частота свободных колебаний

$$\omega'' \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ или } LC \approx \frac{1}{\omega''^2};$$

следовательно, для подобных условий уравнения свободных величин (13, 123) и (13, 124) могут быть написаны в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} i'' &\approx e^{-\delta t} \left[I_m \sin(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t - \varepsilon) - \frac{I_m \omega''}{\omega} \cos(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t \right]; \\ u_C'' &\approx e^{-\delta t} \left[U_{Cm} \cos(\alpha - \varphi) \sin(\omega'' t + \varepsilon) - \frac{U_{Cm} \omega}{\omega''} \sin(\alpha - \varphi) \sin \omega'' t \right]. \end{aligned} \right\} (13, 125)^1$$

В обоих этих уравнениях в наиболее неблагоприятном случае амплитудные значения первых членов достигают величины амплитуды соответ-



Фиг. 13, 34.

ственно вынужденного тока или вынужденного напряжения конденсатора, следовательно, влияние этого первого члена уравнения в наиболее неблагоприятном случае вызовет удвоение тока или напряжения конденсатора по сравнению с условиями установившегося режима, зато величина вторых членов в уравнениях (13, 125) определяется отношением частоты свободных колебаний к частоте источника переменного тока $\left(\frac{\omega''}{\omega} = \frac{f''}{f}\right)$. Амплитуда второго члена в уравнении свободного тока в неблагоприятном случае может оказаться в $\frac{\omega''}{\omega}$ раз больше амплитуды вынужденного рабочего тока цепи, причем эти наиболее неблагоприятные условия имеют место при включении в тот момент, когда $\cos(\alpha - \varphi) = 1$, т. е. при включении в момент максимума вынужденного напряжения конденсатора. Для свободного напряжения конденсатора мы имеем обратные соотношения,

¹ Здесь принято во внимание, что $\frac{U_{Cm}}{\omega'' CL} = \frac{U_{Cm} C}{\omega'' CL} = U_{Cm} \omega'' C$ и что $U_{Cm} \omega C = I_m$, следовательно, $U_{Cm} \omega'' C = I_m \frac{\omega''}{\omega}$.

амплитуда его второго члена в худших условиях будет в $\frac{\omega}{\omega''}$ раз больше амплитуды вынужденного напряжения конденсатора, причем эти наиболее неблагоприятные условия для напряжения конденсатора имеют место в том случае, когда включение цепи происходит при $\sin(\alpha - \varphi) = 1$, т. е. в момент максимума вынужденного тока.

В случае резонанса напряжений $\varphi = 0$; $\omega = \omega''$.

При этом уравнения (13, 125) будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} i &\approx e^{-\delta t} I_m [\sin \alpha \sin(\omega t - \varepsilon) - \cos \alpha \sin \omega t]; \\ u_c &\approx e^{-\delta t} U_{cm} [\cos \alpha \sin(\omega t + \varepsilon) - \sin \alpha \sin \omega t], \end{aligned} \right\} \quad (13, 126)$$

а так как при малом затухании

$$\sin \varepsilon = \omega'' \sqrt{LC} \approx 1; \quad \cos \varepsilon = \delta \sqrt{LC} \approx 0,$$

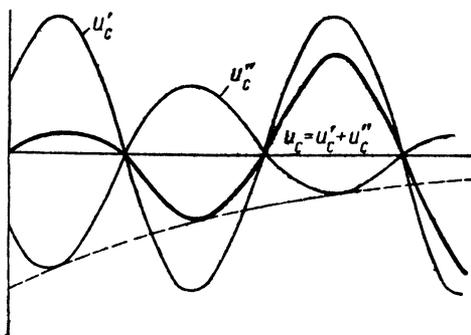
то, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} i'' &\approx e^{-\delta t} [\sin \alpha (\sin \omega t \cos \varepsilon - \cos \omega t \sin \varepsilon) - \cos \alpha \sin \omega t] \approx \\ &\approx -e^{-\delta t} I_m \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (13, 126)$$

Таким же образом получаем

$$u_c'' \approx -e^{-\delta t} U_{cm} \cos(\omega t + \alpha).$$

Как видим, при резонансе напряжений свободные колебания происходят так, что значения свободных тока и напряжения все время противоположны по направлению вынужденным значениям, благодаря чему в течение переходного периода ток и частичные напряжения постепенно увеличивают размах своих колебаний до величины, соответствующей установившемуся режиму цепи (фиг. 13,35).



Фиг. 13, 35.

Резонанс напряжений представляет собой таким образом угрозу для электрических установок в качестве установившегося вынужденного процесса, но в течение переходного процесса в цепи резонанса не возникает никаких дополнительных опасных явлений.

13, 20. Включение на переменное напряжение цепи, содержащей железо

Индуктивность цепей, магнитный поток которых проходит в железе, непостоянна: с изменением тока индуктивность меняется вместе с изменением магнитной проницаемости.

Следовательно, выведенные выше уравнения переходных процессов в цепях с неизменными параметрами, строго говоря, не могут быть применены к переходным явлениям в машинах и аппаратах с железными сердечниками.

Однако эти уравнения могут быть использованы для приближенной характеристики процессов в тех случаях, когда железный магнитопровод разрезан воздушным зазором, что имеет место во всех вращающихся машинах. Большое постоянное магнитное сопротивление этого воздушного участка пути потока сглаживает изменения магнитной проницаемости железа и делает индуктивность менее зависящей от тока.

Но законы переходных процессов неизбежно должны иметь ряд специфических особенностей для цепей с замкнутыми магнитопроводами, индуктивность которых резко изменяется в зависимости от насыщения железа, являясь, таким образом, функцией намагничивающего тока. Важнейшим примером подобной цепи являются трансформаторы, причем наибольший практический интерес представляют собой явления, происходящие при включении трансформаторов на переменное напряжение; мы здесь и остановимся на их изучении.

Пусть катушка с железным сердечником включается на переменное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (13, 127)$$

где α — фаза в момент включения.

Как известно, мгновенное значение тока в цепи определяется (по закону Ома) как частное от деления на сопротивление суммы напряжения и э. д. с., наводимой изменяющимся магнитным потоком:

$$i = \frac{u + e_L}{R}. \quad (13, 128)$$

В свою очередь

$$e_L = -w \frac{d\Phi}{dt}; \quad (13, 129)$$

тогда

$$U_m \sin(\omega t + \alpha) = iR + w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (13, 130)$$

Решая это уравнение относительно $d\Phi$ и интегрируя его, получаем

$$\Phi = \frac{U_m}{w} \int \sin(\omega t + \alpha) dt - \frac{R}{w} \int i dt = -\frac{U_m}{\omega w} \cos(\omega t + \alpha) + K - \frac{R}{w} \int i dt, \quad (13, 131)$$

или

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + K - \frac{R}{w} \int i dt. \quad (13, 132)$$

Постоянную интегрирования K легко определить из начальных условий: в момент включения ($t=0$) поток в железе равен нулю или остаточному намагничиванию ($\Phi_{ост}$). В том случае, когда при $t=0$ и $\Phi_0=0$, на основании уравнения (13, 132)

$$K = \frac{U_m}{\omega w} \cos \alpha, \quad (13, 133)$$

и, следовательно,

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U_m}{\omega w} \cos \alpha - \frac{R}{w} \int i dt. \quad (13, 134)$$

Вспомним, что э. д. с., наводимая в трансформаторе (см. гл. 9),

$$E = 4,44 \omega f \Phi_m = \frac{\omega w}{\sqrt{2}} \Phi_m,$$

и, следовательно, входящая в наши уравнения величина

$$\frac{U_m}{\omega w} = \Phi_m, \quad (13, 135)$$

т. е. представляет собой амплитуду магнитного потока при установившемся режиме, иными словами, амплитуду вынужденного потока. Таким образом уравнение потока принимает следующую форму:

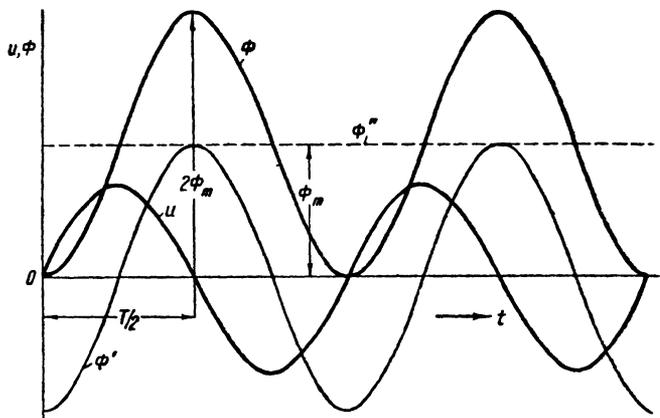
$$\Phi = \Phi_m \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \Phi_m \cos \alpha - \frac{R}{\omega} \int i dt. \quad (13, 136)$$

В этом уравнении первый член изображает вынужденный синусоидальный переменный поток (Φ'), а два следующих члена — свободный поток (Φ''), который постепенно убывает до нуля вместе с ростом слагающей $\frac{R}{\omega} \int i dt$. Если сопротивление R очень мало, свободная слагающая потока в течение более или менее длительного промежутка времени остается постоянной. Важно обратить внимание на то, что по мере убывания свободной слагающей потока намагничивающий ток стремится к тому, чтобы стать одинаковым во время положительной и отрицательной частей периода, и за целый период, $\int i dt$ увеличивается все меньше и меньше.

Если мы первоначально будем пренебрегать активным сопротивлением, картина нестационарного процесса может быть представлена так:

В начальный момент вынужденный и свободный потоки равны по величине, но противоположны по направлению (фиг. 13, 36), затем вынужденный поток меняет направление и складывается со свободным потоком. В наиболее неблагоприятном случае, если включение происходит в момент максимума вынужденного потока, т. е. при $\alpha = 0$, суммарный поток катушки повысится спустя полпериода до двойного значения амплитуды вынужденного потока. При этом суммарный поток постоянен по направлению и колеблется вокруг значения $+\Phi_m$.

Однако полученное нами уравнение имеет общий характер — оно справедливо и для катушки без железа. Специфическую сторону явления мы обнаружим только, когда обратимся к определению тока, создающего этот удвоенный поток. Связь между потоком и намагничивающим током для цепей с железом определяется кривой намагничивания, из которой видно, что по мере приближения к насыщению незначительное увеличение потока требует все большего и большего увеличения намагничивающего тока. Но трансформаторы обычно конструируются именно так, что при максимальном потоке их железо находится в условиях, близких к насыщению. По этой причине удвоение рабочего потока требует многократного увеличения намагничивающего тока. В результате нарастание намагничивающего тока практически оказывается ограниченным почти лишь одним активным сопротивлением обмотки. Опыты показали, что толчок тока при включении трансформатора может достигнуть 120-кратной величины амплитуды тока холостого хода и таким образом превышать нормальный рабочий ток трансформатора при полной нагрузке в 10—12 раз.

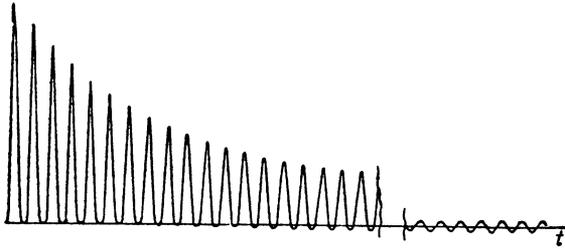


Фиг. 13, 36.

Кривая тока включения ненагруженного трансформатора показана на фиг. 13, 37. Как видно из этой кривой, толчки тока повторяются в течение нескольких периодов, затухая относительно медленно (у больших трансформаторов благодаря их малому омическому сопротивлению спустя 20—30 сек. после включения ток еще заметно отличается от нормального тока холостого хода).

Амплитуда толчка тока зависит от момента включения, и любопытно отметить, что наиболее опасным является включение в момент нулевого значения напряжения на зажимах (т. е. при $\alpha = 0$, когда $\Phi'' = \Phi_m \cos 0 = \Phi_m$), а при включении в момент максимума напряжения толчок тока отсутствует, — сразу устанавливается нормальный намагничивающий ток¹.

С другой стороны, толчок тока тем больше, чем значение амплитуды установившегося потока ближе к насыщению. В современном электромашиностроении стремятся уменьшить вес, увеличивая индукцию трансформаторов до 12—15 kGs, что оказалось возможным лишь благодаря



Фиг. 13, 37.

применению кремнистого железа — „легированной трансформаторной стали“. Но именно для этих сплавов железа кривая намагничивания имеет довольно резкий перегиб вблизи насыщения. Таким образом переход к кремнистому железу сильно увеличил опасности толчков тока при включении трансформатора.

Эти толчки тока создают опасные динамические усилия между обмотками трансформатора (пропорциональные квадрату тока), с другой стороны, эти толчки тока, перегружая сеть, могут привести в действие предохранители или реле и тем самым вызвать нежелательные выключения установок.

В наших рассуждениях мы пренебрегли остаточным намагничением железа. При неблагоприятных условиях остаточное намагничение может значительно увеличить толчок тока, в этом случае в начальный момент поток в железе равен потоку остаточного намагничения:

$$\Phi_0 = \Phi_{ост};$$

следовательно, на основании уравнения (13, 132)

$$K = \Phi_m \cos \alpha + \Phi_{ост}$$

и

$$\Phi = \Phi_m \sin \left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \Phi_m \cos \alpha + \Phi_{ост};$$

таким образом теоретически возможно увеличение потока даже больше, чем до двойной величины. Однако практически мало вероятно, чтобы в трансформаторе остаточная индукция превысила 2000 Gs.

Если при подсчете толчка тока учитывать влияние постоянного сопротивления R , то расчет может быть произведен следующим образом:

На основании уравнения (13, 136) в наиболее неблагоприятном случае ($\alpha = 0$)

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w} (1 - \cos \omega t) - \frac{R}{w} \int i dt.$$

¹ Так как моменту прохождения напряжения через максимум соответствует прохождение тока через нуль (если, пренебрегая сопротивлением, считать $u \approx w \frac{d\Phi}{dt}$).

Считаем сначала, что $R=0$, и определяем, как мы это делали выше, значение Φ в первом приближении:

$$\Phi_1 = \frac{U_m}{\omega w} (1 - \cos \omega t).$$

Затем для ряда отдельных значений Φ_1 определяем на основании кривой намагничивания железа кривую тока и вычисляем соответствующие значения поправочного члена

$$K_1 = \frac{R}{w} \int_0^t i dt,$$

после чего определяем поток во втором приближении

$$\Phi_2 = \Phi_1 - K_1;$$

затем, пользуясь кривой намагничивания, на основании значений Φ_2 вновь строим кривую тока и определяем величину

$$\frac{R}{w} \int_0^t i dt$$

и находим поток в третьем приближении и т. д. Сходимость результатов тем больше, чем меньше значение R .

Скорость затухания процесса с трудом поддается расчету, так как помимо непостоянства L необходимо учесть также и влияние потерь на гистерезис и токи Фуко. Благодаря этим потерям процесс затухает значительно скорее чем это обуславливает сопротивление обмотки трансформатора R_{mp} , т. е. быстрее, чем это определяет функция $e^{-\frac{R_{mp}}{L}t}$.

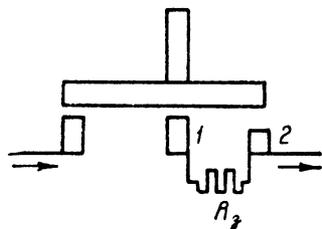
Согласно указаниям Роговского можно заменить кривую намагничивания тремя примыкающими прямолинейными участками и для каждого из этих участков применить законы затухания в цепи с постоянными L и R .

Для ослабления толчка тока трансформатор можно включать на напряжение через сопротивление, которое затем замыкается накоротко. Технически это осуществляется посредством устройства в выключателе (фиг. 13, 38) вспомогательного контакта 1, соединенного с основным контактом 2 через защитное сопротивление R_s . Нож 3 масляного выключателя сначала замыкает ток через защитное сопротивление R_s , а затем, замыкая контакт 2, закорачивает R_s , включая трансформатор непосредственно на полное напряжение. При этом затухание свободного потока до замыкания контакта 2 идет по круто спадающей кривой, а затем после выключения R_s — по более пологой кривой. При надлежащем выборе значения R_s свободный поток успевает настолько затухнуть за полпериода переменного тока, что наложение свободного потока на амплитуду вынужденного потока уже не может вызвать большой толчок тока.

Величина R_s может быть примерно определена на основании следующих соображений:

В основу расчета положим предельное допустимое значение толчка тока I_n и выразим его через амплитуду I_m' установившегося тока холостого хода:

$$I_n = kI_m'; \tag{13, 137}$$



Фиг. 13, 38.

здесь k — допускаяемая кратность толчка тока. По кривой намагничивания железа находим значение индукции, соответствующее I_n , и выражаем найденное таким образом значение потока Φ_n , соответствующего I_n , через амплитуду установившегося потока — вынужденного потока трансформатора.

$$\Phi_n = \alpha \Phi_m'.$$

Мы можем считать, что затухание свободного потока в течение первого периода после включения происходит по закону

$$\Phi'' = \Phi_0'' e^{-\frac{R}{L_n} t};$$

здесь L_n обозначает эффективную индуктивность системы в течение первого периода, а R — сумму сопротивлений обмотки и защитного:

$$R = R_{mp} + R_s.$$

В наиболее неблагоприятном случае при $\alpha = 0$

$$\Phi_0'' = \Phi_m',$$

т. е. начальное значение свободного потока равно амплитуде вынужденного потока.

В этом случае поток трансформатора

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' = -\Phi_m' \cos \omega t + \Phi_m' e^{-\frac{R}{L_n} t}; \quad (13, 138)$$

он достигает максимума приблизительно спустя полпериода после включения, т. е. в момент

$$t \approx \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Это максимальное значение потока согласно уравнению (13, 138) может быть выражено следующим образом:

$$\Phi(t = \frac{\pi}{\omega}) = \Phi_m' \left(1 + e^{-\frac{\pi R}{\omega L_n}} \right). \quad (13, 139)$$

Но, с другой стороны, мы поставили условие ограничения этого потока:

$$\Phi(t = \frac{\pi}{\omega}) = \Phi_n = \alpha \Phi_m'. \quad (13, 140)$$

На основании последних двух уравнений

$$\alpha = 1 + e^{-\frac{\pi R}{\omega L_n}},$$

или

$$\frac{\pi R}{\omega L_n} = \ln \frac{1}{\alpha - 1}. \quad (13, 141)$$

Далее, так как

$$\Phi \omega = LI,$$

то

$$L_n = \frac{\Phi_n \omega}{I_n} = \frac{\alpha}{k} \frac{\omega \Phi_m'}{I_m'}. \quad (13, 142)$$

Выражая Φ_m' через индуктивность L' при установившемся режиме холостого хода

$$\Phi_m' = \frac{L' I_m'}{\omega},$$

получим

$$L_n = \frac{\alpha}{k} \frac{L' I_m'}{I_m'};$$

подставив это значение в уравнение (13, 141), найдем, что

$$R = \frac{\omega L' I_m'}{I_m'} \frac{\alpha}{k\pi} \ln \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Можно считать, что при холостом ходе

$$U_m = \omega L' I_m';$$

следовательно,

$$R = \frac{U}{I'} \frac{\alpha}{k\pi} \ln \frac{1}{\alpha - 1}. \quad (13, 143)$$

Пример 13, 7. Толчок тока I_n включения трансформатора не должен превышать номинального рабочего тока при полной нагрузке, а ток холостого хода I' составляет 5% от рабочего тока I_n . Номинальное напряжение трансформатора $U = 6$ kV; ток холостого хода $I' = 4$ А; индукция в железе $B_{\max} = 12$ kGs; $I_n = I_{\text{шт}} = 20 I_m'$; следовательно, $k = 20$. Допустим, что по кривой намагничивания железа мы нашли, что 20-кратному увеличению тока соответствует увеличение индукции с 12 kGs только до 17,2 kGs; следовательно,

$$\Phi_n = \Phi_m' \cdot 1,42; \quad \alpha = 1,42.$$

Тогда по уравнению (13, 143)

$$R = \frac{6000}{4} \cdot \frac{1,42}{20 \cdot 3,14} \ln \frac{1}{1,42 - 1} = 29,4 \Omega.$$

13, 21. Алгебраизация дифференциальных уравнений

Исследование переходных процессов в сложных цепях при помощи тех приемов решения дифференциальных уравнений, какими мы пользовались выше, связано со значительными трудностями. По этой причине изучение названных процессов в большинстве случаев ведется при помощи специальных математических приемов — операторного исчисления, применявшегося Хевисайдом. Первым приемом операторного исчисления является алгебраизация дифференциальных уравнений.

Для облегчения исследования установившихся процессов в цепях переменного тока мы широко применяли символический метод. С математической точки зрения используемый этим методом j является также оператором.

Теперь, обращаясь к дифференциальным уравнениям электрических цепей с неизменными параметрами R , L и C , можно предположить, что существует некоторый оператор γ , умножение на который превращает мгновенное значение тока или напряжения в их первую производную. Математическим основанием для такого предположения может служить то обстоятельство, что интегрирование дифференциальных уравнений электрических цепей с неизменными параметрами дает интеграл в виде функции

$$i = Ae^{\gamma t},$$

первая производная которой равна этой же функции, умноженной на γ :

$$\frac{di}{dt} = \gamma Ae^{\gamma t} = \gamma i.$$

Мы можем считать, что γ является оператором, умножение на который равносильно дифференцированию, при этом необязательно подразу-

мевать, что γ имеет некоторое определенное значение: мы рассматриваем оператор γ лишь как символический знак дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} \text{далее} \quad & \gamma = \frac{d}{dt}; \\ & \gamma^2 = \frac{d^2}{dt^2}; \\ \text{и наконец,} \quad & \frac{1}{\gamma} = \int dt, \end{aligned} \right\} \quad (13, 144)$$

так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.

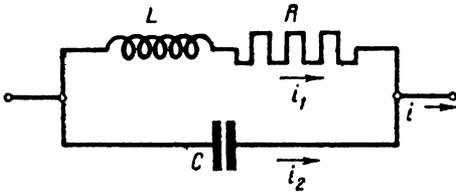
При помощи оператора γ дифференциальное уравнение электрической цепи, например,

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt,$$

превращаем в алгебраическое уравнение

$$u = Ri + \gamma Li + \frac{1}{\gamma C} i. \quad (13, 145)$$

Разделив последнее уравнение на i , мы получим выражение для мгновенного сопротивления цепи, в частности, для сопротивления цепи при переходном процессе



Фиг. 13, 39.

$$Z_{(\gamma)} = R + \gamma L + \frac{1}{\gamma C}; \quad (13, 146)$$

это сопротивление является функцией от γ , что мы и отмечаем индексом. Мы будем называть $Z_{(\gamma)}$ оператором переходного сопротивления, так как в результате умножения на $Z_{(\gamma)}$ тока i мы получаем напряжение.

Обратную величину $\frac{1}{Z_{(\gamma)}} = Y_{(\gamma)}$ будем называть оператором переходной проводимости.

В комплексных уравнениях цепи переменного (синусоидального) тока оператор $j\omega$ при установившемся режиме заменяет дифференцирование

$$j\omega = \frac{d}{dt}.$$

В алгебраизованных дифференциальных уравнениях электрических цепей при неустановившихся режимах такую же роль играет оператор γ .

Естественно, что для одной и той же цепи выражение для кажущегося сопротивления при переменном токе Z и выражение для переходного сопротивления $Z_{(\gamma)}$ отличаются лишь тем, что во втором случае γ заменяет $j\omega$.

Например, для цепи фиг. 13, 39

$$u = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} = Ri_1 + \gamma Li_1$$

и

$$u = \frac{1}{C} \int i_2 dt = \frac{1}{\gamma C} i_2;$$

следовательно, общий ток

$$i = i_1 + i_2 = u \left(\frac{1}{R + \gamma L} + \gamma C \right),$$

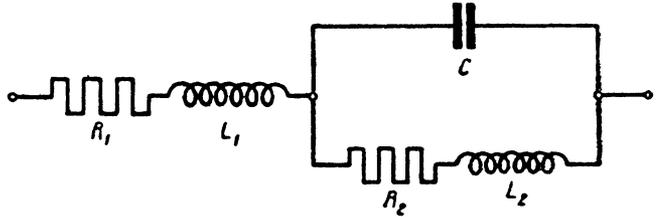
на основании чего оператор сопротивления

$$Z_{(\gamma)} = \frac{R + \gamma L}{1 + \gamma CR + \gamma^2 LC}.$$

Для той же цепи комплексное сопротивление при переменном токе

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega CR + j^2 \omega^2 LC}.$$

Полная аналогия выражений для оператора переходного сопротивления $Z_{(\gamma)}$, с одной стороны, и для комплексного сопротивления переменного тока Z позволяет пользоваться при определении переходного сопротивления сложных цепей известными приемами расчета комплексных сопротивлений путем простой замены в выражении комплексного сопротивления сложной цепи оператора $j\omega$ через γ .

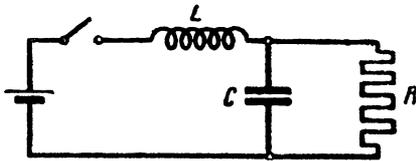


Фиг. 13, 40.

Например, для цепи фиг. 13, 40 комплексное сопротивление

$$Z = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C} (R_2 + j\omega L_2)}{\frac{1}{j\omega C} + R_2 + j\omega L_2} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{R_2 + j\omega L_2}{1 + j\omega CR_2 + (j\omega)^2 L_2 C};$$

следовательно, оператор переходного сопротивления в этом случае будет



Фиг. 13, 41.

$$Z_{(\gamma)} = R_1 + \gamma L_1 + \frac{R_2 + \gamma L_2}{1 + \gamma CR_2 + \gamma^2 LC}.$$

Наконец, рассмотрим пример несколько иного характера. Нужно составить уравнение для зарядного тока конденсатора при включении цепи фиг. 13, 41 на постоянное напряжение u . Искомое уравнение в данном случае также может быть получено путем соответствующего расчета цепи переменного тока и замены в полученном выражении $j\omega$ оператором γ . Но в соответствии с поставленной задачей нужно определить не комплексное сопротивление всей цепи, а комплексный множитель, являющийся коэффициентом пропорциональности между напряжением на зажимах цепи и током в ветви емкости.

Общий переменный ток цепи

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{j\omega L + \frac{R}{j\omega CR + 1}} = \frac{\dot{U} (j\omega CR + 1)}{(j\omega)^2 LCR + j\omega L + R},$$

а напряжение на конденсаторе

$$\dot{U}_C = \dot{i} \frac{R}{j\omega CR + 1} = \frac{\dot{U} R}{(j\omega)^2 LCR + j\omega L + R},$$

и наконец, переменный ток в ветви с емкостью

$$\dot{I}_C = \dot{U}_C j\omega C = \dot{U} \frac{j\omega CR}{(j\omega)^2 LCR + j\omega L + R}.$$

Теперь путем замены $j\omega$ оператором γ мы найдем оператор $H_{(\gamma)}$, являющийся в данном случае коэффициентом пропорциональности между приложенным напряжением u и мгновенным значением зарядного тока емкости. Роль оператора $H_{(\gamma)}$ по существу та же, что и оператора переходной проводимости $Y_{(\gamma)}$

$$H_{(\gamma)} = \frac{\gamma CR}{\gamma^2 LCR + \gamma L + R}, \quad (13, 147)$$

и следовательно,

$$i_C = u \frac{\gamma CR}{\gamma^2 LCR + \gamma L + R}.$$

Таким образом переходное сопротивление $Z_{(\gamma)}$, проводимость $Y_{(\gamma)}$ или операторная функция $H_{(\gamma)}$ определяются относительно просто как функция от γ .

Однако для решения алгебраизованного уравнения цепи необходимо определить значение γ и постоянных коэффициентов A , а это в большинстве случаев представляет собой значительные трудности и может быть выполнено без очень сложных преобразований и подстановок только для относительно простых цепей.

Применяя оператор γ для алгебраизации дифференциальных уравнений переходных процессов, мы можем продолжать рассматривать переходный процесс как наложение вынужденного и свободного процессов. Оператор $Z_{(\gamma)}$ или $H_{(\gamma)}$ мы применяем для уравнений свободного процесса:

$$i'' Z_{(\gamma)} = u'' = 0; \quad (13, 148)$$

внешнее напряжение для свободного процесса u'' всегда равно нулю, а свободный ток i'' может иметь ряд конечных значений; вместе с тем, произведение $Z_{(\gamma)} \cdot i''$ должно всегда быть равно нулю, следовательно, всегда для свободного процесса переходное сопротивление

$$Z_{(\gamma)} = 0. \quad (13, 149)^{-}$$

Это условие дает возможность составить для оператора γ соответствующее характеристическое уравнение, а затем, подставив найденные значения γ в общее решение для исследуемой величины

$$i = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + A_k e^{\gamma_k t}, \quad (13, 150)^1$$

можно определить постоянные коэффициенты A на основании начальных условий цепи. Во всех случаях для определения этих коэффициентов мы используем то обстоятельство, что ни энергия магнитного поля, ни энергия электрического поля не могут внезапно измениться, иными словами, ток в ветви, содержащей индуктивность, и напряжение на каждом конденсаторе в исследуемой цепи в первый момент после начала переходного процесса остаются такими же, какими они были перед началом процесса. Изложенный здесь метод алгебраизации по существу дела сводится к написанию характеристического уравнения.

В качестве примера применения оператора (γ) рассмотрим сначала процесс включения цепи фиг. 13, 41 на постоянное напряжение.

На основании уравнения (13, 147) определяем оператор переходного сопротивления

$$Z_{(\gamma)} = \frac{1}{H_{(\gamma)}} = \frac{\gamma^2 LCR + \gamma L + R}{\gamma CR} = 0,$$

откуда

$$\gamma^2 + \frac{1}{RC} \gamma + \frac{1}{LC} = 0$$

¹ В случае отсутствия кратных корней.

и

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (13, 151)$$

Следовательно, уравнение свободного тока будет

$$i_C'' = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}.$$

Постоянные A можно определить на основании того, что в начальный момент равны нулю напряжение конденсатора и ток в индуктивности. Если корень в уравнении (13, 151) будет действительным, то процесс будет аperiodическим, в случае же мнимого корня процесс будет колебательным. Дальнейшее решение уравнения уже для нас не имеет принципиального значения, так как по существу не отличается от того, что было изложено раньше.

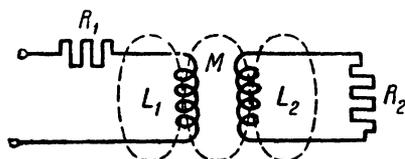
13,22. Цепи со взаимной индуктивностью

Алгебраизация дифференциальных уравнений позволяет относительно просто исследовать переходные процессы в цепях, содержащих взаимную индуктивность. Для подобной цепи фиг. 13, 42 дифференциальные уравнения свободного процесса будут для первичной цепи

$$R_1 i_1'' + L_1 \frac{di_1''}{dt} + M \frac{di_2''}{dt} = 0 \quad (13, 152)$$

и для вторичной цепи

$$R_2 i_2'' + L_2 \frac{di_2''}{dt} + M \frac{di_1''}{dt} = 0. \quad (13, 153)$$



Фиг. 13, 42.

В этих уравнениях L_1 и L_2 — суммарные индуктивности первичной и вторичной цепей. В них в качестве составляющих входят как индуктивности, обусловленные общим потоком обеих цепей, так и индуктивности, обусловленные независимыми потоками каждой из цепей (эти последние индуктивности мы можем назвать индуктивностями рассеяния L_{1s} и L_{2s}). Таким образом

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= M \frac{\omega_1}{\omega_2} + L_{1s} \\ L_2 &= M \frac{\omega_2}{\omega_1} + L_{2s} \end{aligned} \right\} \quad (13, 154)$$

Алгебраизуя уравнения (13, 152) и (13, 153), получаем

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1'' + \gamma L_1 i_1'' + \gamma M i_2'' &= 0 \\ R_2 i_2'' + \gamma L_2 i_2'' + \gamma M i_1'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13, 155)$$

Из последнего уравнения определяем

$$i_2'' = -i_1'' \frac{\gamma M}{R_2 + \gamma L_2}, \quad (13, 156)$$

и подставляя в первое из уравнений (13, 155),

$$(R_1 + \gamma L_1) i_1'' - \frac{\gamma^2 M^2}{R_2 + \gamma L_2} i_1'' = 0,$$

или

$$\frac{R_1 R_2 + \gamma (L_1 R_2 + L_2 R_1) + \gamma^2 (L_1 L_2 - M^2)}{R_2 + \gamma L_2} i_1'' = 0. \quad (13, 157)$$

Так как знаменатель $R_2 + \gamma L_2 \neq \infty$, то, следовательно,

$$R_1 R_2 + \gamma(L_1 R_2 + L_2 R_1) + \gamma^2(L_1 L_2 - M^2) = 0.$$

или

$$\gamma^2 + \gamma \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2} = 0. \quad (13, 158)$$

Из этого характеристического уравнения находим два корня:

$$\gamma_{1,2} = -\frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{2(L_1 L_2 - M^2)} \pm \sqrt{\frac{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2}{4(L_1 L_2 - M^2)^2} - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2}}. \quad (13, 159)$$

По физическому смыслу оба эти корня действительны, так как комплексный корень определяет колебательный процесс, а последний без емкости невозможен. Действительность этих корней можно доказать и математически.

Общие интегралы для свободных токов первичной и вторичной цепей должны иметь следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} i_1'' &= A_1 e^{n_1 t} + A_2 e^{n_2 t}; \\ i_2'' &= A_3 e^{n_1 t} + A_4 e^{n_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (13, 160)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= -\alpha + \beta; & \gamma_2 &= -\alpha - \beta, \\ \beta &= \sqrt{\alpha^2 - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (13, 161)$$

так как

$$L_1 > M \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{и} \quad L_2 > M \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

[см. (13, 154)], а значит,

$$L_1 L_2 > M^2, \quad (13, 162)$$

то, следовательно,

$$\alpha > \beta, \quad (13, 163)$$

и оба значения γ отрицательны.

Таким образом первичный и вторичный свободные токи складываются из одной медленнее затухающей составляющей с постоянной времени

$$\tau_1 = -\frac{1}{\gamma_1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \quad (13, 164)$$

и второй составляющей, затухающей значительно быстрее, с постоянной времени

$$\tau_2 = -\frac{1}{\gamma_2} = \frac{1}{\alpha + \beta}, \quad (13, 165)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} i_1'' &= A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}; \\ i_2'' &= A_3 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_4 e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13, 166)$$

Свободные токи в обеих цепях затухают с одинаковой скоростью.

Для того чтобы определить постоянные A , мы должны обратиться к начальным условиям исследуемого процесса. Наши уравнения составлены для общих условий переходных процессов в цепи фиг. 13, 42, определим теперь постоянные для частного случая — включения цепи на постоянное напряжение U .

Благодаря противодействию индуктивности в начальный момент в обеих цепях ток должен быть равен нулю. Следовательно, при $t=0$ сумма вынужденного и свободного токов в обеих цепях равна нулю:

$$\begin{aligned} i_{10}' + i_{10}'' &= i_{10} = 0; \\ i_{20}' + i_{20}'' &= i_{20} = 0, \end{aligned}$$

а посредством постановки значений свободных токов из уравнений (13, 166) получим

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= -i_{10}'; \\ A_3 + A_4 &= -i_{20}''. \end{aligned}$$

Вынужденный установившийся постоянный ток первичной цепи

$$i_1' = \frac{U}{R_1} = I_1,$$

а вынужденный ток вторичной цепи равен нулю:

$$i_2' = 0,$$

на основании чего

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= -I_1; \\ A_3 + A_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13, 167)$$

Уравнение (13, 156), связывающее первичный и вторичный токи, должно быть справедливо и для взятых порознь обеих составляющих этих токов, имеющих одинаковую постоянную времени, на основании чего

$$A_3 e^{-\frac{t}{\tau_1}} = -A_1 \frac{\gamma_1 M}{R_2 + \gamma_1 L_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

и

$$A_4 e^{-\frac{t}{\tau_2}} = -A_2 \frac{\gamma_2 M}{R + \gamma_2 L_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

или после сокращения

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -A_1 \frac{\gamma_1 M}{R_2 + \gamma_1 L_2} = -A_1 \sigma_1; \\ A_4 &= -A_2 \frac{\gamma_2 M}{R_2 + \gamma_2 L_2} = -A_2 \sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (13, 168)$$

Складывая уравнения (13,168) на основании уравнения (13, 167) получаем

$$A_3 + A_4 = 0 = -A_1 \sigma_1 - A_2 \sigma_2,$$

откуда

$$A_2 = -A_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (13, 169)$$

Тогда из уравнения (13,167)

$$A_1 = -I_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad (13, 170)$$

а по (13, 169)

$$A_2 = I_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}. \quad (13, 171)$$

На основании уравнений (13,168) определяем и постоянные вторичной цепи:

$$A_3 = I_1 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}; \quad A_4 = -I_1 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}. \quad (13, 172)$$

Таким образом уравнение свободного тока в первичной цепи принимает следующий вид:

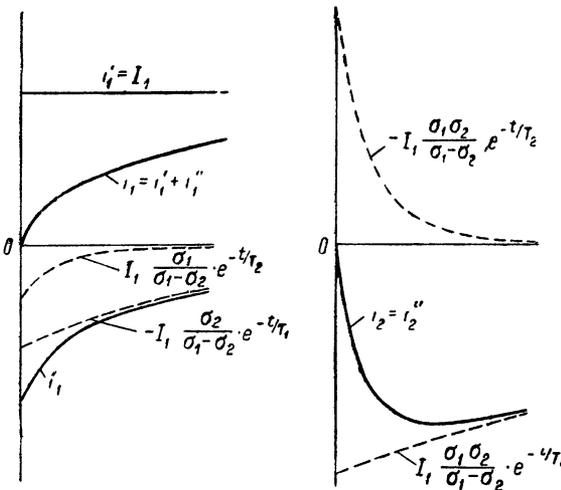
$$i_1'' = -I_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (13, 173)$$

а весь первичный ток во время переходного процесса определяется уравнением

$$i_1 = i_1' + i_1'' = I_1 - I_1 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right). \quad (13, 174)$$

Во вторичной цепи при включении на постоянное напряжение будет возникать только свободный ток переходного процесса, который по (13,166) и (13,172) будет

$$i_2 = I_1 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - I_1 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (13, 175)$$



Фиг. 13, 43.

Свободный ток первичной цепи складывается из двух составляющих причем меньшая составляющая затухает скорее. Во вторичной цепи две составляющие тока в начальный момент равны по величине, но противоположны по направлению. Первая составляющая вторичного тока затухает медленнее, благодаря чему ток i_2 начинает увеличиваться от нуля, в некоторый момент достигает максимума, а затем уменьшается, стремясь к нулю, как это показано на фиг. 13, 43.

В частном случае при равенстве сопротивлений и индуктивностей обеих цепей и при равенстве чисел витков магнитно связанных обмоток, т. е. при

$$R_1 = R_2 = R; \quad L_1 = L_2 = L; \quad L_{1s} = L_{2s} = L_s,$$

уравнения токов значительно упростятся, принимая следующую простую форму:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_1 - \frac{I_1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{I_1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}; \\ i_2 &= -\frac{I_1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{I_1}{2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13, 176)$$

В случае включения на переменное напряжение приемы составления уравнений, равно как и характер свободного процесса, остаются те же, что и рассмотренные нами для случая включения на постоянное напряжение; изменяются лишь начальные значения свободных токов.

13,23. Теоремы разложения

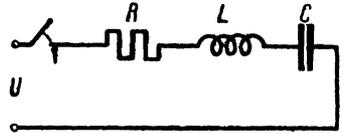
На основе вышеизложенного способа построения дифференциальных уравнений Хевисайд дал ряд теорем разложения (применяемых не только

к изменениям электромагнитных состояний, но и вообще ко всем изменениям, выражаемым линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами). Эти теоремы дают возможность составить уравнение переходного процесса, не обращаясь к начальным условиям для определенных постоянных, что в целом ряде случаев значительно облегчает решение. Хевисайд не дал общего доказательства своих теорем разложения, он предложил их лишь на основании обобщения ряда частных решений¹.

Для случая включения на постоянное напряжение U уравнение Хевисайда имеет следующую форму:

$$h = \frac{U}{H_{(0)}} + U \sum_1^n \frac{e^{\gamma_k t}}{\gamma_k \left(\frac{dH_{(\gamma)}}{d\gamma} \right)_{(\gamma=\gamma_k)}}. \quad (13, 177)$$

В этом выражении $H_{(\gamma)}$ является оператором, который определяется уже известным нам способом по аналогии с комплексными расчетами для цепи переменного тока. $H_{(0)}$ является частным значением $H_{(\gamma)}$ для случая, когда $\gamma=0$, т. е. операторной величиной для установившегося постоянного тока, таким образом первый член уравнения выражает собой вынужденную составляющую, а второй — свободную.



Фиг. 13, 44.

Приравнявая $H_{(\gamma)}=0$, мы получаем характеристическое уравнение для γ , из которого и определяем n корней, входящих в формулу разложения.

В качестве примера на применение этой теоремы рассмотрим закон изменения во времени заряда Q конденсатора при включении колебательного контура фиг. 13, 44 на постоянное напряжение.

Согласно теореме разложения

$$Q = \frac{U}{H_{(0)}} + U \sum_1^n \frac{e^{\gamma_k t}}{\gamma_k \left(\frac{dH_{(\gamma)}}{d\gamma} \right)_{(\gamma=\gamma_k)}}. \quad (13, 178)$$

С другой стороны, посредством оператора γ этот заряд может быть выражен следующим образом:

$$Q = u_C C = i \frac{C}{\gamma C} = \frac{U}{R\gamma + \gamma^2 L + \frac{1}{C}} = \frac{U}{H_{(\gamma)}}. \quad (13, 179)$$

Приравнявая $H_{(\gamma)}=0$, мы получаем характеристическое уравнение

$$R\gamma + \gamma^2 L + \frac{1}{C} = 0,$$

из которого находим два значения:

$$\gamma_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (13, 180)$$

Для сокращения письма обозначим так же, как мы это делали в § 13, 14, собственную круговую частоту незатухающих колебаний контура

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_{нз},$$

¹ Доказательства теорем разложения были даны уже позже Вагнером, Валларта и Каспером. Так как эти доказательства имеют главным образом математический интерес, то в нашем курсе мы приведем теоремы без доказательств, читатель может найти более подробный материал в соответствующей специальной литературе (см., например, Д. Р. Карсон, Электрические нестационарные явления и операционное исчисление, перевод с английского, ОНТИ, 1934).

а постоянную времени затухания

$$\frac{2L}{R} = \tau;$$

тогда

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_{нс}^2} = -\frac{1}{\tau} \pm \xi. \quad (13, 181)$$

Оператор в знаменателе первого члена уравнения (13, 178)

$$H_{(0)} = R0 + 0L + \frac{1}{C} = \frac{1}{C}. \quad (13, 182)$$

Производная в знаменателе второго члена

$$\frac{dH_{(\gamma)}}{d\gamma} = R + 2\gamma L = 2L \left(\frac{1}{T_s} + \gamma \right); \quad (13, 183)$$

подставляя оба значения γ из (13, 181), получим

$$\frac{dH_{(\gamma_1)}}{d\gamma_1} = 2L \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} + \xi \right) = 2\xi L;$$

$$\frac{dH_{(\gamma_2)}}{d\gamma_2} = 2L \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} - \xi \right) = -2\xi L.$$

Вводя все эти величины в формулу разложения (13, 178), получаем

$$Q = UC + U \left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau} + \xi t}}{\left(-\frac{1}{\tau} + \xi\right) 2\xi L} + \frac{e^{-\frac{t}{\tau} - \xi t}}{\left(-\frac{1}{\tau} - \xi\right) (-2\xi L)} \right];$$

$$Q = UC - U \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{2\xi L} \left(\frac{e^{\xi t}}{\frac{1}{\tau} - \xi} - \frac{e^{-\xi t}}{\frac{1}{\tau} + \xi} \right). \quad (13, 184)$$

Заряд конденсатора постепенно возрастает, стремясь в пределе к величине UC . Первый член уравнения представляет собой вынужденный заряд.

В случае, когда

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2},$$

т. е. когда

$$\omega_{нс}^2 > \frac{1}{\tau^2},$$

процесс принимает колебательную форму, в этом случае собственная круговая частота затухающих колебаний будет

$$\omega'' = \sqrt{\omega_{нс}^2 - \frac{1}{\tau^2}},$$

или

$$\xi = j\omega''.$$

Подставляем в уравнение (13, 184)

$$e^{\pm j\omega'' t} = \cos \omega'' t \pm j \sin \omega'' t;$$

тогда

$$Q = UC - U \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{2j\omega'' L} \left[\frac{(\cos \omega'' t + j \sin \omega'' t) \left(\frac{1}{\tau} + j\omega'' \right) - (\cos \omega'' t + j \sin \omega'' t) \left(\frac{1}{\tau} + j\omega'' \right)}{\left(\frac{1}{\tau} \right)^2 - (j\omega'')^2} \right];$$

по сокращении

$$Q = UC - U \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} 2j \left(\omega'' \cos \omega'' t + \frac{1}{\tau} \sin \omega'' t \right)}{2j\omega'' L \omega_{из}^2},$$

или

$$Q = UC - U \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\omega'' \cos \omega'' t + \frac{1}{\tau} \sin \omega'' t \right)}{\omega'' L \frac{1}{LC}}.$$

Обозначив

$$\beta = \arctg \frac{\omega''}{\frac{1}{\tau}},$$

получим

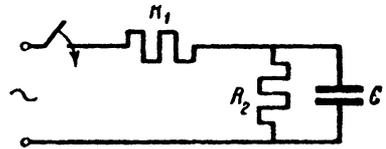
$$Q = UC - \frac{UC}{\omega''} \sqrt{\omega''^2 + \frac{1}{\tau^2}} \sin(\omega'' t + \beta) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

или

$$Q = UC - U \frac{\omega_{из}}{\omega''} C e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega'' t + \beta). \quad (13, 85)$$

Из вынужденного постоянного заряда UC во время переходного процесса вычитается синусоидально изменяющийся и постепенно исчезающий свободный заряд.

Для включения на переменное синусоидальное напряжение $u = U_m e^{j(\omega t + \alpha)}$ теорема разложения Хевисайда имеет следующую форму:



Фиг. 13, 45.

$$h = \frac{U_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{H(j\omega)} + \sum_1^n \frac{U_m e^{(\gamma_k t + j\alpha)}}{(\gamma_k - j\omega) \left(\frac{dH_\gamma}{d\gamma} \right)_{(\gamma=\gamma_k)}}. \quad (13, 186)$$

Первый член этого уравнения выражает вынужденную, а второй свободную составляющие. Приемы для определения отдельных членов уравнения те же, что и для случая постоянного напряжения.

В качестве примера на приложение этой теоремы рассмотрим изменение напряжения конденсатора при включении на переменное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

или в комплексной форме

$$U = U_m e^{j(\omega t + \psi)}$$

цепи, показанной на фиг. 13, 45.

Пользуясь приемами символического метода, мы можем выразить при посредстве оператора γ напряжение конденсатора следующим образом:

$$u_C = i \frac{R_2 \frac{1}{\gamma C}}{R_2 + \frac{1}{\gamma C}} = i \frac{R_2}{1 + \gamma C R_2} = \frac{u}{R_1 + \frac{R_2}{1 + \gamma C R_2}} \frac{R_2}{1 + \gamma C R_2},$$

или

$$u_C = \frac{u}{\frac{R_1}{R_2} + \gamma C R_1 + 1} = \frac{u}{H(\gamma)}.$$

Из характеристического уравнения

$$\frac{R_1}{R_2} + \gamma CR_1 + 1 = 0$$

определяем

$$\gamma = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = -\left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{R_1 C}\right).$$

В этом случае оператор γ имеет только один корень, поэтому второй член уравнения разложения состоит только из одного слагаемого. Производная в знаменателе этого члена

$$\frac{dH_\gamma}{d\gamma} = R_1 C,$$

а знаменатель первого члена уравнения

$$H_{(j\omega)} = \frac{R_1}{R_2} + j\omega CR_1 + 1,$$

следовательно,

$$u_C = \frac{U_m e^{j(\omega t + \psi)}}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + j\omega CR_1} + \frac{U_m e^{-\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right)t} e^{j\psi}}{\left(-\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_2 C} - j\omega\right) R_1 C};$$

$$u_C = \frac{U_m e^{j(\omega t + \psi)}}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + j\omega CR_1} - \frac{U_m e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + j\omega CR_1} e^{j\psi},$$

где

$$\tau_a = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}.$$

Заменяя, далее,

$$\frac{R_1}{R_2} + 1 + j\omega CR_1 = e^{j\varphi} \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + (\omega CR_1)^2},$$

получаем, переходя от показательной к тригонометрической форме,

$$u_C = \frac{U_m}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + (\omega CR_1)^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi) -$$

$$- \frac{U_m e^{-\frac{t}{\tau_a}}}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + (\omega CR_1)^2}} \sin(\psi - \varphi).$$

Это уравнение показывает, что свободное напряжение конденсатора, затухая по закону показательной функции, накладывается на синусоидальное вынужденное напряжение.

В случае сложных цепей уравнение для γ может быть выше второй степени. Решение подобных уравнений требует значительного количества вычислений. Далее, преобразование самого уравнения разложения после подстановки в него нескольких значений γ является достаточно сложным.

В подобных случаях, однако, часто можно ограничиться лишь составлением характеристического уравнения, что дает уже достаточно оснований для суждения о характере процесса.

Хевисайд предложил уравнения для переходного процесса также и при любом характере изменения напряжения, но изложение этих вопросов выходит за пределы данного курса.

ГЛАВА 14

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

14.1. Распространение переходных процессов в форме электромагнитных волн

До сих пор мы считали, что то или иное электромагнитное состояние или его изменение происходят одновременно во всей рассматриваемой цепи, т. е. мы предполагали, что электромагнитные процессы распространяются в цепях с бесконечно большой скоростью. Однако при изучении переходных (неустановившихся) процессов в целом ряде случаев оказывается необходимым считаться с тем, что скорость распространения электромагнитных процессов вдоль проводов на самом деле конечна. При этом самые цепи рассматриваются как цепи с распределенными постоянными, а распространение электромагнитных состояний как процесс распространения электромагнитной волны.

Особенности переходных процессов в цепях с распределенными постоянными определяются прежде всего законами распространения электромагнитных волн. В настоящей главе мы познакомимся с этими законами в пределах, необходимых для изучения основных видов переходных процессов, имеющих место при включении длинных линий и при их разряде.

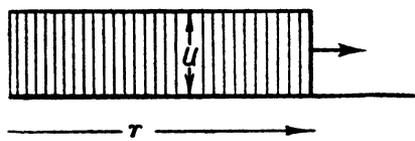
Возникающие при этом волны носят название коммутационных. Кроме коммутационных волн в длинных линиях возникают электромагнитные волны вследствие резких изменений атмосферного электрического поля (грозы). Перенапряжения, вызываемые этими волнами, часто представляют серьезную угрозу для электрических установок, так как они могут во много раз превосходить рабочее напряжение линии. Однако в настоящем курсе мы не будем останавливаться на рассмотрении этого типа волн.

Явления коммутационных волн в энергетических линиях передач мы можем рассматривать, предполагая напряжение источника постоянным. Такое право дает нам то обстоятельство, что скорость распространения электромагнитной волны (равная скорости света) настолько превосходит скорость изменения переменного напряжения источника тока, что напряжение последнего не успевает сколько-нибудь существенно изменить свою фазу за время полного затухания волн переходного процесса. В большинстве случаев поэтому можно считать, что напряжение за все время переходного процесса поддерживается неизменным, равным

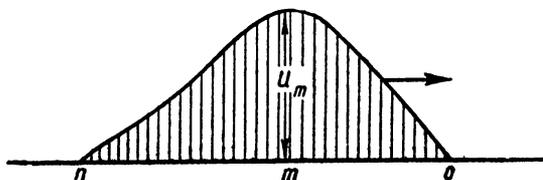
$$u = U_m \sin \alpha,$$

где α — фаза напряжения в момент начала переходного процесса. Эти соображения не относятся к телефонным и телеграфным линиям, питаемым токами высокой частоты.

Простейшей формой коммутационных волн, возникающих при постоянном напряжении источника тока, является прямоугольная волна, условное графическое изображение которой дано на фиг. 14,1. При прохождении прямоугольной волны напряжение у фронта волны увеличивается скачком от 0 до u ; это—волна с крутым вертикальным фронтом. Прямоугольная форма волны является предельным, практически недостижимым случаем, однако при первоначальном изучении распространения электромагнитных волн вдоль проводов мы ограничимся рассмотрением этого предельного случая ввиду упрощений математического анализа. К тому же получаемые при этом результаты удовлетворительны. В практических условиях фронт коммутационной волны сглаживается влиянием активного сопротивления проводов, искрой, возникающей при включении, вследствие чего напряжение и ток при распространении волны изменяются на ее фронт, хотя и очень резко, но все же не мгновенным скачком.



Фиг. 14, 1.



Фиг. 14, 2.

На фиг. 14,2 показана непрямоугольная волна. Такого рода волны часто возбуждаются атмосферными разрядами. На фиг. 14,2 часть волны от нуля до амплитуды принято называть фронтом волны, а часть от амплитуды до конца волны—хвостом волны. Чем меньше расстояние om от начала амплитуды волны и чем выше амплитуда, тем круче фронт волны. В случае прямоугольной волны фиг. 14,1 фронт волны вертикален.

14,2. Разряд линии без потерь

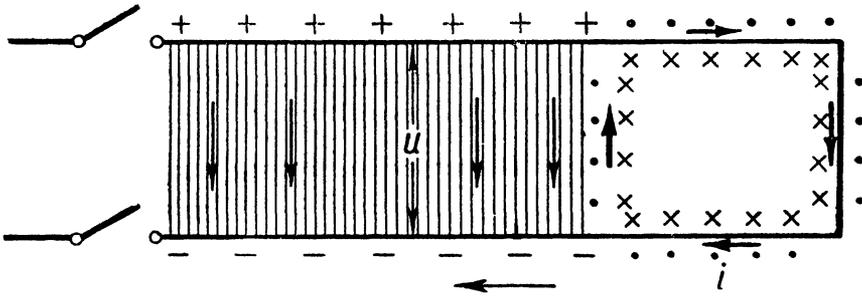
Исследование процессов в колебательном контуре мы начали с изучения контура без потерь, подобным же образом приступая к изучению переходных процессов в цепях с распределенными постоянными, мы ограничимся рассмотрением разряда и заряда линии без потерь, т. е. воображаемой линии, активное сопротивление проводов которой и утечка между этими проводами равны нулю.

Пусть двухпроводная линия была заряжена от некоторого источника тока до напряжения u , затем источник тока был выключен, а линия на конце замкнута накоротко (фиг. 14,3). Начиная от короткозамкнутого конца, линия постепенно разряжается,—положительные и отрицательные заряды¹ перемещаются к месту короткого замыкания; возникает разрядный ток, который в двух проводах линии имеет противоположное направление, так как движение отрицательных зарядов равносильно движению положительных зарядов в обратном направлении. Напряжение между проводами на разряженном участке линии исчезает, электрическое поле отступает, а на его месте вокруг проводов разряженного участка возникает магнитное поле тока, эта петля тока постепенно распространяется вдоль линии; цепь разрядного тока при этом замыкается током смещения в диэлектрике между

¹ Хотя положительный или отрицательный заряд определенного провода линии надо рассматривать как недостаток или избыток электронов в проводе по отношению к нейтральному состоянию проводника, но мы ради удобства изложения будем вести наше изложение, условно говоря о движении и положительных и отрицательных зарядов.

проводами, обусловленным изменением напряженности электрического поля.

Как видим, ток в линии образует своеобразную замкнутую цепь, имеющую форму петли, одна сторона которой быстро движется вдоль линии; позади фронта этой разрядной волны на линии нет напряжения и проходит разрядный ток, следовательно, здесь вся электромагнитная энергия сосредоточивается в магнитном поле тока. Перед фронтом волны нет тока, и линия заряжена полным напряжением—здесь вся электромагнитная энергия еще сосредоточена в электрическом поле. Фронт разрядной волны представляет собой грань между магнитным полем разряженной линии и электрическим полем ее еще заряженной части; в пространстве этот фронт является плоскостью (линии электрического и магнитного полей лежат в одной плоскости, как это показано на фиг. 14,4), перпендикуляр-



Фиг. 14,3.

ной к направлению проводов. Вдоль линии движется плоская разрядная волна.

Рассмотрим теперь основные уравнения этой волны и определим скорость ее движения.

Разрядный ток обуславливается уменьшением заряда линии

$$i = - \frac{dQ}{dt}.$$

Так как напряжение линии u — величина постоянная, а по мере движения волны изменяется емкость, участвующая в процессе, то $i = -u \frac{dC}{dt}$. Мы можем выразить емкость линии как произведение C_0 — емкости единицы длины линии на длину линии l :

$$C = C_0 l,$$

следовательно,

$$i = -u C_0 \frac{dl}{dt} = -u C_0 v \tag{14, 1}$$

так как производная пути по времени есть скорость $|v|$.

При исчезновении электрического поля на участке dl энергия электрического поля $\frac{u^2 C_0 dl}{2}$ этого участка поля должна превратиться в энергию вновь возникшего магнитного поля, равную $\frac{i^2 L_0 dl}{2}$, откуда

$$\frac{u^2 C_0 dl}{2} = \frac{i^2 L_0 dl}{2}, \tag{14, 2}$$

и следовательно,

$$i = \frac{u}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}. \tag{14, 3}$$

Величина $\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ носит название волнового сопротивления линии (при $R=0$) и обозначается Z_λ ¹.

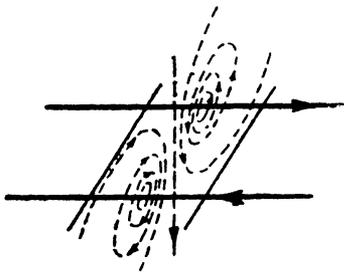
Подставляя выражение тока из (14,3) в (14,1), мы найдем, что

$$i = \frac{u}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} = -u C_0 v,$$

откуда

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \tag{14,4}$$

Как видим, скорость распространения волны определяется индуктивностью и емкостью длины линии. Для воздушных линий

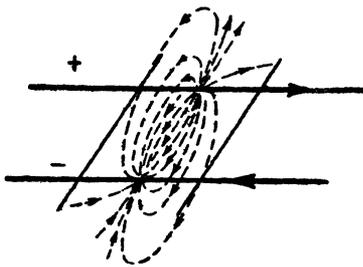


$$\left. \begin{aligned} L_0 &= 4 \ln \frac{a}{d} \cdot 10^{-4} \text{ Н/км}; \\ C_0 &= \frac{1}{4 \ln \frac{a}{d}} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-6} \text{ Ф/км}, \end{aligned} \right\} \tag{14,5}$$

следовательно, в воздушных линиях

$$v_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ км/сек} = c,$$

т. е. скорости света. Наличие твердого или жидкого диэлектрика в электрическом поле и железа в магнитном поле замедляет движение волны в $\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ раз².



$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} c. \tag{14,6}$$

Скачок напряжения u на фронте волны уравнивается э. д. с., возникающей вследствие изменения магнитного поля. В самом деле, при том условии, что волна распространяется со скоростью v за время dt , петля тока удлиняется на $dl = v dt$, вместе с чем увеличивается магнитный поток петли на $d\Phi = i L_0 dl = i L_0 v dt$.

Скорость изменения потока в петле при этом равна

$$\frac{d\Phi}{dt} = i L_0 v = i \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = i_0 Z_\lambda = u, \tag{14,7}$$

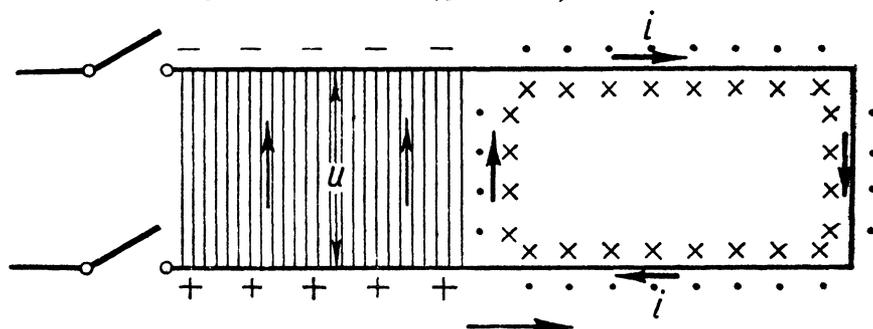
т. е. как раз напряжению заряженной части линии.

Определив основные уравнения процесса разряда линии, рассмотрим теперь его дальнейшие стадии. Разрядная волна достигает начала линии, уничтожив электрическое поле вдоль линии и создав вокруг ее проводов магнитное поле разрядного тока,—разряд закончился и разрядный ток—перемещение зарядов—должен прекратиться, так как линия у начала разомкнута. Но ток прекращается не сразу вдоль всей линии, а постепенно, начиная с ее разомкнутой стороны. При этом прекращение тока

¹ Ср. с выражением волнового сопротивления (характеристики) линии с распределенными постоянными (стр. 501) и с выражением волнового сопротивления колебательного контура (стр.) при $R=0$.

² Так как емкость возрастает в ϵ_r , а индуктивность в μ_r раз по сравнению с величинами, определенными по уравнениям (14,5), написанным в предположении, что $\epsilon_r = \mu_r = 1$.

и уничтожение его магнитного поля вызывают появление э. д. с. индуктивности, равной попержнему u , но имеющей противоположное направление, так как теперь петля тока не удлиняется, а укорачивается. Возникающая при исчезновении разрядного тока э. д. с. равна по величине первоначальному напряжению линии, но обратна по направлению. Распространяясь вдоль линии вслед за прекращающимся разрядным током, эта э. д. с. создает электрическое поле, в которое и переходит (без потерь, так как $R=0$) энергия магнитного поля тока; линия вновь заряжается до первоначальной разности потенциалов, но с изменением знака; таким образом во время этой стадии процесса вдоль линии от начала к короткозамкнутому концу движется зарядная волна, позади которой уже возникло электрическое поле, а перед ее фронтом еще существует магнитное поле разрядного тока. Теперь петля разрядного тока сокращается, отступая к короткозамкнутому концу линии (фиг. 14,5). Цепь тока опять замкнута



Фиг. 14, 5.

через токи смещения в диэлектрике. Конечно, скорость движения зарядной волны вдоль линии та же, что и определенная выше скорость первой разрядной волны.

Когда зарядная волна достигает конца линии, то вся энергия оказывается сосредоточенной в электрическом поле, но так как линия замкнута накоротко, то это электрическое поле, начиная от короткозамкнутого конца линии, опять распадается,—линия начинает снова разряжаться, новая разрядная волна распространяется от конца к началу линии, уничтожая электрическое поле и создавая поле магнитное.

Петля тока вновь растягивается от конца линии к ее началу. Но теперь заряды движутся в направлении, обратном их движению при первом разряде. Вторая разрядная волна достигает начала линии и так же, как первая разрядная волна, отражается от открытого конца линии в виде второй зарядной волны; последняя опять перезаряжает линию. Вторая зарядная волна несет с собой новую переменную знака зарядов, т. е. заряжает линию так же, как она была заряжена в начале процесса. Когда эта зарядная волна достигает конца линии, то вся линия оказывается заряженной так же, как перед началом разряда. Цикл процесса закончен, дальше он повторяется сначала. Так как потерь энергии нет, этот процесс может продолжаться неопределенно долго.

Как видим, процесс является колебательным, в линии происходит переход энергии из электрического поля в магнитное, и обратно, периодические разряд и заряд, подобные разряду и заряду колебательного контура с сосредоточенными постоянными. Полный цикл колебания в линии складывается из четырех стадий—четырех пробегов волны вдоль линии: волна разряжает линию, волна заражает линию в обратном направлении, волна опять разряжает линию и, наконец, волна заряжает линию в перво-

начальном направлении. Длительность полного цикла колебания T равна времени, нужному для того, чтобы волна четыре раза пробежала линию со скоростью v , следовательно,

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{L_0C_0}, \quad (14, 8)$$

заменяя

$$L_0 = L:l \text{ и } C_0 = C:l,$$

получаем

$$T = 4\sqrt{LC}$$

а собственная частота колебания

$$f = \frac{1}{4\sqrt{LC}}.$$

Напомним, что в цепи с сосредоточенными постоянными

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Энергия, сосредоточенная в линии, во время этого колебательного процесса остается неизменной, а распределение ее между магнитным и электрическим полями может быть выражено, например, для первой стадии процесса—разряда линии—следующим образом:

$$W = \text{const} = \frac{L_0 i^2 l_1}{2} + \frac{C_0 u^2 (l - l_1)}{2};$$

здесь l_1 обозначает длину части линии, пройденной разрядной волной, а так как эта длина равна произведению скорости волны на время t_1 , протекающее с момента начала разряда: $l_1 = vt_1$, то

$$W = \frac{L_0 i^2 vt_1}{2} + \frac{C_0 u^2 v \left(\frac{T}{4} - t_1 \right)}{2},$$

так как $l = v \frac{T}{4}$.

Последовательные стадии разряда линии, коротко замыкаемой на конце, показаны на графике фиг. 14,6.

14.3. Включение разомкнутой на конце линии без потерь на постоянное напряжение

Основные законы движения электромагнитных волн в линии при ее заряде будут, конечно, те же, что и при разряде линии. При включении на напряжение линия начинает заряжаться элемент за элементом, начиная с точек, ближайших к источнику тока; между проводами устанавливается разность потенциалов, равная напряжению источника тока, а вдоль линии растягивается петля зарядного тока, замыкающегося опять через ток смещения на фронте волны. Вдоль линии движется зарядная волна, создающая электрическое и магнитное поля, чем она отличается от волн, рассмотренных нами при разряде линии, фронт которых являлся границей между электрическим и магнитным полями. На фронте зарядной волны имеет место электрическое равновесие

$$u = -e_L = \frac{d\Phi}{dt} = iL_0 \frac{dl}{dt} = iL_0 v, \quad (14, 9)$$

а зарядный ток волны

$$i = \frac{dQ}{dt} = C_0 u v, \quad (14, 10)$$

на основании чего находим, что скорость движения волны, как и при разряде,

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (14, 11)$$

Равным образом соотношение между напряжением и током волны будет иметь уже знакомую нам форму закона Ома:

$$\frac{u}{i} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_\lambda. \quad (14, 12)$$

Отметим, что этот закон волнового сопротивления обуславливает равенство

$$\frac{C_0 u^2}{2} = \frac{L_0 i^2}{2}, \quad (14, 13)$$

т. е. зарядная волна сообщает одинаковый запас энергии электрическому и магнитному полям линии. По мере продвижения волны эта энергия растет согласно закону

$$W = \left(\frac{L_0 i^2}{2} + \frac{C_0 u^2}{2} \right) vt. \quad (14, 14)$$

Спустя время $t = l/v$ зарядная волна достигает конца линии, и зарядный ток должен прекратиться, но его исчезновение вызывает появление э. д. с. индуктивности, стремящейся поддержать ток, иными словами, при отражении зарядной волны от разомкнутого конца линии э. д. с. индуктивности изменяет знак, стремясь поддержать исчезающий зарядный ток, следовательно, эта э. д. с. уже совпадает по направлению с напряжением источника тока

$$e_L = L_0 i v = u,$$

благодаря чему у разомкнутого конца возникает напряжение, вдвое превышающее напряжение источника тока:

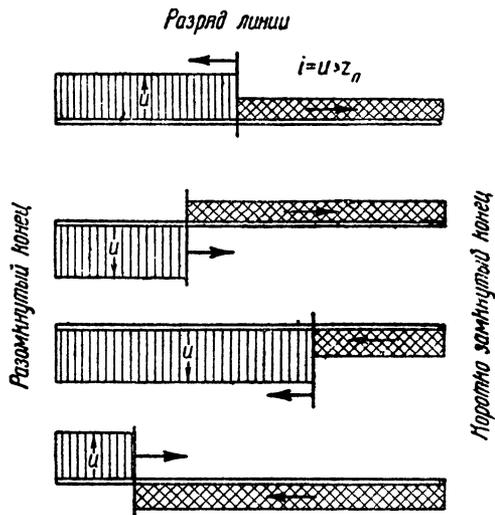
$$u_2 = u + e_L = 2u.$$

В виде отраженной зарядной волны это удвоенное напряжение начинает распространяться от конца линии к ее началу и перед фронтом этой отраженной волны, дозаряжающей линию до двойного напряжения, отступает, сокращаясь, петля зарядного тока; кинетическая энергия движения электрических зарядов благодаря прекращению движения превращается в потенциальную энергию; энергия магнитного поля переходит в энергию электрического поля.

Во время второй стадии процесса, при движении первой отраженной волны, энергия продолжает непрерывно и равномерно поступать в линию от источника тока

$$W = u i t,$$

причем за фронтом отраженной волны вся эта энергия сосредоточивается



Фиг. 14, 6.

в электрическом поле; когда эта волна спустя время $t = \frac{2l}{v}$ достигает начала линии, то в линии будет сосредоточена энергия

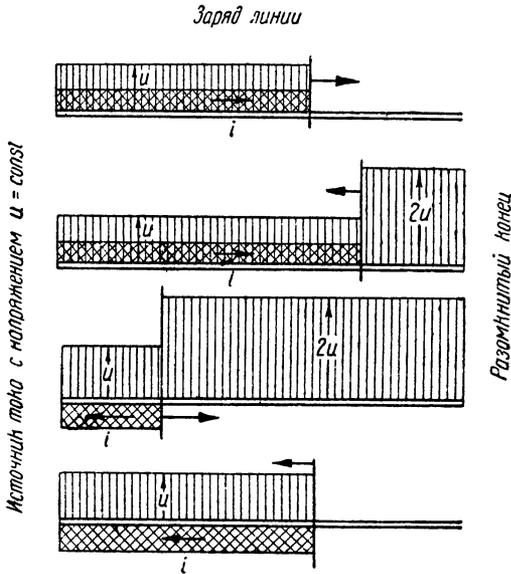
$$W = uit = ui \frac{2l}{v} = u (C_0 uv) \frac{2l}{v} = 4 \left(\frac{u^2 C_0 l}{2} \right) = 2 \left(\frac{L_0 i^2 v}{2} + \frac{C_0 u^2 v}{2} \right), \quad (14, 15)$$

т. е. эта энергия будет вчетверо больше энергии, накопленной в электрическом поле во время первой стадии процесса, и вдвое больше всей энергии, сосредоточившейся в линии во время первой стадии зарядки.

В то же время эта энергия равна, разумеется, энергии электрического поля при напряжении $2u$:

$$W = \frac{(2u)^2 C_0 l}{2}. \quad (14, 16)$$

Вторая стадия процесса заканчивается тогда, когда отраженная волна достигает начала линии. Так как в этот момент напряжение всей линии



Фиг. 14,7.

вдвое выше напряжения источника тока, то линия начинает разряжаться на источник тока, — в линии опять появляется ток. Но во время третьей стадии процесса — это уже разрядный ток, отнимающий у линии избыток заряда и снижающий таким образом разность потенциалов между проводами линии до напряжения источника тока.

Зарядная волна, отразившись от начала линии, стала разрядной волной. Эта новая волна движется от начала линии к ее концу, за ее фронтом растягивается петля разрядного тока, и разность потенциалов между проводами линии снижается до величины напряжения источника тока. Ток в линии переменяет направление, он направлен против напряжения источника тока, и мощность линии отрицательна.

Линия во время третьей стадии процесса равномерно возвращает энергию источнику тока:

$$W = u(-i)t = -C_0 u^2 vt = -2 \left(\frac{C_0 u^2}{2} \right) vt, \quad (14, 17)$$

и к моменту окончания третьей стадии процесса, когда падающая разрядная волна достигает конца линии, в источник тока вернется энергия

$$W = -2 \frac{C_0 u^2}{2} v \frac{l}{v} = -2 \frac{C_0 u^2 l}{2}.$$

В электрическом и магнитном полях линии после этого останется энергия

$$W = 4 \frac{C_0 u^2 l}{2} - 2 \frac{C_0 u^2 l}{2} = \frac{C_0 u^2 l}{2} + \frac{L_0 i^2 l}{2}, \quad (14, 18)$$

т. е. тот же запас энергии, который накопился в ней к концу первой стадии процесса.

Разряд линии до разности потенциалов u заканчивается, когда падающая волна достигает конца линии, после чего начинается четвертая ста-

для процесса—разряд линии до нуля напряжения. Разность потенциалов между проводами линии равна напряжению источника тока, и поэтому разряд линии должен был бы прекратиться, но прекращение разрядного тока вызывает э. д. с., стремящуюся поддержать этот ток в прежнем направлении:

$$e_L = -L_0 \dot{i}v = -u.$$

Эта э. д. с. обратна по направлению напряжению источника тока; в результате петля разрядного тока начинает стягиваться к источнику тока, отступая перед фронтом отраженной волны, но за фронтом этой волны в линии нет заряда,—исчезли электрическое и магнитное поля, вся энергия возвращена источнику тока. Мы можем указать, что падающая волна отразилась от разомкнутого конца, так же как и в конце первой стадии: волна тока переменяла знак, а волна напряжения свой отрицательный знак сохранила.

Когда последняя разрядная волна достигнет начала линии, то цикл будет закончен. В дальнейшем процесс повторяется опять сначала: вдоль линии от источника тока движется зарядная волна и т. д.

Как видим, заряд линии без потерь, так же как и ее разряд, представляет собой бесконечный колебательный процесс с длительностью периода

$$T = \frac{4l}{v}.$$

На фиг. 14,7 показаны состояния линии на четырех последовательных стадиях заряда.

14.4. Падающие и отраженные волны

Переходные процессы в линиях с распределенными постоянными часто удобно рассматривать как результат последовательного наложения падающих и отраженных волн напряжения и тока.

Математическое обоснование этого способа исследования процессов заключается в следующем:

Для переходных волн напряжения и тока мы можем составить те же дифференциальные уравнения, которые мы уже применяли при изучении установившихся процессов в длинных линиях. Вдоль линии от источника тока к нагрузке напряжение постепенно изменяется, на отрезке dx это изменение будет

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx = iR_0 dx + \frac{\partial i}{\partial t} L_0 dx, \quad (14, 19)$$

где R_0 и L_0 обозначают активное сопротивление и индуктивность единицы линии.

На этом же участке благодаря уходящим через изоляцию токам утечки и смещения ток в линии изменяется на

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = u g_0 dx + \frac{\partial u}{\partial t} C_0 dx, \quad (14, 20)$$

где g_0 и C_0 —активная проводимость и емкость единицы длины линии.

Благодаря очень большой скорости движения волны вторые члены в приведенных уравнениях настолько относительно велики, что для исследования ряда вопросов можно пренебречь первыми членами, т. е. пренебречь влиянием активного сопротивления и утечки через изоляцию. Тогда, полагая $R_0 = g_0 = 0$, получаем

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (14, 21)$$

Дифференцируя эти уравнения по x и по t , получаем

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}; \quad -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = L_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}; \quad -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Производя подстановку и обозначая

$$\frac{1}{L_0 C_0} = v^2,$$

получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (14, 22)$$

и

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.$$

Согласно общему решению подобных уравнений, данному Даламбером, мы получаем для напряжения следующее решение:

$$u = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \quad (14, 23)$$

где f_1 и f_2 обозначают функции, определяемые из начальных и конечных условий исследуемой системы¹.

Подобное же уравнение мы могли бы составить и для тока, но, для того чтобы не вводить две новые функции f_3 и f_4 , целесообразнее получить уравнение тока путем подстановки значения u из уравнения (14, 23) в (14, 21):

$$\frac{\partial i}{\partial t} = C_0 v \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right); \quad (14, 24)$$

заменив $v = \frac{1}{L_0 C_0}$ и проинтегрировав, получим уравнение тока

$$i = \frac{f_1(x - vt) - f_2(x + vt)}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}. \quad (14, 25)$$

Мы уже встречались с выражением $f(x - vt)$ (стр. 467), оно представляет собой уравнение волны, движущейся со скоростью v от начала к концу линии; если в момент t_k в точке x_k мгновенное значение волны

$$k = f_1(x_k - vt_k),$$

то это же значение спустя время Δt она будет иметь в точке, отстоящей от начала линии на расстояние $x_k + \Delta x$, определяемое условием $(x_k - vt_k) = (x_k + \Delta x - v(t_k + \Delta t))$ или $\Delta x = v\Delta t$. Выражение $f_2(x + vt)$ определяет волну, движущуюся в обратном направлении, от конца к началу линии.

Следовательно, волны в линиях при переходных процессах мы можем, так же как и при стационарном режиме переменного тока, рассматривать как результат последовательного наложения движущихся в противоположном направлении падающих и отраженных волн:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{над} + u_{отп}; \\ i &= i_{над} + i_{отп}; \end{aligned} \right\} \quad (14, 26)$$

так как

$$\left. \begin{aligned} u_{над} &= f_1(x - vt); \quad u_{отп} = f_2(x + vt), \\ i_{над} &= \frac{f_1(x - vt)}{Z_\lambda}; \quad i_{отп} = -\frac{f_2(x + vt)}{Z_\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (14, 27)$$

¹ Припомним, что подобное уравнение мы уже имели для волны в длинной линии при установившемся рабочем процессе.

то, следовательно,

$$u_{над} = i_{над} Z_{\lambda} \quad \text{и} \quad u_{отр} = -i_{отр} Z_{\lambda}, \quad (14, 28)$$

т. е. напряжение и ток отраженной волны противоположны по знаку.

Таким образом длительный переходный процесс в цепи с распределенными постоянными можно рассматривать как последовательное наложение нескольких падающих и отраженных волн:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum u_{над} + \sum u_{отр}; \\ i &= \sum i_{над} + \sum i_{отр}, \end{aligned} \right\} \quad (14, 29)$$

причем число слагаемых изменяется в зависимости от рассматриваемой стадии процесса.

Пользуясь таким методом, явления при включении линии на напряжение можно представлять себе в следующей форме:

Первая зарядная падающая волна, созданная источником тока, складывается из волны напряжения $u_{над1} = u$ и волны тока $i_{над1} = i$. Она отражается от разомкнутого конца линии, причем волна напряжения, отражаясь, сохраняет свой знак: $u_{отр1} = u$, а волна тока меняет его на обратный: $i_{отр1} = -i$. Таким образом за фронтом первой отраженной волны напряжение в линии будет

$$u_{\lambda} = u_{над1} + u_{отр1} = u + u = 2u,$$

а ток

$$i_{\lambda} = i_{над1} + i_{отр1} = 0.$$

Названная волна отражается от источника тока, причем волна напряжения меняет свой знак на обратный: $u_{над2} = -u$, а волна тока его сохраняет: $i_{над2} = -i$. Таким образом в результате наложения трех волн за фронтом второй падающей волны напряжение в линии

$$u_{\lambda} = u_{над1} + u_{отр1} + u_{над2} = 2u + (-u) = u,$$

а ток в линии

$$i_{\lambda} = i_{над1} + i_{отр1} + i_{над2} = 0 + (-i) = -i.$$

Эта волна отражается от разомкнутого конца линии, причем волна напряжения опять сохраняет свой знак: $u_{отр2} = -u$, а волна тока меняет его на обратный: $i_{отр2} = i$.

За фронтом второй отраженной волны напряжение в линии

$$u_{\lambda} = u_{над1} + u_{отр1} + u_{над2} + u_{отр2} = u + (-u) = 0.$$

Ток в линии

$$i_{\lambda} = i_{над1} + i_{отр1} + i_{над2} + i_{отр2} = -i + i = 0.$$

В дальнейшем процесс циклически повторяется, за фронтом третьей падающей волны напряжение в линии и ток вновь будут

$$u_{\lambda} = u_{над1} + u_{отр1} + u_{над2} + u_{отр2} + u_{над3} = u;$$

$$i_{\lambda} = i_{над1} + i_{отр1} + i_{над2} + i_{отр2} + i_{над3} = i$$

и. т. д.

14.5. Включение короткозамкнутой линии

При включении короткозамкнутой линии на постоянное напряжение процесс начинается совершенно так же, как при включении разомкнутой линии, — вдоль линии со скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ движется зарядная волна, за фронтом которой линия заряжена до разности потенциалов, и по ней

проходит зарядный ток $i = u : Z_\lambda$. Цепь последнего замыкается через ток смещения.

Спустя время $t = l : v$ зарядная волна достигает короткозамкнутого конца линии. Здесь электрическое поле распадается — между короткозамкнутыми точками напряжение должно быть равно нулю, а так как вместе с тем согласно вышесказанному это напряжение должно быть равно сумме напряжений падающей и отраженной волн, то, следовательно,

$$0 = u_{пад1} + u_{отр1}, \quad (14, 30)$$

а так как $u_{пад1} = u$, то напряжение отраженной волны, движущейся от короткозамкнутого конца, будет

$$u_{отр1} = -u_{пад1} = -u.$$

Отраженная волна напряжения создает отраженную волну тока

$$i_{отр1} = -\frac{u_{отр1}}{Z_\lambda} = \frac{u}{Z_\lambda} = i,$$

и таким образом ток в линии после отражения волны будет

$$i_{пад1} + i_{отр1} = i + i = 2i. \quad (14, 31)$$

Волна тока отразилась от короткозамкнутого конца линии, сохранив свой знак, а волна напряжения при этом отражении свой знак переменяла.

Мы можем описать процесс отражения волн от короткозамкнутого конца линии также следующим образом:

Когда падающая зарядная волна достигает конца линии, тогда зарядный ток i , замыкавшийся до тех пор через ток смещения в диэлектрике, замыкается через проводник, закорачивающий линию, и в дальнейшем указанный ток поддерживается неизменным за счет непрерывного поступления зарядов от источника тока. Но кроме этого тока i , цепь которого захватывает всю линию, у короткозамкнутого конца возникает и распространяется к началу линии разрядный ток, создающийся благодаря распаду электрического поля, при разряде ее через короткозамкнутый конец. Этот разрядный ток создается за счет энергии электрического поля, которая во время первой стадии процесса в каждой единице длины линии была равна энергии магнитного поля:

$$\frac{C_0 u^2}{2} = \frac{L_0 i^2}{2};$$

так как потерь нет, то, следовательно, разрядный ток должен быть равен зарядному по величине, кроме того, он совпадает с зарядным током по направлению.

Итак, первая падающая волна, отразившись от короткозамкнутого конца линии, образовала разрядную волну, движущуюся от конца линии к ее началу; за фронтом этой волны напряжение исчезло, а ток удвоился, и вся энергия сосредоточилась в магнитном поле:

$$W = \frac{L_0 (2i)^2}{2}.$$

Во время движения первых падающей и отраженной волн источник тока, работающий на короткозамкнутую линию, нагружен неизменной мощностью $u \cdot i$, т. е. такой же мощностью, как при включении разомкнутой линии.

Спустя время $t = \frac{2l}{v}$ с момента включения отраженная волна достигнет источника тока и, отразившись от него, образует вторую па-

дающую волну. Напряжение и ток у этой отраженной волны можно определить так:

В начале линии источник тока поддерживает неизменное напряжение u , и следовательно, этому напряжению должна быть равна сумма напряжений первых падающей и отраженной волн и второй падающей волны:

$$u_{пад1} + u_{отр1} + u_{пад2} = u;$$

и так как

$$u_{пад1} + u_{отр1} = 0,$$

то, следовательно,

$$u_{пад2} = u.$$

Эта волна напряжения создает новую волну зарядного тока

$$i_{пад2} = \frac{u_{пад2}}{Z_{\lambda}} = i.$$

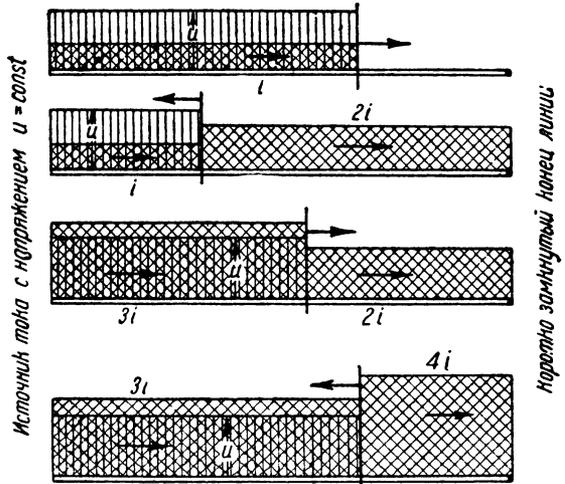
Таким образом в короткозамкнутой линии волны отражаются от источника тока согласно уже вышевыведенному правилу, именно, волна напряжения отражается от источника тока, изменив свой знак:

$$u_{отр1} = -u; \quad u_{пад2} = u,$$

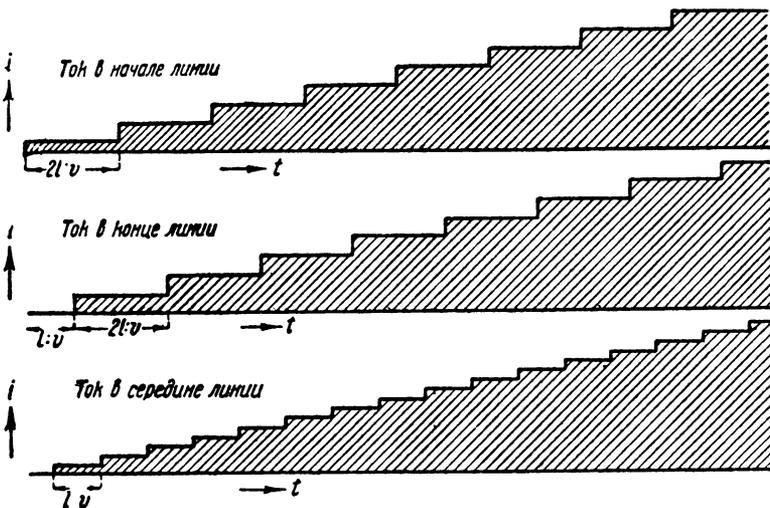
а волна тока при этом отражении свой знак сохраняет

$$i_{отр1} = i; \quad i_{пад2} = i.$$

В результате отражения от источника тока идет новая зарядная волна, которая движется к концу линии. Напряжение и ток за фронтом этой волны представляют собой



Фиг. 14, 8.



Фиг. 14, 9.

результат наложения двух падающих зарядных волн и одной отраженной разрядной волны.

$$u_{над1} + u_{отр1} + u_{над2} = u - u + u = u;$$

$$i_{над1} + i_{отр1} + i_{над2} = i + i + i = 3i.$$

Во время этой третьей стадии процесса источник тока поддерживает ток короткого замыкания $2i$ и, кроме того, зарядный ток i , на это источник тока затрачивает мощность $p = 3ui$.

Цепь тока короткого замыкания $2i$ охватывает источник тока и всю линию; цепь зарядного тока, замыкаясь через ток смещения, постепенно растягивается от источника тока за фронтом падающей волны, стремясь охватить всю линию.

Дальнейшая картина процесса ясна: вторая зарядная волна, отразившись от короткозамкнутого конца линии, превратится в разрядную волну. Волна напряжения при этом переменит свой знак ($u_{отр2} = -u$), а волна тока его сохранит ($i_{отр2} = i$). За фронтом второй отраженной волны ток будет равен $4i$, а напряжение равно нулю. Затем у источника тока после отражения возникает третья падающая зарядная волна, которая повысит ток до $5i$ и т. д. На фиг. 14,8 показаны последовательные стадии распространения волн.

Ток в начале линии растет, начиная с величины i , по ступенчатой кривой, увеличиваясь через интервалы $t = \frac{2l}{v}$ на величину $2i$ ($i, 3i, 5i, 7i, \dots$), ток в конце линии увеличивается по такой же ступенчатой кривой, начиная с нуля ($0, 2i, 4i, 6i, \dots$), наконец, в середине линии ток нарастает через интервалы $t = \frac{l}{v}$ по ступенчатой кривой: $0, i, 2i, 3i, 4i, 5i, 6i, \dots$ (фиг. 14,9).

Как видим, источник тока стремится установить в короткозамкнутой линии свое напряжение u , посылая для этого одна за другой зарядные волны, но каждый раз отраженная разрядная волна от места короткого замыкания разрушает электрическое поле и, увеличив нагрузку источника тока, заставляет его посылать новый дополнительный зарядный ток.

Ток короткого замыкания в линии без потерь с распределенными индуктивностью и емкостью растет по ступенчатой кривой, стремясь к бесконечности. Наличие активного сопротивления в линии вызывает прогрессивное уменьшение скачков тока и в пределе ток короткого замыкания линии с активным сопротивлением стремится к величине, определяемой законом Ома:

$$i = \frac{u}{R}.$$

14,6. Включение линии, замкнутой на сопротивление

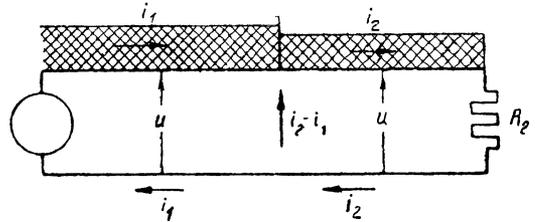
При включении на постоянное напряжение линии, замкнутой на сопротивление (R_2), процесс в начале, во время движения первой зарядной волны от источника тока, протекает совершенно так же, как и при включении разомкнутой или короткозамкнутой линии: первая падающая волна распространяется вдоль всей линии, заряжая ее до напряжения $u = u_{над1}$ и создавая в ней ток $i = i_{над1}$. Но, достигнув конца линии, волна отражается от сопротивления R_2 . Мы должны теперь остановиться на законах этого отражения. В случае разомкнутой линии (что соответствует бесконечно большому значению сопротивления R_2) при отражении волна напряжения сохраняет свой знак, а волна тока его меняет, в случае же короткозамкнутой линии ($R_2 = 0$) волна напряжения меняет свой знак, а волна тока его сохраняет. Поэтому естественно предположить, что при

включении линии, замкнутой на активное сопротивление R_2 (фиг. 14, 10), величины и знак отраженных волн напряжения и тока зависят от сопротивления R_2 , и в зависимости от значения последнего высота отраженной волны может быть больше или меньше, и кроме того, волна может сохранить или переменить свой знак. Наконец, можно предполагать, что при некотором определенном значении R_2 отраженные напряжения и ток должны быть равны нулю.

Нетрудно найти аналитические выражения этой зависимости. Напряжение между проводами линии u' после отражения волны должно быть равно напряжению на сопротивлении R_2 , и кроме того, оно должно быть равно сумме напряжений падающей и отраженной волн, следовательно,

$$u' = i_2 R_2 = u_{над1} + u_{отр1} = u + u_{отр1}. \quad (14, 32)$$

После отражения зарядной волны от конца линии в замыкающем линию сопротивлении R_2 устанавливается ток i_2 , а от конца к началу линии распространяется отраженная волна, устанавливающая в линии ток, равный i_2 , при этом у фронта отраженной волны между проводами будет проходить ток смещения, равный разности $i_2 - i$ (фиг. 14, 10). Итак, за фронтом отраженной волны ток в линии i' должен быть равен току в замыкающем сопротивлении и в то же время сумме токов падающей и отраженной волн:



Фиг. 14, 10.

$$i' = i_2 = i_{над1} + i_{отр1}, \quad (14, 33)$$

на основании чего

$$i_{отр1} = i_2 - i_{над1} = i_2 - i, \quad (14, 34)$$

а напряжение отраженной волны

$$u_{отр1} = -i_{отр1} \cdot Z_\lambda = -i_2 Z_\lambda + i Z_\lambda. \quad (14, 35)$$

Следовательно, на основании уравнений (14, 32) и (14, 35)

$$\left. \begin{aligned} i_2 R_2 = u + (-i_2 Z_\lambda + i Z_\lambda) = 2u - i_2 Z_\lambda, \\ \text{или} \\ i_2 = \frac{2u}{R_2 + Z_\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (14, 36)$$

Напряжение отраженной волны по (14, 35) и (14, 36)

$$u_{отр1} = u - \frac{2u Z_\lambda}{R_2 + Z_\lambda} = u \frac{R_2 - Z_\lambda}{R_2 + Z_\lambda} = uq = u_{над1} q. \quad (14, 37)$$

Наконец, ток отраженной волны

$$i_{отр1} = -\frac{u_{отр1}}{Z_\lambda} = -\frac{u_{над1}}{Z_\lambda} q = -i_{над1} q. \quad (14, 38)$$

Коэффициент

$$q = \frac{R_2 - Z_\lambda}{R_2 + Z_\lambda}, \quad (14, 39)$$

носящий название коэффициента отражения, показывает, в какой части падающая волна отражается от сопротивления R_2 .

При $q = 1$ (что имеет место при $R_2 = \infty$) волна отражается полностью. При $R_2 > Z_\lambda$, когда устанавливающийся в линии после отражения ток i_2 меньше зарядного тока i , энергия электрического поля в линии увеличивается за счет уменьшения энергии магнитного поля: напряжение в линии повышается, от конца линии распространяется отраженная зарядная волна. В этом случае отраженная волна напряжения сохраняет знак падающей волны, а волна тока знак меняет.

При $R_2 < Z_\lambda$ ток в линии после отражения зарядной волны должен увеличиться, так как $i_2 > i$. Соответствующее увеличение магнитного поля тока в линии происходит за счет ослабления электрического поля. Напряжение за фронтом отраженной волны падает, а ток увеличивается: от конца линии распространяется отраженная разрядная волна. В этом случае при отражении волна напряжения меняет знак, а волна тока знак сохраняет.

Наконец, при $R_2 = Z_\lambda$ отраженные напряжения и ток равны нулю, $i_2 = i$, и напряжение на замыкающем сопротивлении $i_2 R_2 = u$. Переходный процесс заканчивается, как только падающая волна достигает конца линии, так как электрическое и магнитное поля линии при установившемся режиме должны быть такими же, какими их создала первая падающая зарядная волна.

На основании полученных нами соотношений нетрудно проследить, как протекает в дальнейшем переходный процесс при $R_2 \neq Z_\lambda$.

Первую отраженную волну, когда она достигнет источника тока, сменит вторая падающая волна, вновь устанавливающая в линии напряжение источника тока. Как мы уже видели, при отражении от источника тока волна напряжения, сохраняя свою величину, меняет свой знак, а волна тока свой знак сохраняет, следовательно, напряжение и ток второй падающей волны будут

$$u_{над 2} = -u_{отр 1} = -uq; \quad i_{над 2} = i_{отр 1} = -iq. \quad (14, 40)$$

Вторая падающая волна отразится от R_2 совершенно так же, как отразилась первая волна, следовательно,

$$u_{отр 2} = u_{над 2} q = -uq^2; \quad i_{отр 2} = -i_{над 2} q = iq^2.$$

Подобным же образом мы находим, что после отражения от источника тока

$$u_{над 3} = -u_{отр 2} = uq^2; \quad i_{над 3} = i_{отр 2} = iq^2,$$

а после нового отражения от сопротивления R_2

$$u_{отр 3} = u_{над 3} q = uq^3; \\ i_{отр 3} = -i_{над 3} q = -iq^3,$$

подобным же образом находим, что четвертая падающая и отраженная волны будут:

$$u_{над 4} = -u_{отр 3} = -uq^3; \quad i_{над 4} = i_{отр 3} = -iq^3; \\ u_{отр 4} = u_{над 4} q = -uq^4; \quad i_{отр 4} = i_{над 4} q = iq^4.$$

Во время распространения этих волн в линии в любой стадии процесса напряжение и ток за фронтом волны равны сумме напряжений и токов всех волн, прошедших с момента начала процесса через рассматриваемый участок линии. Например, напряжение за фронтом четвертой отраженной волны будет равно сумме

$$u_{над 1} + u_{отр 1} + u_{над 2} + u_{отр 2} + u_{над 3} + u_{отр 3} + \\ + u_{над 4} + u_{отр 4} = u + uq - uq - uq^2 + uq^2 + \\ + uq^3 - uq^3 - uq^4 = u - uq^4, \quad (14, 41)$$

а ток за фронтом этой волны будет

$$i_{над1} + i_{отр1} + i_{над2} + i_{отр2} + i_{над3} + i_{отр3} + i_{над4} + i_{отр4} = i - iq - iq + iq^2 + iq^2 - iq^3 - iq^3 + iq^4. \quad (14, 42)$$

Так как при конечных значениях R_2 ($R_2 \neq 0$ и $R_2 \neq \infty$) коэффициент отражения $q < 1$, то, следовательно, падающие и отраженные волны постепенно уменьшаются по величине, стремясь в пределе к нулю. Этот затухающий процесс носит колебательный характер, так как волны периодически изменяют величину и направление, причем период этого колебания $T = \frac{4l}{v}$.

4.7. Включение линии, замкнутой на сопротивление и индуктивность

В этом случае, так же как и в предыдущем, за фронтом отраженной волны напряжение линии должно быть равно с одной стороны, сумме напряжений падающей и отраженной волн, с другой стороны, сумме напряжения на сопротивлении R_2 и напряжения, уравнивающего э. д. с. индуктивности L_2 , т. е.

$$u_{л} = u_{над1} + u_{отр1} = u + u_{отр1} = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (14, 43)$$

Ток в линии за фронтом отраженной волны

$$i_{л} = i_2 = i_{над1} + i_{отр1} = i + i_{отр1}, \quad (14, 44)$$

причем ток отраженной волны $i_{отр1} = i_2 - i$; следовательно,

$$u_{отр1} = -i_{отр1} Z_{\lambda} = -i_2 Z_{\lambda} + i Z_{\lambda} = u - i_2 Z_{\lambda}; \quad (14, 45)$$

на основании уравнений (14, 43) и (14, 45)

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 2u - i_2 Z_{\lambda}. \quad (14, 46)$$

Для упрощения интегрирования этого уравнения мы можем считать, что ток за фронтом отраженной волны равен сумме вынужденного и свободного токов:

$$i_2 = i_2' + i_2'',$$

причем вынужденным мы считаем не тот ток, который установится в линии и нагрузке по окончании всего переходного процесса, т. е. не ток, равный $\frac{u}{R}$, а то значение тока i_2 , которое удовлетворяет уравнению (14, 46) при $L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$. Таким образом мы определяем вынужденный ток из уравнения

$$i_2' R_2 = 2u - i_2' Z_{\lambda};$$

$$i_2' = \frac{2u}{R_2 + Z_{\lambda}}. \quad (14, 47)$$

Тогда для свободного тока имеем уравнение

$$i_2'' R_2 + L_2 \frac{di_2''}{dt} = -i_2'' Z_{\lambda}; \quad (14, 48)$$

интегрируя это уравнение, получаем

$$i_2'' = K e^{-\frac{R_2 + Z_{\lambda}}{L_2} t}. \quad (14, 49)$$

Как в этом уравнении, так и во всех следующих мы время t отсчитываем от момента, когда первая падающая волна дошла до конца линии. Постоянную интегрирования K определяем из начальных условий: в момент $t=0$ ток в индуктивности L_2 , а значит и в линии должен быть равен нулю:

$$i_{л0} = 0 = i'_{20} + i_{20}'' = \frac{2u}{R_2 + Z_\lambda} + K, \tag{14, 50}$$

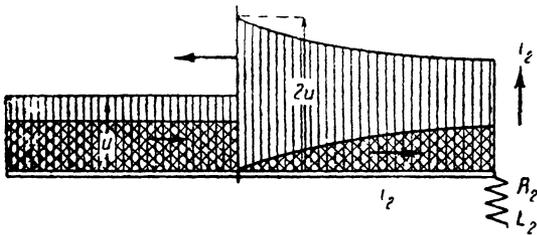
на основании чего

$$i_2'' = -\frac{2u}{R_2 Z_\lambda} e^{-\frac{R_2 + Z_\lambda}{L_2} t}; \tag{14, 51}$$

$$i_2 = \frac{2u}{R_2 + Z_\lambda} (1 - e^{-\frac{R_2 + Z_\lambda}{L_2} t}) = \frac{2u}{R_2 + Z_\lambda} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \tag{14, 52}$$

Ток в нагрузке в первый момент отражения равен нулю и затем увеличивается по закону показательной функции, приближаясь асимптотически к значению $\frac{2u}{R_2 + Z_\lambda}$. При этом постоянная времени будет

$$\tau = \frac{L_2}{R_2 + Z_\lambda}. \tag{14, 53}$$



Фиг. 14, 11.

Отметим, что в уравнении тока волновое сопротивление играет ту же роль, что и активное сопротивление. Это объясняется тем, что волновое сопротивление

подобно активному сопротивлению ограничивает величину тока, а также тем, что мощность падающей волны, идущая на создание поля падающей волны, равна $i^2 Z_\lambda$.

Когда отраженная волна достигает какой-либо точки линии, ток в этой точке линии сначала падает до нуля, а затем постепенно повышается по мере продвижения отраженной волны (фиг. 14, 11).

На основании уравнений (14, 43) и (14, 52) определяем напряжение у нагрузки после отражения первой волны

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda &= u_{над1} + u_{отп1} = u - i_{отп1} Z_\lambda = u + i Z_\lambda - i_2 Z_\lambda = 2u - i_2 Z_\lambda; \\ u_\lambda &= 2u \left[1 - \frac{Z_\lambda}{R_2 + Z_\lambda} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right]. \end{aligned} \right\} \tag{14, 55}$$

Последнее уравнение показывает, что в первый момент после отражения напряжение в конце линии удваивается, а затем постепенно понижается согласно закону показательной функции. Это изменение напряжения распространяется вдоль линии вместе с отраженной волной.

Индуктивность в цепи, замыкающей линию, не допускает мгновенного появления тока, по этой причине в первый момент зарядная волна, дойдя до конца линии, полностью отражается, как в случае разомкнутой линии, ток прерывается, а напряжение удваивается. Затем индуктивность начинает пропускать ток, последний плавно увеличивается и, частично разряжая линию, заставляет снижаться напряжение. В пределе последнее должно было бы достигнуть величины

$$u_\lambda(t = \infty) = 2u \frac{R_2}{R_2 + Z_\lambda}, \tag{14, 56}$$

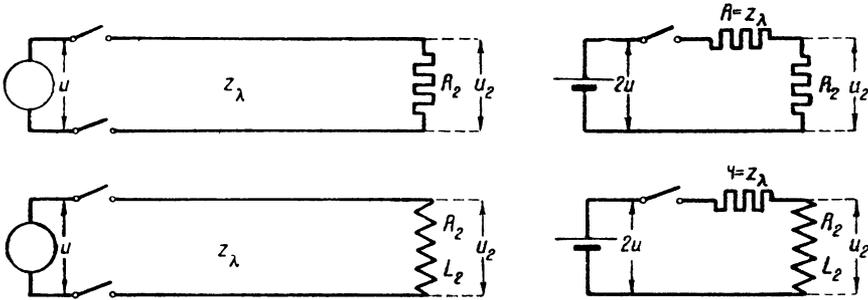
если бы вслед за первой падающей волной не следовали вторая, третья и т. д. падающие волны, возникающие при достижении отраженными волнами начала линии.

Вследствие набегания новых волн напряжение в конце будет стремиться к напряжению источника (мы считаем $U = \text{const}$ и сопротивление линии равным нулю).

14,8. Схема замещения цепей с распределенными постоянными. Правило Петерсена-Пфиффера

В случае линии, замкнутой на активное сопротивление, уравнение для тока и напряжения было

$$2u = i_2 Z_\lambda + i_2 R_2, \tag{14,57}$$



Фиг. 14, 12.

случае цепи, замкнутой на активное сопротивление и индуктивность

$$2u = i_2 Z_\lambda + i_2 R_2 + L \frac{di_2}{dt}, \tag{14, 58}$$

или в общем виде для обоих случаев

$$2u = i_2 Z_\lambda + u_2. \tag{14, 59}$$

В обоих случаях уравнения имеют ту же форму, что и для переходных процессов в цепи с сосредоточенными постоянными, в которой волновое сопротивление замещено равным по величине активным сопротивлением, а напряжение источника тока в схеме с сосредоточенными постоянными вдвое больше напряжения источника тока, питающего линию.

Таким образом уравнения напряжения и тока в конце длинной линии могут быть в рассмотренных случаях составлены на основании соответствующих схем замещения (фиг. 14, 12). По этому же принципу могут быть составлены схемы замещения для условий включения линии, замкнутой на любую цепь с сосредоточенными постоянными. Независимо от характера замыкающей цепи после отражения первой падающей волны напряжение в конце линии будет, так же как в вышерассмотренных частных случаях,

$$u_\lambda = u_{над1} + u_{отр1} = u + u_{отр1},$$

а ток

$$i_\lambda = i_2 = i_{над1} + i_{отр1} = i + i_{отр1}.$$

Но

$$u_{отр1} = -i_{отр1} Z_\lambda = u - i_2 Z_\lambda,$$

и следовательно,

$$u_\lambda = 2u - i_2 Z_\lambda; \tag{14, 60}$$

а так как напряжение в конце линии должно быть равно u_2 — напряжению замыкающей линию цепи, то после отражения первой волны в конце линии будет иметь место напряжение

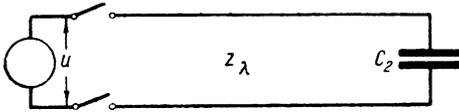
$$u_2 = 2u - i_2 Z_\lambda.$$

Это указывает на то, что выражение

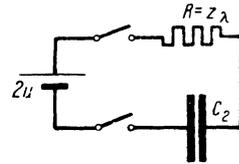
$$2u = i_2 Z_\lambda + u_2$$

является общим для любого вида нагрузки линии.

Это уравнение показывает, что в конце линии после отражения падающей волны напряжение (u_2) и ток (i_2) изменяются совершенно так же, как в цепи с сосредоточенными постоянными при включении на напряжение, равное удвоенному напряжению падающей волны; при этом волновое сопротивление линии замещается в схеме с сосредоточенными постоянными равным по величине активным сопротивлением. В этом и заключается правило Петерсена-Пфифнера построения схем замещения длинных линий. Указанное правило может быть также сформулировано



Фиг. 14, 13.



Фиг. 14, 14.

следующим образом: напряжения и токи, возникающие в конце линии и в замыкающей цепи, могут быть определены на основании схемы замещения, в которой волновые сопротивления заменены равными по величине активными сопротивлениями, а напряжение источника тока равно удвоенному напряжению падающей волны.

Составление уравнений напряжений и токов для схем замещения линий проводится так же, как это описано в предыдущей главе для цепей с сосредоточенными постоянными; в частности, для сложных схем удобно пользоваться операторным исчислением.

Уравнения изменения напряжений и токов в схеме замещения соответствуют условиям в линии лишь до момента набегания на рассматриваемый участок новой волны, отразившейся, например, от источника тока. Для расчета дальнейшего изменения напряжений и токов можно применить правило Петерсена-Пфифнера лишь в соединении с принципом наложения: на процесс, вызванный первой волной, налагаются процессы, возникающие при отражении второй и следующих отраженных волн.

14,9. Включение линии, замкнутой на емкость

Применим правило Петерсена-Пфифнера к частному случаю, когда на напряжение u включается линия, замкнутая на емкость C_2 (фиг. 14,13). Согласно правилу Петерсена-Пфифнера в соответствующей схеме замещения волновое сопротивление Z_λ должно быть замещено равным по величине активным сопротивлением R (фиг. 14,14). Уравнение напряжений для этой схемы замещения будет

$$u_C + iR = 2u,$$

или

$$u_C + RC_2 \frac{du_C}{dt} = 2u;$$

оно складывается из уравнений вынужденного и свободного процессов:

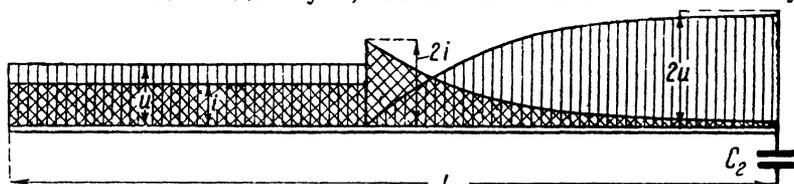
$$u'_C + RC_2 \frac{du'_C}{dt} = 2u; \quad u''_C + RC_2 \frac{du''_C}{dt} = 0.$$

Вынужденное напряжение $u'_C = 2u$, свободное напряжение мы определяем согласно изложенному в гл. 13:

$$u_2 = 2u (1 - e^{-\frac{t}{Z_\lambda C_2}});$$

$$i_2 = \frac{2u}{Z_\lambda} e^{-\frac{t}{Z_\lambda C_2}}.$$

Как видим, напряжение в конце линии при отражении волны от конденсатора сначала падает до нуля, затем повышается по закону показателя



Фиг. 14, 15.

тельной функции, стремясь в пределе к значению $2u$, а ток в момент отражения достигает значения

$$i_2 = 2u : Z_\lambda = 2i,$$

затем постепенно уменьшается, стремясь в пределе к нулю. Постоянной времени процесса является произведение волнового сопротивления линии и емкости

$$\tau = Z_\lambda C.$$

Отраженная волна напряжения будет

$$u_{отп1} = u - i_2 Z_\lambda = u - 2u \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

а отраженная волна тока

$$i_{отп1} = i_2 - i = \frac{2u}{Z_\lambda} e^{-\frac{t}{\tau}} - i = 2i \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - i.$$

Распространяясь к началу линии, отраженная волна вызывает увеличение тока скачком до значения $i_n = 2i$ и тем самым разряжает линию до нуля напряжения (фиг. 14, 15).

Следовательно, при отражении волны сосредоточенная емкость в первый момент дает такой же эффект, как и короткое замыкание линии, а затем постепенно волна тока спадает по экспоненциальной кривой, стремясь к нулю, а волна напряжения повышается до значения $2u$, таким образом в конце линии постепенно устанавливаются условия, соответствующие переходному процессу при включении на напряжение разомкнутой линии.

14,10. Отражение и преломление волн в месте соединения линий с различными волновыми сопротивлениями

В месте соединения двух линий с различными волновыми сопротивлениями (фиг. 14, 16), например, воздушной и кабельной линий, па-

дающая волна частично отражается, а частично распространяется дальше за узловую точку. При этом, так же как и в конце линии, замкнутой на цепь с сосредоточенными постоянными, в узловой точке имеют место следующие соотношения. Обозначая через i_2 и u_2 ток и напряжение проходящей волны ($u_2 = i_2 Z_{\lambda b}$), мы можем написать

$$u_2 = u_{\text{над. а}} + u_{\text{отр. а}},$$

или

$$i_2 Z_{\lambda b} = (i_{\text{над. а}} - i_{\text{отр. а}}) Z_{\lambda a} \quad (14, 61)$$

и

$$i_2 = i_{\text{над. а}} + i_{\text{отр. а}}. \quad (14, 62)$$

Подставляя значение $i_{\text{отр. а}}$ из (14, 62) в (14, 61), получаем

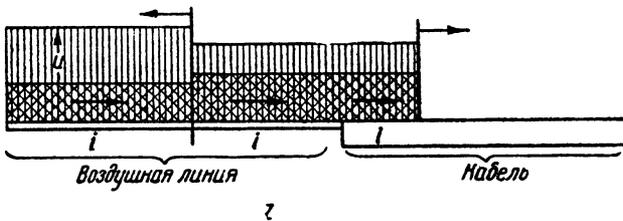
$$i_2 Z_{\lambda b} = (2i_{\text{над. а}} - i_2) Z_{\lambda a},$$

откуда

$$i_2 = \frac{2i_{\text{над. а}} Z_{\lambda a}}{Z_{\lambda a} + Z_{\lambda b}} = \frac{2u}{Z_{\lambda a} + Z_{\lambda b}}, \quad (14, 63)$$

так как

$$i_{\text{над. а}} Z_{\lambda a} = u.$$



Фиг. 14, 16.

Подставляя найденное значение i_2 в (14, 62), получаем

$$i_{\text{отр. а}} = i_2 - i_{\text{над. а}} = i_{\text{над. а}} \frac{2Z_{\lambda a}}{Z_{\lambda a} + Z_{\lambda b}} - i_{\text{над. а}} = i_{\text{над. а}} \frac{Z_{\lambda a} - Z_{\lambda b}}{Z_{\lambda a} + Z_{\lambda b}}, \quad (14, 64)$$

или, обозначив

$$q = \frac{Z_{\lambda b} - Z_{\lambda a}}{Z_{\lambda a} + Z_{\lambda b}},$$

получим

$$i_{\text{отр. а}} = -i_{\text{над. а}} q. \quad (14, 65)$$

Напряжение отраженной волны

$$u_{\text{отр. а}} = -i_{\text{отр. а}} Z_{\lambda a} = i_{\text{над. а}} Z_{\lambda a} q = u_{\text{над. а}} q. \quad (14, 66)$$

Во второй линии

$$i_2 = i_{\text{над. б}} = i_{\text{над. а}} + i_{\text{отр. а}} = i_{\text{над. а}} (1 - q)$$

и

$$u_2 = u_{\text{над. б}} = u_{\text{над. а}} + u_{\text{отр. а}} = u_{\text{над. а}} (1 + q).$$

} (14, 67)

В этих уравнениях q — коэффициент отражения от узловой точки, так же как и в случае линии, замкнутой на активное сопротивление, — показывает, в какой мере падающая волна отражается от узловой точки, причем в рассмотренном случае волновое сопротивление линии воздействует на условия отражения так же, как активное сопротивление в случае линии, замкнутой на сосредоточенное R .

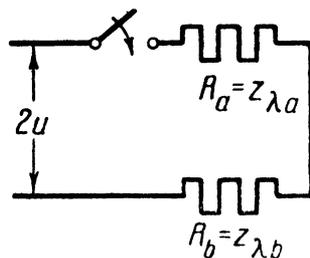
Практическим примером перехода волны через узловую точку линий с различными характеристиками может служить переход волны с кабельной линии на воздушную или обратно. Волновое сопротивление кабельной линии $Z_{\lambda} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ значительно меньше волнового сопротивления

воздушной линии, так как в кабеле благодаря относительной близости проводов и твердому диэлектрику емкость значительно больше, а индуктивность меньше, чем в воздушной линии¹.

Таким образом при переходе волны из воздушной линии в кабельную $Z_{\lambda a} > Z_{\lambda b}$, и коэффициент отражения $q = \frac{Z_{\lambda b} - Z_{\lambda a}}{Z_{\lambda a} + Z_{\lambda b}}$ отрицателен, следовательно, $i_2 > i_{\text{пад. а}}$, зато напряжение $u_2 < u_{\text{пад. а}}$, т. е. ток, увеличиваясь по сравнению с зарядным током, частично разряжает линию (фиг. 14, 16).

Обратные отношения имеют место при переходе волны с кабельной линии на воздушную.

Распространяясь от узловой точки, отраженная волна достигает начала первой линии и, отразившись от него, создает вторую падающую волну, движущуюся опять к узловой точке, во второй линии падающая волна достигнет конца линии и, отразившись от него в зависимости от рода замыкающей цепи, пошлет волну назад к узловой точке линий. В зависимости от длины первой и второй линий эти волны могут встретиться в том или другом месте системы, после того как одна из них пройдет через узловую точку. В узловой точке эти волны будут отражаться и преломляться по тем же законам, что и первая волна, а процесс в целом может быть рассчитан путем наложения сопровождающих распространение отдельных волн.



Фиг. 14, 17.

14, 11. Применение правила Петерсена-Пфифнера к отражению волн в точках соединения различных линий

Уравнения напряжений и токов при переходе волны через место соединения линий с различными волновыми сопротивлениями имеют ту же форму, что и уравнения отражения волн в случае линии, замкнутой цепью с сосредоточенными постоянными, причем все волновые сопротивления в этих уравнениях играют роль сосредоточенных активных сопротивлений. Следовательно, правило Петерсена-Пфифнера распространяется и на те случаи цепей с распределенными постоянными, в которых за узловыми точками лежат другие линии. В частности, для простого случая перехода волны с одной линии на другую, рассмотренного в предыдущем параграфе, получается простая схема замещения, приведенная на фиг. 14, 17.

Конечно, во всех случаях применения правила Петерсена-Пфифнера тождество хода процессов изменения напряжения и тока в линии и в схеме замещения сохраняется только до момента набегания новой волны от источника тока или от конца отходящей линии.

С этой оговоркой уравнения напряжений и токов для всех случаев сложных систем цепей с распределенными постоянными могут быть составлены на основе соответствующих схем замещения с сосредоточенными постоянными.

¹ Волновое сопротивление кабеля порядка 60 Ω , а волновое сопротивление воздушной линии порядка 300 ÷ 400 Ω .

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная практическая система единиц 193
Абсолютные системы CGS 190
Автотрансформатор 424
Активная мощность 218
— — трехфазного тока 299
— — проводимость 219
Активное сопротивление 215
— — измерение при несинусоидальном токе 378
Алгебраизация дифференциальных уравнений 525
Альтернатор 198
Ампер 14
— — на сантиметр 130
Ампервитки 179
Амперметр тепловой 49
Амперчас 14
Амплитуда 200
— гармоник ряда Фурье 347
Апериодический разряд конденсатора 508
- Бегущая волна 467
Бесконечно длинная линия 470
Био-Савара закон 121
- Ватт 29
Ваттчас 29
Векторная диаграмма 206
— — реактивной катушки 399
— — трансформатора 413
— — цепи с железом 389
Векторное изображение напряжений и тока в колебательном контуре 506
Взаимная индуктивность двухпроводных линий 164
— — коаксиальных тороидов 160
— индукция 151
Взаимодействие магнитного поля и электрического тока 109
— между магнитным полем и током 116
Взаимозаменяемость внешних звеньев 280
Взаиминдукция 150
Включение в цепь нового участка 274
— колебательного контура на переменное напряжение 514
— — — — постоянное напряжение 512
— конденсатора на переменное напряжение 485
— — — — постоянное напряжение 483
— короткозамкнутой линии 547
— линии, замкнутой на емкость 556
— — — — на сопротивление 550
— — — — R и L 553
— на переменное напряжение цепи, содержащей железо 519
— — — — — L и R 495
— — постоянное напряжение цепи, содержащей L и R 493
— разомкнутой на конце линии без потерь на постоянное напряжение 542
— трансформаторов на переменное напряжение 520
Внешняя характерист. источника тока 46
Внутр. сопротивл. источника тока 33
Воздушный зазор 198
— трансформатор 408
- Волновое сопротивление колебательного контура 501
Волновое сопротивление линии 455, 540
Волны в линиях 541
— — — при переходных процессах 546
— отраженные 545
— падающие 545
— фронт 538
Вольтметр 50
Вольт 15
— секунда 112
— — на квадратный сантиметр 108
Вращающееся поле 337
Вращающиеся вектора 203, 239
Всеобщая цепь переменного тока 436
Вторичные напряжения и мощности на круговой диаграмме 267
Вынужденный процесс 479
Выпрямленная синусоида, разложение в ряд Фурье 354
Высшие гармоники в трехфазной системе 382
Вычитание векторов, комплексное 244
- Гармоники 346
— кривой 393
Гаусс 108
Гаусса теорема 71
Генераторы переменного тока 198
Генераторы соединение треугольником 386
Генри 145
Геометрия электростатического поля 73
Герц 197
Графический способ преобразования звезды в треугольник 281
Графическое изображение изменения потенциала вдоль цепи 38
— определение сопротивления сложной цепи 257
- Двухфазное вращающееся поле 335
Действительная ось 241
Декремент затухания колебаний 507
Деление вектора на j 240
— комплексных величин 246
Деформация контура тока в равномерном магнитном поле 117
Джоуля-Ленца закон 29
Диамагнитные вещества 125
Диполь 69
Дифференциальные уравнения цепей с распределенными постоянными 454
Диэлектрики в электростат. поле 83
Диэлектрич. проницаемость вакуума 66
Диэлектрический коэффициент 85
Дроссельная катушка 404
- Единичные линии индукции 120
Емкостные коэффициенты 102
Емкость 89
— влияние на форму кривой тока 372
— в цепи переменного тока 222
— двухпроводной линии 99
— измер. при несинусоидальном токе 378
— плоского конденсатора 89
— трехфазной линии 464
- Зависимость сопротивления от температуры 24

- Закон Био-Савара 121
 — Джоуля-Ленца 29
 — Кулона 64
 — Ома 22
 — — для магнитной цепи 178
 — — полного тока 130
 — преломления магнитного поля 173
 — электромагнитной индукции 139
 Законы Кирхгофа 40
 — — для магнитной цепи 182
 — — символическое выражение 250
 Замыкание накоротко цепи, содержащей L и R , переходные процессы 491
 Затухание волны 468
 Защитные экраны 82
 Знак магнитного потока 115

 Изменение сопротивления в цепи, содержащей R и C , переходные процессы 488
 — — — — R и L , переходные процессы 496
 — — одного из участков цепи 277
 Измерение мощности трехфазной системы 301
 Изображение синусоидальных величин векторами 202
 Индуктивно связанные цепи 283
 Индуктивности рассеяния 154
 Индуктивность 145
 — влияние на форму кривой тока 371
 — в цепи переменного тока 213
 Индуктивность двухпроводной линии 162
 — измерение при несинусоидальном токе 378
 — катушки с железом 185
 — линии 460
 — — трехфазной 461
 — цилиндрической катушки 161
 Индуцированная э. д. с. 139
 Индукционная линия 118
 Индукционное влияние линии передачи сильного тока на провода слабого тока 386
 Искажение волн 471

 Кажущаяся мощность 218
 — — трехфазной системы 301
 — проводимость 215
 Кажущееся сопротивление 214
 Кеннели метод 56
 Кирхгофа законы 40
 Колебательный контур без потерь 498
 — — с потерями 501
 Коммутационные волны 537
 Комплексная форма символического выражения векторов 241
 Конденсатор 88
 — сферический 96
 — цилиндрический 95
 — эквивалентный 92
 Конденсаторы, соединение 92
 Контурные токи 278
 Короткое замыкание линии с распределенными постоянными 457
 — — трансформатора 415
 Коэффициент взаимной индукции 151
 — затухания 468
 — мощности 218
 — отражения 551
 — п. д. источника тока 36
 — — трансформатора 418
 — поляризации 85
 — рассеяния 156
 — самоиндукции контура 145
 — связи цепей 156
 — сдвига фазы волны 468
 — трансформации 408
 — формы кривой 209, 379
 Коэффициенты Кеннели 475
 Краевой эффект 105
 Кривая первоначального намагничивания 169
 — симметричная относительно горизонтальной оси 351
 — — — — и вертикальной оси 352
 Круговая диаграмма 444
 — — цепи с переменной нагрузкой при постоянном $\cos \varphi$ потребителя 264
 — — — — переменным активным и постоянным реактивным сопротивлением 262
 — — — — реактивным и постоянным активным сопротивлением 259
 Круговая частота 203
 Круговое вращающееся поле 337
 Кривая тока возбуждения 391
 Кулон 14
 — закон 64

 Ленца правило 141
 Линейное напряжение при соединении звездой 293
 — — — — треугольником 297
 Линейные проводники 17
 Линейный ток (звезда) 294
 — — (треугольник) 296
 Линии силовые 70, 73
 Линия без искажения 471
 — волновое сопротивление 540
 — индукционная 118
 — характеристика 455
 Логарифмический декремент затухания 508
 Лорентцева сила 137

 Магнитная восприимчивость 168
 — индукция 108
 — проницаемость 121, 124
 — — вакуума 196
 — — экспериментальное определение 126
 — цепь неразветвленная 177
 Магнитное напряжение обхода 137
 — — поле 107
 — — в неоднородной среде 171
 — — кольцевого контура 124
 — — напряженность 128
 Магнитное поле прямолинейного проводника 122
 — сопротивление 178
 Магнитный поток 111
 — — плотность 113
 — — через замкнутую поверхность 118
 — — — — контур 116

- Магнитодвижущая сила 137, 178
178
- Максвелл 112
— вторая группа формул 102
— первая группа формул 101
— правило 117
- Мгновенная мощность 211
— — трехфазного тока 298
- Мгновенное значение э. д. с. 200
- Международная практическая система единиц 193
- Метод наложения 51
— Перри 360
— Роте 365
— Рунге 363
— симметричных составляющих 325
— трансформации 56
— холостого хода и короткого замыкания 53
- Механическое взаимодействие параллельных проводов 126
- Мнимая единица 240
- Многослойная изоляция 86
- Многофазная система 290
- Многофазное вращающееся поле 341
- Многофазные системы, область применения 321
— — сравнение по экономичности 323
- Молекулярные токи 167
- Мощность в комплексной форме 247
— определение по круговой диаграмме 260
— при несинусоидальном токе 376
— электрического тока 29
- Нагревание проводов 31
- Нагрузочный режим трансформатора 410
- Намагниченность 168
- Намагничивающий ток, определение 394
- Направление вектора напряженности электрического поля 16
— магнитного поля 108
— нормали 115
— тока 13
- Напряжение между электродами 14
— обхода 19
— шага 27
- Напряженность магнитного поля 128
— поля точечного заряда 66
— электрического поля 16
- Насыщение ферромагнетиков 169
- Начальная фаза 201
- Неоднородные электрические поля 94
- Неравномерная нагрузка фаз при соединении звездой 306
- Неразветвленная магнитная цепь 177
- Несвязанная многофазная система 322
- Несимметричные короткие замыкания, расчет 337
- Несинусоидальные токи 345
- Нулевая точка 292
- Обозначение зажимов обмотки трансформаторов 420
- Обратимая индуктивность 185
- Однородное электрическое поле 17
— электростатическое поле 79
- Однофазный двухобмоточный трансформатор 408
- Ома закон 22
- Оператор переходного сопротивления 526
— переходной проводимости 526
— трехфазной системы 290
- Определение намагничивающего тока 394
— токов и напряжений в разветвленной цепи 42
- Опрокидывание напряжения 406
- Особенности цепей с железом 387
- Остаточная индукция 170
- Осциллограф 206
- Относительная магнитная проницаемость 124
- Отражение волн в линиях 558
- Отраженные волны 545
- Отрицательная сторона поверхности 115
- Падающие волны 545
- Параллельное соединение емкостей и сопротивлений 228
— — конденсаторов 92
— — проводников 46
— — цепей переменного тока 235
- Парамагнитные вещества 125
- Параметры цепей с распределенными постоянными 453
- П-образная схема замещения 437
— — — линии 476
- Передача энергии постоянным током 60
— — трехфазным током 303
- Переменный ток 197
- Переходные процессы 478
- Переходный процесс в цепи с распределенными постоянными 547
- Периодические функции 346
- Период 346
— свободных колебаний контура 500
— собственных колебаний цепи 234
— тока 197
- Петля гистерезиса 170
- Плоский конденсатор 88
- Плотность магнитного потока 113
— тока 19
— энергии магнитного поля 149
- Поверхности равного потенциала 76
- Поверхностная плотность зарядов 72
- Поверхностный эффект в железных листах 432
— — — проводниках с током 426
- Подкасающаяся 482
- Подъемная сила магнитов 189
- Показательная форма символического изображения векторов 242
- Поле системы «провод — земля» 100
- Полная проводимость 215
- Полное сопротивление 214
- Полный ток через поверхность 131
- Положительная сторона поверхности 115
- Поляризованный атом водорода 83
- Последовательное соединение конденсаторов 93
— — проводников 37
— — R , L и C 230
- Постоянная времени, графическое определение 482
— — цепи, содержащей R и C 481

- Потенциальные коэффициенты 101
 Потенциал электрического поля 18
 — электростатического поля 66
 Потери в железе 388, 395
 — — гистерезис 187, 395
 Потеря напряжения в линии 304
 — — трансформатора 417
 Поток вектора 20, 70
 — — магнитной индукции 111
 — — рассеяния 152, 389
 Потокосцепление 143
 Правило левой руки 110
 — Ленца 141
 — Максвелла 117
 — Петерсена и Пфифнера 555, 559
 — правой руки 140
 — правоходового винта 115
 Предохранители в нулевом проводе, недопустимость установки 303
 Преломление волн в линиях 558
 — силовых линий 88
 Преобразование треугольника в звезду при равномерной нагрузке фаз 297
 Приближенные методы разложения в ряд Фурье 358
 — уравнения линии 472
 Приведенная векторная диаграмма 414
 Приведенный трансформатор 414
 Применение автотрансформаторов 425
 Принцип наложения 271
 Проводимость активная 219
 — кажущаяся 215
 — полная 215
 — проводника 22
 — реактивная 219
 Проводники в электростатическом поле 80
 — линейные 17
 Процентные потери напряжения 305
 Прямая волна 468
 Прямоугольник, разложение в ряд Фурье 354

Работа переменного тока 211
 — производимая при перемещении контура с током в магнитном поле 116
 — электрического тока 29
 Рабочий поток 389
 — — трансформатора 408
 Равномерно нагруженная многофазная система 322
 Разделение потерь в железе 399
 Разложение в ряд Фурье, приближенные методы 358
 — несинусоидальных функций 345
 — пульсирующего поля на два вращающихся 340
 — системы трех несимметричных векторов 325
 Размагничивающее действие концов магнита 177
 Разность потенциалов 18, 67
 Разряд конденсатора на сопротивление 480
 — линии без потерь 538
 Распределение магнитной индукции в воздушном зазоре 199
 — переходных процессов в форме электромагнитных волн 537

 Расчет несимметричных коротких замыканий 337
 — разветвленной магнитной цепи 181
 — цепей с железом при переменном токе 388
 Рационализация системы уравнения 194
 Реактанц 215
 Реактивная мощность 218
 — — при резонансе 233
 — — трехфазного тока 300
 — — трехфазной системы, измерение 303
 — проводимость 219
 — составляющая напряжения 217
 Реактивное сопротивление 215
 — — взаимоиנדукции 283
 — — емкостное 223
 Регулирование напряжения с помощью реактивного тока 269
 Резонанс высших гармоник 372
 — напряжений 232
 — — в цепях с железом 405
 — токов 238
 — — в цепях с железом 407
 Ряд Фурье 346
 — — для симметричных функций 350

 Самоиндукция 144
 Свободная частота контура 500
 Свободный процесс 479
 Связанная многофазная система 322
 Связь между контурами 156
 Силовая линия 70, 73
 — — свойства 74
 — трубка 75
 Символическое выражение векторов с помощью комплексных чисел 239
 — — кажущегося сопротивления 249
 — изображение векторов в полярной системе координат 242
 — — гармонически изменяющихся величин 243
 — — кажущейся проводимости 250
 Сименс 22
 Симметричные многофазные системы 289, 321
 Синусоидально-распределенное поле 338
 Синусоидальный закон изменения э. д. с. 199
 Система единиц Джорджи 194
 — нулевой последовательности 326
 — отрицательной последовательности 326
 — положительной последовательности 326
 «Система» проводников 99
 Скорость распространения волны в линии 540
 Сложение векторов 204
 — — комплексное 244
 Смешанное соединение проводников 49
 Соединение генераторов треугольником 386
 Соединение звездой 292
 — — при несинусоидальных токах 384
 — конденсаторов 92
 — обмоток трансформатора 420
 — треугольником 295
 — — при несинусоидальных токах 384
 Сопrotивление в цепи переменного тока 213

- кажущееся 214
- колебательного контура 504
- Сопротивление короткого замыкания трансформатора 415
- полное 214
- проводника 22
- Сопряженный комплекс 248
- Среднее значение синусоидальной величины 208
- Средняя мощность переменного тока 212
- Схема замещения линии с распределенными постоянными 473
- — реактивной катушки 402
- — трансформатора 416
- — цепей с распределенными постоянными 555
- Т**-образная схема замещения линии 473
- Телесный угол конуса 71
- Температурный коэффициент 24
- Теорема Гаусса 71
- Тевенина 53
- Теоремы разложения 532
- Тепловой амперметр 49
- Ток возбуждения трансформатора 409
- Топографическая диаграмма 306
- — трансформатора 421
- Точечные заряды 64
- Точка короткого замыкания на круговой диаграмме 262
- холостого хода на круговой диаграмме 262
- Транспозиция проводов 463
- Трансформатор 408
- трехфазный 419
- Трапеция, разложение в ряд Фурье 354
- Треугольник короткого замыкания в трансформаторе 418
- напряжений 215
- проводимостей 221
- разложение в ряд Фурье 354
- сопротивлений 215
- Трехпроводная система постоянного тока 62
- Трехфазная система 289
- Трубка силовая 75
- Угол гистерезиса** 393
- Удельная мощность 30
- электропроводимость материала 21
- Удельное сопротивление 23
- Удельные потери в железе 398
- Умножение вектора на j 240
- комплексных величин 246
- Универсальные уравнения четырехполюсников 438
- Уравнение Бесселя 428
- магнитного равновесия трансформатора 411
- Хевисайда 533
- Уравновешенная система 299
- Уравновешенная система многофазная 323
- Фазовое напряжение для соединения звезд**
- Фазовый ток (звезда) 294
- — (треугольник) 296
- Фазы гармоник ряда Фурье 347
- Фарада 66, 89
- Ферромагнитные вещества 125, 167
- Феррорезонанс напряжений 405
- Форма кривой ε , д. с. генератора 198
- Формула Рихтера 395
- Штейнметца 395
- Эйлера 242
- Формфактор 209
- Функции Бесселя 429
- Фронт волны 538
- Фурье ряд 346
- Характеристика линии** 455
- Холостой ход линии с распределенными постоянными 457
- — трансформатора 408
- Центр круговой диаграммы** 265
- Цепи со взаимной индуктивностью, переходные процессы 529
- с распределенными постоянными 453
- Цепь переменного тока, особенности 209
- — — с R 210
- — — C и R 225
- с двумя узлами 44
- — железом 387
- Циклическая частота 203
- Цикл переменного тока 197
- Циркуляция вектора 69
- — напряженности поля 137
- Частичные емкости** 104
- Частота 197
- круговая 203
- собственных колебаний контура 234
- циклическая 203
- Четырехполюсник 435
- Число оборотов вращающегося поля 338
- Шунт** 50
- Эквивалентная синусоида 393
- Эквивалентный четырехполюсник 435
- Эквипотенциальные поверхности 76
- Электрическая проницаемость вакуума 196
- Электрические поля неоднородные 94
- Электрический момент диполя 69
- ток 13
- — мощность 29
- — работа 29
- Электрическое поле 15
- — между concentрическими шаровыми электродами 25
- — — двумя проводами 97
- смещение 92
- Электродвижущая сила 34
- Электромагнитная индукция, закон 139
- Электростатическое поле, геометрия 73
- — чертеж 73
- Эллиптическое вращающееся поле 342
- Энергия магнитного поля 148
- — — тороида 149
- электрического поля 90
- Эффективное значение напряжения 372
- — переменного напряжения 208
- — периодической кривой, определение по методу Флеминга 375
- Якорь магнита** 189